La Matematica e la sua Didattica, *Volume 32, n. 2, 2024, 189-208*
https://doi.org/10.6092/issn.3035-2940/20710

Manipolazione Algebrica e Disabilità Visive: Tre Studi di Caso a Confronto

Algebraic Manipulation and Visual Impairments: Comparing Three Case Studies

Manipulación Algebraica y Discapacidades Visuales: Comparando Tres Estudios de Caso

Silvia Regola,[1] Andrea Maffia[2] e Carola Manolino[3]
[1]*Dipartimento di Scienze umane e sociali, Università di Bergamo, Italia*
[2]*Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*
[3]*Dipartimento di Scienze umane e sociali, Università della Valle d'Aosta, Italia*

Sunto. *L'insegnamento della matematica in presenza di disabilità visive può presentare alcune difficoltà, anche nell'ambito della manipolazione algebrica. Le tecnologie assistive si sono sviluppate per facilitare la lettura dei contenuti matematici, ma ci sono scarse informazioni su come queste influiscano sulla costruzione di significati e sulle abilità di manipolazione simbolica. Questo studio cerca di colmare tale lacuna attraverso le interviste a tre soggetti con disabilità visive, impegnati nella risoluzione di problemi algebrici. L'analisi delle loro strategie risolutive, nel quadro teorico del senso della struttura, evidenzia come l'accesso alla matematica tramite mezzi diversi possa influenzare la comprensione intuitiva della materia.*

Parole chiave: algebra, disabilità visive, senso della struttura, tecnologie assistive, manipolazione simbolica.

Abstract. *Mathematics education in the presence of visual impairments can pose unique challenges, particularly in the area of algebraic manipulation. Assistive technologies have been developed to facilitate the reading of mathematical content, but there is a dearth of insights into how these affect meaning-making and symbolic manipulation skills. This study seeks to bridge this gap through interviews with three individuals with visual impairments engaged in algebraic problem-solving. Framed within the theoretical construct of Structure Sense, the analysis of their solving strategies shows how access to mathematics through different means may influence the intuitive understanding of the subject.*

Parole chiave: algebra, visual impairments, structure sense, assistive technologies, symbolic manipulation.

Resumen. *La enseñanza de las matemáticas en presencia de discapacidades visuales puede presentar algunas dificultades, sobre todo en el ámbito de la manipulación* *algebraica. Las tecnologías asistivas se han desarrollado para facilitar la lectura de los contenidos matemáticos, pero hay escasa información sobre cómo afectan la construcción de significados y las capacidades de manipulación simbólica. Este estudio intenta llenar esta lacuna a través de entrevistas a tres personas con discapacidades visuales, que participan en la resolución de problemas algebraicos. El análisis de sus estrategias de resolución, en el marco teórico del sentido de la estructura, destaca cómo el acceso a las matemáticas a través de medios diferentes puede influir en la comprensión intuitiva de la materia.*

Palabras clave: álgebra, discapacidades visuales, sentido de la estructura, tecnologías asistivas, manipulación simbólica.

1. Introduzione

La letteratura sull'apprendimento della matematica da parte degli studenti non vedenti è molto limitata. Healy e Fernandes (2011) e Del Zozzo e Santi (2023) hanno osservato che i soggetti ciechi possono coinvolgere i gesti nella loro appropriazione di significati matematici; descrivendo i gesti usati da un soggetto cieco come rievocazioni di attività precedentemente vissute, mostrano il legame che questi hanno con la costruzione di conoscenze matematiche e la loro concettualizzazione. Le loro argomentazioni sono convincenti nel caso di figure geometriche e solidi: il gesto può corrispondere a passate esperienze di toccare, muovere un dito lungo artefatti fisici. Allo stesso modo, la descrizione del grafico di una funzione potrebbe essere basata sull'esperienza corporea del movimento (Núñez et al., 1999; Ahmetovic et al., 2019). Tuttavia, nel caso di altre rappresentazioni matematiche, come i simboli algebrici, la loro forma risulta molto più distaccata dall'esperienza sensoriale e motoria. Pertanto, appare lecito interrogarsi su che ruolo può avere la gestualità in questo contesto, come gli studenti con disabilità visive possano accedere a questo tipo di rappresentazioni e come questi aspetti influenzino le loro attività matematiche. Le tecnologie assistive e l'alfabeto Braille possono essere mezzi idonei per accedere alle rappresentazioni algebriche (Alajarmeh et al., 2011; Armano et al., 2018; Bouck et al., 2016) e, anche per ottimizzarne lo sviluppo e la standardizzazione, è importante sapere come avviene l'interazione con essi.

Per quanto in nostra conoscenza, la letteratura nazionale o internazionale nel campo dell'educazione matematica sulla manipolazione dei simboli algebrici da parte di studenti ciechi è scarsissima. Questo studio vuole contribuire ai primi passi necessari per colmare questa lacuna nella ricerca, offrendo una descrizione del processo di manipolazione dei simboli algebrici, da parte di individui ciechi o ipovedenti esperti,[1] mentre risolvono un compito algebrico.

[1] Con individui esperti intendiamo persone adulte con una formazione scientifica tale da permettere loro di affrontare quesiti matematici con sicurezza e padronanza.

2. Algebra e Disabilità Visive

Tradizionalmente gli insegnanti di matematica fanno largo uso della lavagna, di disegni e di diagrammi (Mellone et al., 2021; Piroi et al., 2023); le metafore visive sono molto comuni nelle spiegazioni dei docenti che desiderano rendere più chiari i concetti matematici più astratti (per esempio, è fatto ampio uso di locuzioni avverbiali di luogo, o si parla di "vedere" una struttura algebrica o di "cieca manipolazione" – Pimm, 2002, p. 89). Questo, purtroppo, porta molti degli insegnanti che si trovano a lavorare con studenti con residuo visivo basso o nullo, a esonerare lo studente con disabilità visiva dal conseguire alcuni obiettivi, che non sanno come adattare alle sue esigenze sensoriali e cognitive.

I materiali e gli ausili didattici adeguati possono variare molto in base alla situazione dell'alunno:

- per lo studente cieco, trascrizione in Braille dei manuali, immagini in rilievo, diagrammi tattili, modelli del piano o dello spazio;
- per lo studente ipovedente, video-ingranditori, illuminazione adeguata, con attenzione ai colori e ai contrasti, a seconda delle specifiche caratteristiche del disturbo visivo.

Bisogna sfruttare il più possibile il sistema aptico e quello uditivo, favorire ed educare l'esplorazione sonora, tattile, la manipolazione e gli stimoli psicomotori (Marichal et al., 2022). Del Campo (2000) suggerisce che, quando possibile, il materiale venga realizzato dall'alunno stesso "perché l'artefice conosce sempre la sua opera meglio del più attento osservatore" (p. 123). Le azioni e i movimenti attuati nella costruzione del materiale o della rappresentazione simbolica attivano processi cognitivi utili al riconoscimento delle relazioni e delle proprietà tra gli oggetti matematici osservati, che difficilmente possono essere compensati da una ricezione sensoriale passiva e, ancor meno, dalla semplice descrizione verbale.

Le spiegazioni orali per studenti con disabilità visive devono essere ricche e descrittive, ma devono anche prevedere particolari accorgimenti per compensare il fatto che lo studente con disabilità visiva non ha accesso a larga parte del linguaggio non verbale (Tornavacca, 2002). La dettatura di formule o espressioni e le spiegazioni, che di solito vengono pronunciate in contemporanea alla scrittura alla lavagna, devono seguire alcune accortezze. Frasi come "a più b al quadrato" o "radice di due per x", in italiano, sono ambigue per chiunque non abbia una buona visuale della lavagna; perciò, bisognerebbe sempre specificare dove cominciano e dove finiscono parentesi, numeratori, denominatori, esponenti e argomenti di radici, di funzioni elementari, etc. Questo tipo di accortezza non può che facilitare anche gli altri studenti (Papadopoulos & Thoma, 2022).

D'altra parte, il linguaggio naturale ha comunque diversi difetti: la necessità descrittiva rende le frasi lunghe e complesse, la comunicazione orale ha una struttura lineare e sequenziale, a differenza di alcune espressioni algebriche (per esempio le frazioni). Facendo affidamento al solo stimolo orale, risulta particolarmente faticoso elaborare le informazioni e riconoscere le relazioni che, in presenza di vista, possono essere più facilmente comprese. Il linguaggio scritto appare molte volte utile se non addirittura necessario.

Nel caso di studenti ipovedenti, il linguaggio scritto può divenire accessibile grazie a video-ingranditori e altri strumenti utili a regolare il contrasto e il colore. Nel caso di studenti ciechi, è possibile fare uso della sintesi vocale o del Braille.

Oggi, nel mondo, vengono usati due sistemi per il codice Braille: il codice Braille a 6 punti e il codice Braille a 8 punti. Di solito, se non è specificato diversamente, con "codice Braille" si intende quello a 6 punti, ovvero quello che viene insegnato alla scuola primaria, che viene stampato sui libri prodotti per studenti ciechi, sulle confezioni dei farmaci, ecc. Si tratta di un alfabeto che dispone di solo 64 caratteri distinti. Tra questi ci sono dei simboli che hanno la funzione di prefissi, come "segna-maiuscole" e "segna-numero", che cambiano il significato dei caratteri successivi. Ai fini di adattare il Braille a un ambiente informatico, che necessita di un numero maggiore di caratteri, si utilizza il Braille a 8 punti. Esso ha una codificazione internazionale e offre la possibilità di rappresentare fino 256 caratteri. La barra/tastiera Braille è un dispositivo hardware che permette di leggere, in modo tattile, quanto visibile a schermo.

L'acquisizione di questi simboli e l'attribuzione di senso sono parte integrante dell'educazione matematica, quindi, anche il simbolo matematico in Braille deve essere introdotto all'alunno cieco simultaneamente all'introduzione del corrispondente simbolo al resto degli alunni (del Campo, 2000).

Per semplificare il linguaggio algebrico Braille e migliorare la possibilità di interagire e confrontarsi con chi non lo maneggia, sono stati ideati dei software specifici per la scrittura matematica, ad esempio LAMBDA (acronimo di Linear Access to Mathematic for Braille Device and Audiosynthesis) e, più recentemente, EDICO (Editor Científico ONCE). Entrambi i software permettono alle persone cieche o gravemente ipovedenti di scrivere e manipolare espressioni algebriche in un ambiente inclusivo; LAMBDA, che nasce all'interno di un progetto europeo (Schweikhardt et al., 2006), è un servizio a pagamento pensato per l'uso con la barra Braille ed è attualmente usato in ambiente scolastico; EDICO, rilasciato nel 2018 dall'Organizzazione Nazionale dei Ciechi di Spagna (ONCE), in collaborazione con l'Universidad Complutense de Madrid, è un software gratuito che facilita l'accesso anche a contenuti di altre aree scientifiche, come la fisica o la chimica, e favorisce ulteriormente l'interazione diretta con le persone vedenti (Martínez et al., 2022).

A livello universitario gli studenti devono poter essere più autonomi e indipendenti, spesso questo è un ulteriore ostacolo per gli studenti con disabilità visive. In questo contesto, la necessità di fare matematica attraverso il computer diventa primaria per tutti: è necessario rappresentare tutte le espressioni, anche le più complesse, con un codice lineare. Gli studenti con disabilità visive possono allora sfruttare linguaggi di formattazione, originariamente dedicati alla pubblicazione elettronica di documenti di testo scientifici (TEX, LATEX, MathML); oppure sistemi CAS (computer algebra system). Essi prevedono l'inserimento di comandi lineari, completamente testuali e quindi accessibili tramite barra Braille o sintesi vocale (Derive, MuPAD, MAPLE, MathCad o Mathematica) (Armano et al., 2022; Kohanová, 2006).

Tutti gli strumenti fin qui citati permettono allo studente con disabilità visive di accedere al simbolismo algebrico e di manipolarlo, almeno parzialmente. Tuttavia, rimangono alcune difficoltà che possono essere ascritte alla sfera cognitiva.

In generale, la visione d'insieme rimane difficilmente accessibile: il Braille e la sintesi vocale permettono solo un accesso sequenziale e lineare ai testi e anche l'uso del video ingranditore permette di vederne solo una porzione alla volta. Le espressioni particolarmente complicate, d'altra parte, richiedono un'analisi strutturale (nel senso che chiariremo meglio nella prossima sezione) e il confronto fra sottostrutture algebriche, che possono essere disposte ad una certa distanza tra loro. Per uno studente con disabilità visiva, questo richiede una ricostruzione mentale di tutta l'espressione nel suo insieme, con un consistente sforzo mnemonico (tanto maggiore quanto più l'espressione è lunga e complessa) (Withagen et al., 2013).

La scrittura matematica ha una struttura fortemente bidimensionale: l'uso dello spazio di stampa è ampiamente sfruttato per trasmettere in modo sintetico le informazioni al lettore vedente (apici, pedici, frazioni, radici quadrate, etc.).

Nel testo in Braille e nella lettura da parte della sintesi vocale, invece, la struttura è lineare e le informazioni implicite nella disposizione spaziale devono essere rese esplicite, rendendo difficile l'accesso e la comprensione della matematica da parte degli studenti con disabilità visive. Il carattere lineare di questi strumenti influisce anche sulla possibilità di svolgere operazioni che vengono facilitate dalla rappresentazione bidimensionale (ad esempio la semplificazione incrociata nel prodotto fra frazioni) o interi algoritmi che sono strettamente legati a un certo schema "spaziale" (operazioni in colonna, divisione con Ruffini, etc.).

3. Senso della Struttura

Il coinvolgimento delle tecnologie digitali nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica ha fornito molte nuove opportunità agli studenti con disabilità visive che possono fare affidamento su screen reader (e altre tecnologie assistive) e barre Braille per accedere al testo scritto, comprese le formule algebriche (Alajarmeh et al., 2011; Armano et al., 2018). Tuttavia, l'utilizzo di simboli algebrici per la risoluzione di problemi matematici non richiede solo la mera lettura dei simboli, ma anche la capacità di agire su di essi, di manipolarli. Mentre non mancano gli studi che si sono concentrati su come i libri di testo digitali possano supportare l'attività algebrica degli studenti (e.g., Bouck et al., 2016), scarseggia la ricerca sui sistemi per consentire agli studenti di agire in modo produttivo sui simboli (Alajarmeh et al., 2011; Maffia et al., 2023).

Quando ci riferiamo alla manipolazione dei simboli algebrici, non ci riferiamo all'applicazione meccanica delle regole di trasformazione delle espressioni algebriche (che chiameremo da qui in poi "approccio procedurale"). Riteniamo che una manipolazione competente comporti il ricorso a "strutture equivalenti di un'espressione in modo flessibile e creativo" (Linchevsky & Livneh, 1999, p. 191) ovvero di quello che in letteratura viene definito come *senso della struttura* (o approccio strutturale) (*ibidem*). Secondo Hoch e Dreyfus (2004), nel contesto dell'algebra scolastica, il senso della struttura può essere descritto come composto da sei abilità. Le elenchiamo di seguito esemplificandole facendo riferimento al processo risolutivo di una delle equazioni utilizzate nello studio: $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 7 + \frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}$.

- **SS1.** Vedere un'espressione o una frase algebrica come un'entità. Nell'esempio proposto, si tratta di riconoscere che la scrittura proposta è un'equazione in cui due espressioni algebriche sono messe a confronto mediante una relazione di congruenza.
- **SS2.** Riconoscere un'espressione o una frase algebrica come una struttura precedentemente incontrata. Questa componente è mobilitata, per esempio, da chi nota che la frazione algebrica $\frac{x}{x-1}$ compare a entrambi i membri dell'equazione.
- **SS3.** Dividere un'entità in sottostrutture. Si riconosce questo comportamento in chi nota che ciascuno dei membri dell'uguaglianza è composto dalla somma di un numero razionale e di una frazione algebrica a cui è aggiunto un altro termine.
- **SS4.** Riconoscere le connessioni reciproche tra le strutture. Il solutore potrebbe riconoscere che, "trasportando" una delle frazioni algebriche all'altro membro dell'uguaglianza si otterrebbero due termini opposti allo stesso membro.
- **SS5.** Riconoscere quali manipolazioni è possibile eseguire. Nell'esempio proposto, si può riconoscere che è possibile "trasportare" tutti i membri in cui compare l'incognita a uno dei membri dell'equazione, in alternativa si possono prima cancellare termini uguali che compaiono in entrambi i membri.
- **SS6.** Riconoscere quali manipolazioni è utile eseguire. A partire dal riconoscimento fatto grazie alla componente precedente, si può notare che è più efficiente eliminare le frazioni algebriche piuttosto che sommarle tra loro.

Nell'analizzare tre casi di studio, ci domanderemo se e come i soggetti non vedenti e ipovedenti possono fare affidamento sul proprio senso della struttura mentre risolvono un compito algebrico, la cui accessibilità è fornita attraverso strumenti digitali quali la sintesi vocale, la barra Braille e i video-ingranditori.

4. Metodi

Poiché si vuole indagare un aspetto su cui la letteratura scientifica nota è scarsa, per questa ricerca si è adottato il metodo del caso di studio esplorativo, che permette di dare una descrizione ricca e approfondita del fenomeno in oggetto (Cohen et al., 2007).

Per farlo sono state condotte tre interviste con adulti non vedenti e ipovedenti, considerati "esperti in matematica", in quanto hanno conseguito o stanno conseguendo una Laurea Magistrale in Matematica o in Fisica. Le tre interviste sono state realizzate indipendentemente e in momenti separati.

Antonio (uno pseudonimo) è cieco, ma fino a quattro anni prima dell'intervista era ipovedente con una grave patologia degenerativa; accede ai contenuti matematici in Latex, usando la sintesi vocale. Monica (altro nome di fantasia) è cieca dalla nascita; accede ai contenuti matematici in Latex, usando la barra Braille a otto punti. Silvano (ancora uno pseudonimo) ha disabilità progressive di tipo visivo e motorio, è ipovedente e ha limitazioni nell'uso delle mani; accede al testo stampato usando un video ingranditore da tavolo.

Tutti e tre i soggetti si sono prestati volontariamente per partecipare alle interviste; erano consapevoli di essere registrati per finalità di ricerca, ma non conoscevano i quadri teorici utilizzati per l'analisi.

L'intervista si concentra sulle esperienze soggettive degli intervistati, che i ricercatori stimolano a descrivere approfonditamente, spiegando ogni ragionamento fatto, motivando le scelte e le strategie risolutive, esplicitando gli strumenti utilizzati e i significati attribuiti ai simboli e alle strutture delle espressioni algebriche.

Per ottenere una descrizione "densa" sono state raccolte diverse fonti di dati, tra cui:

> atti di parola; comunicazione non verbale; descrizioni in un vocabolario a bassa inferenza; [...] registrazione dell'ora e dei tempi degli eventi; commenti dell'osservatore [...]; dati contestuali dettagliati. (Cohen et al., 2007, p. 254)

Si è effettuata sia la registrazione audio e video delle interviste (attraverso una webcam), sia la cattura dello schermo del computer dell'intervistato, quando utilizzato. I video sono stati completamente trascritti il più fedelmente possibile, aggiungendo la descrizione delle azioni e della comunicazione non verbale.[2]

L'intervista utilizza come stimolo diversi quesiti di matematica, qui ci

[2] Il testo completo delle trascrizioni è riportato nella tesi di laurea magistrale di Regola (2023).

concentreremo solo su quelle di tipo algebrico, che riportiamo nel seguito.[3] Nell'intervista vengono presentati due gruppi di tre equazioni ciascuno (A, B, C) e (X, Y, Z), con diverso numero di parentesi (0, 1 o 2). Ad ogni intervistato è stato chiesto di scegliere e risolvere una coppia di equazioni, formata da un'equazione presa dal primo gruppo (dove l'incognita compare solo nel primo membro) e una dal secondo gruppo (dove l'incognita compare in entrambi i membri), ma escludendo le coppie di equazioni con lo stesso numero di parentesi.

A: $1-\frac{1}{n+2}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{110}$
B: $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{132}$
C: $1-\frac{1}{n+3}-1+\frac{1}{n+3}=\frac{1}{72}$

X: $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$
Y: $\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)-x=6+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}\right)$
Z: $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=7+\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$

Queste equazioni sono tratte dall'articolo di Hoch e Dreyfus (2004) precedentemente citato. Nello studio originale, vengono considerate come prova di una mancanza di senso della struttura, ad esempio, le azioni di aprire le parentesi e/o di trovare un comune denominatore. Nei risultati, gli autori affermano che la presenza delle parentesi aiuta gli studenti a concentrarsi sulle entità simili, favorendo un approccio strutturale.

In questo studio, queste sei equazioni sono state usate per stimolare il senso della struttura negli intervistati e indagare come esso può essere influenzato dalle tecnologie assistive da loro utilizzate, anche osservando se ci sono delle differenze rispetto ai risultati noti sulla popolazione generale.

A tal fine, è stata fatta un'analisi dettagliata dei procedimenti risolutivi esposti dagli intervistati, identificando, per ciascun passaggio algebrico, l'utilizzo di una o più delle sei abilità caratterizzanti il senso della struttura, come definite da Hoch e Dreyfus (2004). Ad esempio, se la persona intervistata dice che una frazione algebrica è uguale ad una letta prima, si è rilevata la capacità di riconoscere un'espressione o una frase algebrica come una struttura precedentemente incontrata (SS2); se valuta la possibilità di calcolare il minimo comun denominatore, si è rilevata la capacità di riconoscere quali manipolazioni

[3] Il testo completo delle consegne può essere trovato in Regola (2023). L'analisi delle risposte ad altre consegne rispetto a quelle qui presentate è stata pubblicata in Miragliotta et al. (2023) e in Maffia et al. (2023).

è possibile eseguire (SS5); etc. Il risultato di questa analisi puntuale è riassunto in Tabella 1 presente in appendice.[4]

Nel corso delle interviste si è chiesto di spiegare alcune scelte, si sono discusse le strategie risolutive e si sono fatte domande mirate sul ruolo delle parentesi, per arricchire l'osservazione e rendere l'analisi più aderente all'esperienza dei risolutori coinvolti nello studio.

Per ciascuna intervista, il processo è stato fatto da almeno uno degli autori e poi confermato dagli altri.

5. Le Interviste

Nelle interviste raccolte sono stati analizzati in modo fine i processi che vengono messi in atto, dai soggetti con disabilità visiva, per risolvere espressioni algebriche.

Un aspetto che si può facilmente osservare da queste interviste è l'influenza che hanno, nelle strategie risolutive, il mezzo di accesso al contenuto matematico e gli strumenti utilizzati per la manipolazione.

Antonio utilizza lo screen reader NWDA, che legge tramite sintesi vocale il codice Latex. Per svolgere i passaggi algebrici, il codice viene manipolato tramite il software "Blocco note" (per una descrizione più dettagliata si veda Maffia et al., 2023). Questa tecnologia influenza significativamente lo svolgimento dell'intervista, in particolare perché fornisce una lettura molto diversa da quella utilizzata in matematica e che, quindi, richiede una sostanziale rielaborazione per poter essere compresa. Lo screen reader permette due modalità di lettura: un'intera riga di seguito oppure un carattere per volta, muovendosi con le frecce della tastiera. Quando questa seconda modalità di lettura avviene sul "blocco note" è possibile seguire i movimenti del cursore tramite la registrazione dello schermo.

La lettura del contenuto matematico è molto lenta e questa attività occupa buona parte del tempo necessario per rispondere ai quesiti proposti. Ad esempio, la prima frazione dell'equazione A, se letta con la modalità "continua", restituisce la seguente frase: «uno frac uno enne più due». Se invece la stessa frazione viene letta carattere per carattere, viene pronunciata come segue: «uno trattino controbarra effe erre a ci spazio aperta-graffa uno chiusa-graffa aperta-graffa enne più due chiusa-graffa»; affinché la sintesi vocale legga interamente la prima equazione in questa modalità sono necessari almeno 25 secondi.

Osservando gli spostamenti di Antonio nella stringa di testo, si notano delle strategie per ottimizzare la lettura, che avviene in modo tendenzialmente lineare, ma con delle soste (in corrispondenza dei segni "+" e "–" e delle frazioni) e delle inversioni di direzione (riflettendo la necessità di rileggere

[4] L'analisi completa di tutti i passaggi delle interviste è riportata nella tesi di laurea magistrale di Regola (2023).

alcune parti). Le frazioni più semplici vengono riportate a voce in una forma compatta e convenzionale (“uno su centodieci”); tuttavia, le frazioni più complesse vengono comunicate solo in modo implicito (“questo”); questi differenti comportamenti indicano che la necessità di riorganizzare e ri-verbalizzare quello che viene percepito dalla sintesi vocale può comportare una difficoltà nel gestire mentalmente le varie componenti.

Monica utilizza un display Braille per leggere il codice Latex (per una descrizione più dettagliata si veda Miragliotta et al., 2023). Osservando il modo in cui muove le sue dita, si nota che la lettura coinvolge entrambe le mani, in modo coordinato e strategico: i movimenti rapidi e bidirezionali si soffermano su specifici elementi, che aiutano il riconoscimento delle strutture e la visione globale. Ad esempio, nel leggere l’equazione B, prima le mani scorrono affiancate sul display Braille toccando il contenuto della prima parentesi tonda, poi la mano destra resta ferma sulla parentesi chiusa, mentre la sinistra torna indietro e ripercorre carattere per carattere dentro la prima parentesi, mentre Monica legge ad alta voce il contenuto; quando le mani si ricongiungono, subito la destra scorre in avanti fino alla fine della seconda parentesi, poi la sinistra scorre avanti e indietro sul suo contenuto. Questi gesti suggeriscono che la lettura avvenga in modo funzionale al riconoscimento delle strutture algebriche. È Monica stessa ad affermare, durante l’intervista, di affidarsi a una percezione aptica tramite Braille per riconoscere le strutture.

Silvano legge la matematica con strumenti che ingrandiscono il testo, ma questo restringe il suo campo visivo, limitando la simultaneità tipica della vista. La percezione visiva, nonostante l’ingrandimento, spesso manca di precisione, rendendo incerta la lettura dei caratteri; in matematica questo diventa un problema significativo (come confondere un segno “+” con un “–”), costringendolo a rileggere più volte i vari passaggi. La disabilità di carattere motorio di Silvano limita la sua capacità di muovere le mani, rendendo impossibile, durante l’intervista, qualsiasi forma di produzione scritta. Nel periodo della sua formazione scolastica le sue disabilità erano meno gravi, ma col tempo Silvano si è adattato a risolvere i problemi affidandosi esclusivamente alla manipolazione mentale. Egli afferma che la sua notevole capacità mnemonica è fondamentale nelle sue attività di studio e lavoro quotidiane.

Di seguito riportiamo una sintesi dei procedimenti risolutivi adottati dalle tre persone intervistate, la cui analisi puntuale ha portato alla compilazione della Tabella 1.

5.1. I Processi Risolutivi di Antonio

Antonio sceglie di risolvere la coppia di equazioni (C, X).

Inizia a risolvere l’equazione C, dicendo «vediamo quello che si può ridurre»; quindi, in pochi minuti, riconosce i termini opposti, li cancella e scrive “0=\frac{1}{72}”, definendolo il “risultato”. In seguito, esprime dei dubbi sulla correttezza del procedimento eseguito, si chiede se non fosse meglio calcolare il minimo comune denominatore tra le frazioni.

Mentre rilegge l'equazione X, la sua attenzione è fortemente attratta dalla presenza delle parentesi tonde; dunque, dice: «inizierei dal capire… lavorando sulla parentesi tonda». Inizia ad effettuare numerose manipolazioni all'interno della parentesi tonda (minimo comun denominatore, riscrittura dei numeratori, somma algebrica, semplificazione del numeratore, etc.), finché non riscrive l'intera sotto-espressione come un'unica frazione. Ciascun passaggio viene scritto con l'applicativo "blocco-note", sul quale viene lasciata traccia di tutti i passaggi precedenti.[5] A questo punto, tornando a leggere il primo membro dell'equazione, riconosce la stessa espressione che c'era tra parentesi: «Quindi il risultato è lo stesso di quello che c'era di là, perché è uguale». Dopo aver copiato la frazione ricavata precedentemente al posto della sotto-espressione iniziale, cancella le frazioni uguali nei due termini dell'equazione. Infine, inverte i segni e trova la soluzione.

5.2. I Processi Risolutivi di Monica

Monica sceglie subito di risolvere l'equazione C, mentre motiva la sua scelta, risolve a mente l'equazione, riconoscendo molto rapidamente tutti i termini da semplificare. Nel frattempo, rilegge le altre due equazioni e commenta: «In realtà, ora che ci faccio caso, anche la prima era così, però erano le parentesi che non me lo avevano fatto capire subito». Su richiesta dell'intervistatrice mostra i passaggi per iscritto, tramite un software di compilazione per Latex, quando scrive "0=\frac{1}{72}" dice: «Questa qua è impossibile, cioè non… è falsa proprio».

Mentre legge l'equazione Y (dopo aver letto l'equazione X) riconosce in pochi istanti i termini uguali e trova rapidamente la soluzione. Subito dopo confronta le strutture delle diverse equazioni e ne commenta le somiglianze.

5.3. I Processi Risolutivi di Silvano

Silvano legge lentamente le equazioni e sceglie di risolvere la C, riconosce rapidamente i singoli termini opposti tra loro, ponendosi il problema delle condizioni di esistenza: «[…] e anche meno uno su enne più tre e più uno su enne più tre, sono opposti... per tutti gli enne, diciamo, diversi da meno tre». Conclude che l'equazione è impossibile. Sceglie di risolvere l'equazione Y, anche in questo caso si pone il problema delle condizioni di esistenza, riconosce rapidamente le sotto-espressioni simili, le semplifica mentalmente e trova la soluzione: «a sinistra abbiamo sei più quel… quella stessa quantità […] quindi, x uguale meno sei».

---

[5] Le manipolazioni algebriche e l'interazione con il dispositivo vengono analizzate più nel dettaglio in Maffia et al. (2023).

6. Risultati

Monica e Silvano, seppur usando strumenti differenti, riescono ad orientarsi e muoversi più efficacemente nella lettura del testo, rispetto a quanto non accada per Antonio. Questo sembra riflettersi anche nelle analogie delle strategie risolutive adottate nel ragionamento matematico. Di seguito, presentiamo una descrizione qualitativa delle risposte alle tre interviste. Il dettaglio delle componenti del senso della struttura rilevate nell'intervista è riportato nella Tabella 1 presente in Appendice.

6.1. Intervista ad Antonio

Antonio sceglie di risolvere le equazioni C (senza parentesi) e X (con una sola coppia di parentesi). Sostiene che questa scelta è guidata da considerazioni computazionali (magnitudine delle parti numeriche) più che strutturali. Nel risolvere la prima equazione vengono attuate principalmente strategie strutturali, mentre nella seconda equazione viene attivata una procedura di tipo prettamente manipolativo per svolgere i calcoli interni alla parentesi, conseguentemente, la risoluzione è più lunga e faticosa.

Nel complesso, si rileva la presenza di tutte le abilità legate al senso della struttura, queste, però, non vengono sempre applicate con sicurezza. Nell'analizzare il ruolo delle parentesi tonde, possiamo notare che queste catturano l'attenzione di Antonio, mentre analizza la struttura delle equazioni, sembra però che non lo aiutino a delimitare una sotto-struttura ma, piuttosto, richiamino la regola procedurale sull'ordine da seguire nelle operazioni. In particolare, è bene ricordare che Antonio non era cieco quando ha appreso questo contenuto didattico.

Rispondendo ad una domanda esplicita sul fatto che le parentesi possano aver influito nel riconoscimento della sotto-struttura che racchiudono, Antonio, inizialmente, risponde: «Se vogliamo sì, perché il fatto che fosse limitato, magari, può aver avuto un suo peso nel ricordarmelo», poi specifica: «Sia dalla lettura, sia dalle parentesi. Il fatto che era dentro le parentesi e ci ho lavorato, magari mi ha aiutato. Però sicuramente la lettura è stata principale». Si può ipotizzare che, durante la manipolazione, il necessario ascolto ripetuto della sintesi vocale e la sua continua rielaborazione mentale aiutino a fissare in memoria l'espressione, che poi può essere più facilmente riconosciuta. Solo in seguito a questo riconoscimento si attivano strategie più legate al senso della struttura.

6.2. Intervista a Monica e Silvano

Monica e Silvano scelgono entrambi indipendentemente di risolvere le equazioni C (senza parentesi) e Y (con due coppie di parentesi), questa scelta è guidata da considerazioni strutturali che permettono anche di anticipare rapidamente le soluzioni. Tutte le espressioni vengono svolte in modo efficace e con un ampio uso del senso della struttura: non vengono presi in considerazione il calcolo di denominatori comuni né le manipolazioni interne alle parentesi.

Monica nota le somiglianze strutturali e parla spontaneamente del ruolo che le parentesi hanno nel facilitare/ostacolare il riconoscimento delle sotto-strutture. In particolare, la situazione dove Monica trova più facile riconoscere le sotto-strutture è quella senza nessuna parentesi, la configurazione più sfavorevole, invece, è quella in cui una sotto-espressione è racchiusa tra le parentesi e l'altra no. In quest'ultima configurazione, infatti, sembra attivarsi anche un procedimento manipolativo; infatti, dice: «non è che immediatamente ho pensato 'ah, ok, si toglie la parentesi, si cambia il segno e siamo già a posto…', invece nella terza, quando l'ho letta, mi è proprio venuto in mente subito». Nel primo tipo di equazione (A), la presenza della parentesi rende meno immediata la possibilità di cancellazione e, nel secondo (X), le cancellazioni avvengono tra singoli termini, come se si "aprissero" le parentesi, senza sfruttare la possibilità di cancellare direttamente tutta l'espressione tra parentesi. Nel caso in cui, invece, entrambe le espressioni sono racchiuse tra parentesi, il riconoscimento delle strutture avviene comunque facilmente e non si attivano meccanismi maggiormente procedurali. Quando Monica riflette su questo, descrive l'effetto delle parentesi, come qualcosa che "isola" e, per questo, fa sì che sia meno facile riconoscere la possibilità di semplificare.

Anche Silvano fa delle considerazioni sulle somiglianze strutturali delle diverse equazioni; parla del modo in cui visualizza le varie parti delle espressioni, specificando che leggere ad alta voce il testo lo aiuta a "identificare i pezzi". In particolare, spiega che per lui è più facile farsi un'immagine delle parti tra parentesi, che descrive come "raggruppate". Tuttavia, nel considerare come la presenza o l'assenza delle parentesi influenzi la facilità di risoluzione, dice di preferire il caso in cui non c'è nessuna parentesi, coerentemente con la prima scelta fatta.

7. Discussione

A partire dai dati raccolti discutiamo come gli strumenti utilizzati per l'interpretazione e la risoluzione delle espressioni algebriche influenzino il processo risolutivo delle stesse.

Emergono alcune particolarità, che possono far emergere ipotesi interessanti. In particolare, notando che Antonio svolge il quesito in modo diverso da Silvano e Monica, risulta interessante cercare una spiegazione per questa differenza. Inoltre, rileviamo che le scelte e le valutazioni espresse dalle tre persone intervistate sembrano avere nei confronti delle parentesi un approccio in controtendenza rispetto a quanto descritto da Hoch e Dreyfus (2004).

Va considerato, innanzitutto, che l'ambiente di ricerca potrebbe aver influenzato i comportamenti dei partecipanti, che potrebbero aver adattato le proprie risposte in base alle aspettative immaginate sull'esito del colloquio; quindi, è necessario essere cauti nell'interpretare le cause di questi aspetti specifici.

Da un lato, si può sottolineare lo specifico percorso di formazione degli intervistati, dal quale potrebbero derivare diverse competenze o diversi approcci nella risoluzione di quesiti matematici, che potrebbero riflettersi in una maggiore o minore padronanza del senso della struttura. Tuttavia, queste ipotesi risultano deboli, se si considera il fatto che Antonio dimostra di avere tutte le abilità tipiche del senso della struttura.[6]

7.1. Il Ruolo della Sintesi Vocale

Antonio si differenzia dagli altri due intervistati: nei criteri per la scelta delle equazioni, nell'esigenza di scrivere molti passaggi, nell'approccio tendenzialmente più procedurale. Perciò, il suo caso merita di essere approfondito per spiegare tali differenze.

Il mezzo di accesso all'espressione può essere una variabile rilevante, questo suggerisce di analizzare più nel dettaglio se questo aspetto, per come emerge nelle tre interviste, è in relazione con l'uso del senso della struttura e in che modo può essere coinvolto.

Nel caso di Silvano, nonostante la lettura insicura e parcellizzata, viene acquisita una visione d'insieme in modo abbastanza facile e veloce, specialmente per le espressioni non troppo lunghe; la mobilità del video ingranditore, inoltre, facilita il confronto tra parti distanti dell'equazione.

Monica, esperta lettrice Braille, muove le mani seguendo degli schemi che manifestano strategie sofisticate per cogliere e confrontare le diverse strutture algebriche, specialmente se scritte in Latex, il linguaggio a lei più familiare. La sua lettura è rapida e sicura e si sposta efficacemente tra le diverse parti dell'espressione, permettendole di confrontarle tra loro.

Antonio, sebbene sia un esperto utilizzatore della sintesi vocale, ha bisogno di molto più tempo per leggere e analizzare le equazioni e si muove con più difficoltà tra le varie parti dell'espressione. Ascoltare la pronuncia della sintesi vocale, richiede un tempo maggiore e si può ipotizzare che il modo innaturale con cui avviene la verbalizzazione richieda una rielaborazione, che aumenta il carico cognitivo richiesto; quindi, può risultare particolarmente difficile elaborare una visione strutturale dell'espressione, favorendo un'analisi più computazionale. La lettura unidirezionale della sintesi, da sinistra a destra, rende difficile rileggere parti specifiche e notare le possibili semplificazioni; perciò, questo potrebbe favorire un approccio procedurale/manipolativo e, soprattutto, rendere necessario la scrittura di tutti i passaggi, anche quelli che è possibile svolgere a mente, come supporto mnemonico che alleggerisca lo sforzo cognitivo (cfr. Maffia et al., 2023).

[6] Si veda la Tabella 1 presente in Appendice.

Potremmo, dunque, supporre che il modo in cui si accede all'espressione algebrica influisca significativamente nello svolgimento di un quesito algebrico. Nello specifico, la mancanza di una visione globale potrebbe limitare l'uso efficace del senso della struttura: l'uso di lettore Braille e sintesi vocale potrebbero limitare questa abilità. Ne sono un esempio le azioni di Antonio e Monica, che confrontano i singoli termini e difficilmente confrontano espressioni più complesse. In particolare, Antonio fatica ad attivare efficacemente alcune componenti del senso della struttura, proprio quando sono coinvolte espressioni che richiederebbero di prendere in considerazione simultaneamente parti di testo più ampie. Inoltre, la continua rielaborazione mentale richiesta dalla sintesi vocale può portare a preferire una procedura che permetta di elaborare pochi elementi alla volta, riportandoli accuratamente per iscritto, piuttosto che strategie più sintetiche che, in queste condizioni, possono richiedere un eccessivo carico mnemonico per essere eseguite.

7.2. Il Ruolo delle Parentesi

Tutti e tre gli intervistati hanno scelto di svolgere l'equazione C e lo hanno fatto nel modo più strutturale, al contrario dei partecipanti allo studio di Hoch e Dreyfus.[7] Questa differenza può essere dovuta anche a fattori estranei alle disabilità visive, come il livello di istruzione dei partecipanti, che indubbiamente incide sulla capacità di utilizzare e identificare le strutture algebriche, indipendentemente dalla loro forma. Tuttavia, è plausibile che la presenza delle parentesi giochi un ruolo differente nella percezione dei soggetti con disabilità visive, perdendo il ruolo intuitivo che sembra avere nella popolazione generale nell'identificare le sotto-strutture. Le parentesi, in interazione con la vista, settorializzano lo spazio di lavoro. Evidenziando la struttura in esse racchiusa, permettono allo studente di "vedere" la struttura in altre parti del testo. Tuttavia, ciò non accade in queste interviste.

Tutti e tre i partecipanti della nostra ricerca esaminano il contenuto delle espressioni in modo sequenziale e non hanno una visione globale alla prima lettura. Questo approccio potrebbe rendere particolarmente difficile confrontare sotto-espressioni di lunghezza considerevole; dunque, potrebbe risultare più semplice riconoscere singoli termini uguali, piuttosto che le espressioni incluse tra parentesi. Infatti, Monica e Silvano si dicono entrambi consapevoli del ruolo delle parentesi nel delimitare le sotto-espressioni, ma comunque agevolati dalla loro assenza. Tuttavia, potrebbero esserci delle differenze nel modo in cui i due soggetti intendono la funzione delle parentesi: il primo parla di "raggruppare", mentre la seconda di "isolare".

Guardando al caso di Antonio, inoltre, si nota che in presenza delle parentesi

---

[7] Nell'articolo originale, nessuno dei soggetti coinvolti ha svolto l'equazione C usando il senso della struttura e, in generale, si aveva il maggior uso di senso della struttura nella soluzione delle equazioni con due coppie di parentesi.

viene attivato un approccio procedurale-manipolativo e solo dopo diverse manipolazioni si valutano anche gli aspetti più strutturali. In riferimento a quello che Antonio dice, sul ruolo delle parentesi, si capisce che la manipolazione dell'espressione ha un ruolo rilevante. Si può ipotizzare che la memorizzazione (e conseguentemente il confronto) delle sottostrutture difficilmente avvenga durante la "prima lettura", perché tenere a mente tutti gli elementi dell'espressione richiede un carico cognitivo eccessivo, anche per un'espressione relativamente breve. Potrebbe essere fattibile memorizzare solo alcuni termini, ma a priori è difficile immaginare quali possano rivelarsi poi più utili. Perciò, l'idea di memorizzare e confrontare sotto-strutture potrebbe essere una strategia poco efficace in questo contesto e, di conseguenza, poco sviluppata.

Il fatto che gli intervistati rilevino una difficoltà leggermente maggiore può essere dovuto anche alla forma che assumono le parentesi. Nell'uso di lettori vocali o di tavolette Braille, la parentesi può risultare un carattere aggiuntivo che occupa lo stesso spazio (fisico nel caso del Braille oppure temporale per la sintesi vocale) di qualsiasi altro simbolo; al contrario, nella percezione visiva, le parentesi sono rappresentate da segni particolarmente distinguibili, che occupano lo spazio grafico in modo diverso dagli altri simboli e spesso hanno dimensioni adattate a quelle dei termini racchiusi. La loro apparenza contribuisce a veicolare l'idea di un "contenitore" forse più di quanto suggerito dai simboli Braille o dalla lettura della sintesi vocale (Figura 1).

Figura 1
Simboli per Parentesi Tonde Aperte e Chiuse nel Braille a 6 e 8 Punti

Le tecnologie assistive modificano la forma dei simboli e utilizzano diversi mezzi percettivi, questo potrebbe incidere sulla capacità di trasmettere in modo intuitivo i diversi ruoli e significati che possono assumere le parentesi nei contesti algebrici e, quindi, condizionare il ruolo che queste possono avere nel facilitare o meno l'attivazione di processi risolutivi che coinvolgano più efficacemente il senso della struttura.

8. Conclusione

I risultati della nostra ricerca confermano l'idea che le diverse tecnologie assistive influiscano sui processi cognitivi coinvolti nell'apprendimento della matematica, così come del resto è vero in generale per tutte le tecnologie impiegate nel contesto dell'apprendimento e non solo (Verillon & Rabardel, 1995).

I soggetti non vedenti e ipovedenti da noi intervistati fanno affidamento sul proprio senso della struttura mentre risolvono un compito algebrico. Tuttavia, il modo in cui questo avviene dipende anche da quali strumenti digitali vengono usati per accedere al contenuto algebrico.

In particolare, confrontando le strategie risolutive attuate dalle persone da noi intervistate con i risultati riguardanti la popolazione generale riportati in letteratura, emergono alcune differenze riguardo all'uso delle parentesi e alle situazioni che attivano più facilmente il senso della struttura. Confrontando tra loro i tre soggetti da noi intervistati, notiamo che il tipo di tecnologia assistiva che fornisce l'accessibilità può influenzare le strategie risolutive in un problema di tipo algebrico, come è stato messo in particolare evidenza per la sintesi vocale.

Dal punto di vista dell'insegnamento della matematica, notiamo che, almeno nel caso degli studenti con disabilità visive, va riconsiderato il ruolo che le parentesi possono avere nel facilitare il riconoscimento di sotto-espressioni anche considerando che, soprattutto in caso di utilizzo delle sintesi vocali, la risoluzione di espressioni più lunghe e complesse potrebbe inibire, anziché stimolare, l'utilizzo di strategie meno procedurali.

Le nostre osservazioni suggeriscono che l'indagine sugli aspetti cognitivi coinvolti nell'acquisizione di abilità e competenze matematiche andrebbe estesa ad altri ambiti della didattica matematica (e.g. Del Zozzo & Santi, 2023). Soprattutto quando sono coinvolte tecnologie assistive che attivano diversi canali sensoriali, costringendo a dare una forma diversa agli oggetti matematici, gli aspetti metaforici implicati e la loro interpretazione possono esserne fortemente condizionati (Healey & Fernandes, 2011).

Tra gli aspetti cognitivi più rilevanti, soprattutto nell'uso della sintesi vocale, potrebbero esserci quelli legati al carico cognitivo, che non sono stati indagati nel dettaglio in questo studio, perché non previsti nel design di ricerca, ma la cui influenza sembra emergere dall'analisi che abbiamo fatto e dalla discussione che ne è scaturita.

Più in generale, potrebbe essere opportuno considerare la possibilità che le principali difficoltà incontrate dalle persone con disabilità visive nell'apprendimento della matematica consistano nel fatto che vengono dati per scontati concetti e idee influenzati dall'esperienza visiva e, quindi, bisognerebbe porre un'attenzione critica su cosa appaia più o meno intuitivo in presenza di deficit visivo.

Riferimenti

Alajarmeh, N., Pontelli, E., & Son, T. (2011). From “reading” math to “doing” math: A new direction in non-visual math accessibility. In C. Stephanidis (Ed.), *Universal Access in Human-Computer Interaction. Applications and Services* (pp. 501–510). Springer.

Armano, T., Capietto, A., Coriasco, S., Murru, N., Ruighi, A., & Taranto, E. (2018). An automatized method based on LaTeX for the realization of accessible PDF documents containing formulae. In K. Miesenberger & G. Kouroupetroglou, (Eds.), *Computers Helping People with Special Needs* (pp. 583–589). Springer.

Armano, T., Capietto, A., Maietta, D., Manolino, C., & Sofia, A. (2022). Produzione di documenti digitali accessibili con contenuto scientifico: strumenti inclusivi. In R. Bonino, D. Marocchi, M, Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Atti DI.FI.MA 2021 Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza* (pp. 500–506). Collane@unito.it. Università di Torino.

Ahmetovic, D., Bernareggi, C., Guerreiro, J., Mascetti, S., & Capietto, A. (2019). Audiofunctions. web: Multimodal exploration of mathematical function graphs. In *Proceedings of the 16th International Web for All Conference* (pp. 1–10). https://dl.acm.org/doi/10.1145/3315002.3317560

Bouck, E. C., Weng, P.-L., & Satsangi, R. (2016). Digital versus traditional: Secondary students with visual impairments’ perceptions of a digital algebra textbook. *Journal of Visual Impairment & Blindness, 110*(1), 41–52.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.del Campo, J. E. F. (2000). *L’insegnamento della matematica ai ciechi*. Biblioteca Italiana per i Ciechi “Regina Margherita” ONLUS.

Del Zozzo, A., & Santi, G. R. P. (2023). L’inclusione in matematica come differenziazione per tutti e per ciascuno: Un’interpretazione semiotica. *CEMeR, 13*(2), 68–79.

Healy, L., & Fernandes, S. H. A. A. (2011). The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 157–174.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Atti della 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49–56). IGPME.

Kohanová, I. (2006). *Teaching mathematics to non-sighted students: With specialization in solid geometry* [Unpublished doctoral thesis]. Bratislava.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Maffia, A., Manolino, C., & Miragliotta, E. (2023). Algebraic structure sense in a blind subject. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Atti della 46th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 307–314). University of Haifa & IGPME.

Martínez, C. M., Piorno, J. R., Otero, J. J. E., & Mata-García, M. G. (2022). Responsive inclusive design (RiD): A new model for inclusive software development. *Universal Access in the Information Society*, *22*(3), 893–902. https://doi.org/10.1007/s10209-022-00893-9

Marichal, S., Rosales, A., González Perilli, F., Pires, A. C., & Blat, J. (2022). Auditory and haptic feedback to train basic mathematical skills of children with visual impairments. *Behaviour & Information Technology, 42*(8), 1081–1109. https://doi.org/10.1080/0144929X.2022.2060860

Mellone, M., Pacelli, T., & Liljedahl, P. (2021). Cultural transposition of a thinking classroom: to conceive possible unthoughts in mathematical problem solving activity. *ZDM Mathematics Education*, *53*(4), 785–798. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01256-z

Miragliotta, E., Maffia, A., & Manolino, C. (2023). Figural component in geometrical reasoning: The case of a blind solver. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Atti del 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4467–4474). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1), 45–65.

Papadopoulos, I., & Thoma, A. (2022). Mental brackets and their use by high school students in arithmetic and algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(4), 1197–1218. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10298-y

Pimm, D. (2002). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge.

Piroi, M., Manolino, C., Armano, T., Taranto, E., & Capietto, A. (2023). Teacher professional development via a MOOC on assistive technology for visually impaired students learning mathematics. *Journal of Mathematics Education, 16*(1), 59–78. https://doi.org/10.26711/007577152790164

Regola, S. (2023). *Didattica della matematica per persone con disabilità visiva: Tre casi studio per indagare gli aspetti cognitivi* [Unpublished master’s thesis]. University of Pavia.

Schweikhardt, W., Bernareggi, C., Jessel, N., Encelle, B., & Gut, M. (2006). LAMBDA: A European system to access mathematics with braille and audio synthesis. In K. Miesenberger, J. Klaus, W. L. Zagler, & A. I. Karshmer (Eds.), *Computers Helping People with Special Needs: 10th International Conference* (pp. 1223–1230). Springer.

Tornavacca, E. (2002). *Matematica, visione e patologie visive* [Unpublished master’s thesis]. Università di Torino.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77–101. https://www.jstor.org/stable/23420087

Withagen, A., Kappers, A. M., Vervloed, M. P., Knoors, H., & Verhoeven, L. (2013). Short term memory and working memory in blind versus sighted children. *Research in Developmental Disabilities, 34*(7), 2161–2172. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2013.03.028

Appendice

Tabella 1

Schema che Riassume la Presenza delle Sei Diverse Abilità Specifiche del Senso della Struttura, all'Interno delle Tre Interviste Analizzate

	Antonio	Monica	Silvano
SS1	Frazioni ed equazioni sono viste come entità; l'espressione fra parentesi è inizialmente trattata in modo operazionale.	Sono trattate come entità frazioni, equazioni ed espressioni tra parentesi.	Sono trattate come entità frazioni, equazioni ed espressioni tra parentesi.
SS2	Sono riconosciute le frazioni già incontrate, le espressioni sono riconosciute dopo la manipolazione, ma non durante la lettura.	Sono riconosciute le analogie tra frazioni, espressioni tra parentesi e anche tra le strutture delle equazioni nel loro complesso.	Sono riconosciute le analogie tra frazioni, espressioni tra parentesi e anche tra le strutture delle equazioni nel loro complesso.
SS3	Sono distinte sotto-strutture quali: frazioni, espressioni tra parentesi, membri dell'equazione.	Sono distinte sotto-strutture quali: frazioni, espressioni tra parentesi, membri dell'equazione.	Sono distinte sotto-strutture quali: frazioni, espressioni tra parentesi, membri dell'equazione.
SS4	Gli aspetti relazionali delle strutture sono chiari nel manipolare le frazioni, meno nel risolvere l'equazione.	Sono sfruttati gli aspetti relazionali quando si semplificano gli opposti e nella risoluzione delle equazioni.	Emergono aspetti relazionali nella risoluzione dell'equazione e nella determinazione del dominio di esistenza.
SS5	È riconosciuta la possibilità di ridurre a comune denominatore delle frazioni e di cancellare termini uguali, ma nella seconda equazione questo avviene dopo la manipolazione interna alle parentesi.	Le manipolazioni più efficaci sono svolte con rapidità e sicurezza, condensando in un'unica fase le considerazioni sulla loro possibilità e utilità.	Le manipolazioni più efficaci sono svolte con rapidità e sicurezza, condensando in un'unica fase le considerazioni sulla loro possibilità e utilità.
SS6	Nella prima equazione sono scelte le manipolazioni più utili, nella seconda equazione sono svolte anche manipolazioni non necessarie.		