

L'Apprendimento della Frazione: Suggerimenti Didattici dal Passato

Learning the Fraction: Teaching Suggestions from the Past

Aprendizaje de la Fracción: Consejos Didácticos del Pasado

Silvia Cerasaro

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", Italia

Sunto. *In questo articolo si mostra come l'uomo attraverso la storia sia arrivato ad attribuire al concetto di frazione tutti i significati che le sono stati dati, secondo la classificazione effettuata da Kieren (1975, 1980). Si vuole mostrare come la conoscenza dell'evoluzione del discorso matematico (Sfard, 2015) nel corso della storia abbia permesso un'evoluzione anche nei significati matematici. Ciò è sicuramente utile per riflessioni e considerazioni sulla didattica se si vuole considerare il parallelismo esistente tra lo sviluppo del pensiero nell'uomo a livello psicologico e l'evoluzione storica del pensiero dell'umanità.*

Parole chiave: frazione, apprendimento della frazione, significati della frazione, storia delle matematiche.

Abstract. *This article shows how man throughout history has come to attribute to the concept of fraction all the meanings that have been given to it, according to the classification carried out by Kieren (1975, 1980). We want to show how knowledge of the evolution of mathematical discourse (Sfard, 2015) over the course of history has also allowed an evolution in mathematical meanings. This is certainly useful for reflections and considerations on teaching if one wants to consider the parallelism between the development of thought in man on a psychological level and the historical evolution of humanity's thought.*

Keywords: fraction, learning the fraction, meanings of the fraction, history of mathematics.

Resumen. *Este artículo muestra cómo la humanidad a lo largo de la historia ha llegado a atribuir al concepto de fracción todos los significados que se le han dado, según la clasificación realizada por Kieren (1975, 1980). Se pretende mostrar cómo el conocimiento de la evolución del discurso matemático (Sfard, 2015) a lo largo de la historia ha permitido también una evolución de los significados matemáticos. Esto es ciertamente útil para reflexiones y consideraciones sobre la didáctica si se quiere*

considerar el paralelismo que existe entre el desarrollo del pensamiento en los seres humanos a nivel psicológico y la evolución histórica del pensamiento de la humanidad.

Palabras clave: fracción, apprendizaje de la fracción, significados de la fracción, historia de las matemáticas.

1. I Riferimenti sullo Studio delle Frazioni nella Scuola Italiana

Come insegnante nella scuola secondaria di primo e secondo grado, ho potuto constatare personalmente le difficoltà che hanno gli studenti in merito all'apprendimento della frazione, confermato nel mio ruolo di ricercatore e formatore attraverso il confronto con altri insegnanti e dalla lettura dei risultati riportati dalle prove nazionali Invalsi. Il concetto di frazione è fondamentale già nel primo ciclo dell'istruzione, per proseguire fino alla Scuola Secondaria di Secondo Grado. Infatti, leggendo i documenti ministeriali riguardanti l'insegnamento dell'oggetto matematico in questione, si trova quanto segue.

- Nei Traguardi dello sviluppo al termine della scuola Primaria:

(L'alunno) riconosce ed utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione.)

In particolare, alcuni degli “Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria” sono:

Leggere, scrivere e confrontare numeri decimali;

Operare con le frazioni e riconoscere frazioni equivalenti;

Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.

- Nei “Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado” per Matematica:

L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.

Nello specifico, dagli “Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado”, ci si prefigge che l'alunno sappia:

Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri conosciuti (numeri naturali, numeri interi, frazioni e numeri decimali), quando possibile a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo e valutando quale strumento può essere più opportuno;

Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta;

Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella

forma decimale, sia mediante frazione. Utilizzare frazioni equivalenti e numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale in diversi modi, essendo consapevoli di vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni;

Eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni.

- Dagli “Obiettivi specifici dell’Apprendimento”, sia per i Licei che per gli Istituti Tecnici e Professionali, relativamente al primo biennio, nella sezione “Aritmetica e Algebra” è riportato:

Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale.

Nel nostro sistema scolastico, lo studio effettuato nell’ordine precedente funge da prerequisito che permette di conseguire un nuovo apprendimento in quello successivo e dà la possibilità di “sistemarlo” laddove ci sia una lacuna nella comprensione. Negli oggetti matematici presi in considerazione dagli estratti delle Indicazioni intervengono tutti i significati che oggi vengono attribuiti alle frazioni secondo la classificazione effettuata da Kieren nel 1975 e ripresa in un altro suo lavoro del 1980 (Kieran, 1975, 1980). La frazione risulta avere, secondo lo studioso, i seguenti significati: parte/tutto, rapporto, operatore, quoziente, misura.

- La frazione come relazione parte dell’intero (parte/tutto) si riferisce alla ripartizione di un oggetto e alla relazione tra una parte della ripartizione e l’intero ripartito.
- La frazione come rapporto indica la relazione tra due grandezze aventi una misura comune, che si ripete un certo numero di volte in ciascuna di esse.
- Dati un rapporto e una grandezza, la frazione come operatore permette di determinare un’altra grandezza che abbia il rapporto stabilito con quella data.
- Il concetto di frazione come quoziente è correlato a quello di parte/intero e rappresenta il risultato di una divisione.
- Il concetto di frazione come misura è correlato anch’esso a quello di parte/tutto ed esprime quante parti dell’intero (che corrispondono ad un multiplo dell’unità frazionaria) vengono prese in considerazione per “coprire” l’intero considerato.

Figura 1

I significati della Frazione secondo Kieren (1975)



Gli studenti usano e leggono la stessa simbologia nel considerare tutti gli aspetti appena descritti, per cui risulta essere polisemica. Da quanto sappiamo dalle neuroscienze, davanti ad un simbolo, il nostro cervello attua tre processi: la visualizzazione, la comprensione e l'elaborazione della risposta. Il processo di comprensione, che avviene andando ad analizzare aspetti già conosciuti e “archiviati”, può essere articolato anche perché influenzato dalle emozioni (Dehaene, 2009), per cui elaborare una risposta non sempre è una fase lineare perché strettamente collegata alla fase precedente. Alla luce di queste informazioni, ritengo che attribuire il giusto significato allo stesso simbolo $\frac{a}{b}$ sia un processo delicato da educare, e ciò è possibile se ognuno di essi viene definito come un oggetto matematico differente dall'altro ottenuto con una procedura distinta dalle altre (Sfard, 1991). Ritengo che l'apprendimento di tutti i significati attribuiti alla frazione possa essere facilitato dall'attuazione di un percorso storico che ne renda evidenti le origini. Lo studio generale sulle frazioni, con cenni alla sua storia e tutti i significati che sono utilizzati solitamente a scuola, è stato affrontato anche da Fandiño Pinilla et al. (2005).

2. Riferimenti Teorici sulle Difficoltà nello Studio delle Frazioni

C'è una storica e ricorrente difficoltà di apprendimento del concetto di frazione, ed è testimoniato da studi accademici, anche non recenti. Poincaré, (1899) prima di parlare delle difficoltà riguardo la comprensione della frazione e di altri oggetti matematici, fa le seguenti considerazioni sull'apprendimento, scrivendo:

Gli zoologi sostengono che lo sviluppo embrionale di un animale riassume in brevissimo tempo l'intera storia dei suoi antenati a partire dalle ere geologiche. Sembra che lo stesso sia vero per lo sviluppo della mente. Compito dell'educatore è quello di far ripercorrere nella mente del bambino ciò che ha attraversato quella dei suoi padri, percorrendo velocemente alcune tappe ma non eliminandone

nessuna. Per questo motivo, la storia della scienza deve essere la nostra guida. (Traduzione dell'autore di Poincaré, 1899, p. 159)

Egli, proprio a causa di tale pensiero, suggerisce di analizzare il numero razionale dal punto di vista storico, mostrandone le origini per arrivare alla sua attuale definizione; per lo studioso solo in tal modo è possibile comprenderne il significato matematico, contrariamente a quanto pensa lo studente, che si illude di conoscere il significato di un numero razionale quando è in grado di effettuare dei conti meccanici con essi. Emma Castelnuovo (1963), afferma di aver constatato difficoltà nella comprensione delle frazioni negli alunni cercando di darne la seguente giustificazione, in continuità con il pensiero di Poincaré descritto precedentemente:

L'insegnamento che teniamo sulle frazioni si distacca troppo presto dal concreto per formalizzarsi; il bambino si adagia sul meccanismo, perde il senso del valore di ogni simbolo e del perché delle operazioni, e, nel momento in cui è invitato a rientrarvi, non ci riesce se non lo portiamo di nuovo a concretizzare. (Castelnuovo, 1963, p.126)

Già nel 1952 riporta in un suo libro (Castelnuovo, 1952), uno studio di Piaget sulla difficoltà di apprendimento delle frazioni proprie nei ragazzi dagli 11 ai 14 anni. In particolare, analizza le difficoltà degli studenti individuandone due tipi: il primo di ordine visivo, il secondo, invece, di ordine psicologico. In merito, la studiosa scrive:

Mi pare che le difficoltà che si incontrano nel concetto di frazione sul piano concreto debbano attribuirsi a due fattori:

La frazione $\frac{m}{n}$ porta a fissare l'attenzione, su tre punti contemporaneamente: la frazione $\frac{1}{n}$, la somma delle m parti, l'intero. Questa contemporaneità di pensiero obbligando a una sintesi, determina un notevole sforzo da astrazioni; è una difficoltà di ordine visivo.

La frazione $\frac{m}{n}$ ha, pur limitandosi sempre al campo concreto, due significati: l'atto operativo dividere l'intero in n parti e prenderne m ; il risultato dell'operazione $m:n$. Questo duplice aspetto porta ad una difficoltà di ordine psicologico. (Castelnuovo, 1952, p. 74)

Secondo Castelnuovo, queste difficoltà erano state riscontrate anche dagli antichi, che per evitare le frazioni, di cui non avevano un simbolo, ricorrevano alla somma di frazioni unitarie, proponendo di presentarle alla stessa maniera anche nei bambini. La studiosa continua la sua analisi sulle difficoltà nelle operazioni con le frazioni: ad esempio, relativamente alla moltiplicazione, afferma che gli studenti la svolgono usando una formula appresa in maniera meccanica, senza comprenderne il significato, che invece, può essere spiegato geometricamente, suggerendo quindi, come in tutti i casi da essa analizzati, una strategia che potesse facilitare l'apprendimento degli studenti.

Dallo studio di Carpenter e colleghi (1980) è stata confermata la difficoltà nelle operazioni di somma e differenza di frazioni, causate da mancata comprensione del concetto di frazione equivalente; si sono riscontrate anche difficoltà sul significato di frazione impropria come somma di un intero e una frazione propria. Solo il 40% dei diciassettenni ha realmente appreso le procedure di calcolo con le frazioni. Un altro studio degli stessi anni (Hart, 1981) mostra ancora la difficoltà negli studenti di operare con le frazioni, oltre alla confusione nella comprensione dei concetti di rapporto e proporzione. Gli studenti, nella scelta di opportuni esercizi, evitano quelli che coinvolgono l'utilizzo delle frazioni.

Sfard (1991) in un suo studio degli anni 90, in cui parla delle difficoltà di apprendimento in matematica, allude, negli esempi proposti, alle criticità legate all'apprendimento del numero razionale. Esso è visto sia come *oggetto concettuale*, formato da una coppia di numeri opportunamente definiti, che come risultato di un *processo algoritmico*, ovvero della divisione tra due numeri interi. La difficoltà nella comprensione del significato del numero razionale è insita in questa dualità tra oggetto e processo matematico in quanto il primo rappresenta un ente finito e statico, mentre il secondo ha un aspetto dinamico di tipo procedurale. Superare questa dicotomia significherebbe favorirne l'apprendimento e per questo consiglia di procedere secondo il percorso storico che ha portato la nascita dell'oggetto matematico, cioè mostrare come sia scaturito dal processo algoritmico, per poi definirlo come un oggetto “nuovo” da usare in altri contesti. Nel suo studio del 2015 relativo alla spiegazione del ruolo della comunicazione nell'apprendimento della matematica, sia nel contesto storico-culturale dell'uomo che a livello individuale, Sfard vuole mostrare attraverso un esempio che le attività umane legate alla comunicazione sono co-costruttive (Sfard, 2015). L'esempio che fa riguarda il discorso numerico, dal confronto delle quantità all'assiomatica dell'aritmetica del ventesimo secolo. La studiosa afferma che i nostri antenati hanno avuto esigenza di quantificare dopo aver confrontato due diversi insiemi di elementi. L'utilizzo del discorso numerico originato dalla quantificazione è divenuto frequente ed utilizzato in diversi contesti, tanto da permettere di arrivare al concetto di rapporto euclideo e alla ricerca di una misura comune. Solo nel periodo medievale, dal concetto di rapporto e dal confronto di rapporti (proporzione) si arriva al numero razionale, che garantisce sempre l'esistenza del quarto proporzionale, permettendo di considerare una coppia di numeri per poterlo definire come un oggetto a sé stante: è stato proprio questo nuovo discorso numerico a permettere una ulteriore innovazione fino ad arrivare al discorso numerico utilizzato oggi. Ho trovato in questo esempio una conferma nella mia visione di presentare il concetto di numero razionale e della sua aritmetica sia agli insegnanti in formazione che agli studenti: l'evoluzione del discorso matematico nella storia permette di comprendere l'evoluzione dell'oggetto matematico garantendo una riflessione che Sfard definisce a *livello*

meta, in grado di causare un conflitto, paragonabile allo *choc culturale* e al *dépaysement* di cui parla Barbin (1997, 2022),¹ e che si risolve attraverso l'utilizzo di mediatori, procedendo per esplorazioni, e ricercando nuove narrazioni approvate.

È particolarmente interessante lo studio “Intercultural dialogue and the geography and history of thought” (Bartolini Bussi, et al., 2014) in cui si nota una differenza nel movimento di scrittura della frazione in alcuni paesi asiatici: gli studiosi hanno notato che essa viene scritta a partire dal denominatore, per poi indicare quante parti di esso vanno riportate nel numeratore, ipotizzando che fosse, con grande probabilità, il modo utilizzato prima dell'insediamento degli Inglesi, che imposero la loro cultura. Si fa notare che questa modalità di scrittura viene descritta nel Liber Abbaci di Leonardo Pisano, il trattato di aritmetica che portò nel mondo occidentale le novità della matematica indo-arabica, ovvero le figure indiane, le frazioni e il pensiero pre-algebrico. Nel corso dei secoli, però, la modalità di scrittura è stata influenzata dalla cultura occidentale, arrivando a descrivere una frazione come lo facciamo oggi. Questa, effettivamente, potrebbe rappresentare una ulteriore difficoltà di apprendimento, perché «*How do you know how many pieces you wish, if you do not know in how many pieces you have cut the whole?*».² In quest'ultimo esempio, si può notare come la storia, in particolare la fonte storica, risulti essere un mediatore dell'apprendimento: in particolare, il movimento di scrittura originario della frazione può essere visto anche come un mediatore visivo. L'utilizzo di mediatori visivi presentati come artefatti da manipolare è descritto in diversi studi riguardo le difficoltà di apprendimento delle frazioni, in cui vengono suggerite particolari strategie da adottare. Ad esempio, con le *Frazioni sul filo* (Robotti, 2016) si cerca di superare le difficoltà di apprendimento delle frazioni utilizzando come unità frazionarie delle strisce di carta, la cui lunghezza permette di comprendere meglio il significato di frazione come quoziente non risolto, e quindi come numero da posizionare sulla retta dei numeri. In questo studio, l'autrice sottolinea anche le difficoltà degli insegnanti in merito al processo di insegnamento-apprendimento del concetto di frazione, problematica riscontrata in un ulteriore studio riguardante la formazione degli insegnanti. In particolare, faccio riferimento ad uno studio di Clark e suoi collaboratori (Clark, et al., 2003) riguardo la relazione tra il concetto di rapporto e frazione secondo docenti in formazione, dal quale sono emerse difficoltà in merito alla relazione tra questi due concetti: alcuni docenti asseriscono che l'insieme dei rapporti è un sottoinsieme di quello delle frazioni, mentre, per altri l'insieme delle frazioni è un sottoinsieme di quello dei rapporti. Per alcuni risultano lo stesso insieme,

¹ Il *dépaysement* o disorientamento è l'effetto causato dalla trattazione storica di un argomento matematico in quanto vengono messi in discussione gli apprendimenti precedenti, riletti attraverso quanto appreso con la storia delle matematiche, permettendo un adattamento e una sistemazione di essi.

² Domanda posta ai ricercatori da uno degli intervistati nello studio Bartolini Bussi et al., 2014.

per altri due insieme disgiunti, per altri ancora i due insieme hanno intersezione non vuota. Lo studio rileva che questa relazione non ben definita tra i due concetti, unite alle definizioni poco precise presenti sui libri di testo, abbia influenzato la costruzione errata dei due significati matematici negli studenti.

Tutte le considerazioni fatte mi hanno convinto a trattare il numero razionale, attraverso la sua evoluzione storica: il metodo storico non usa la storia come narrazione, ma come procedimento e metodologia di insegnamento e permette una meta cognizione dei propri apprendimenti, a favore del processo di insegnamento-apprendimento. In particolare, se proposta nei corsi di formazione per docenti, può offrire opportunità di riflessioni epistemologiche in verticale (Barbin, 1997), cioè per significati attribuiti ai singoli concetti e scaturisce dalla lettura in chiave educativa (Guillemette & Radford, 2023) della fonte diretta, affinché il docente abbia chiaro come si sia sviluppato il significato del numero razionale e ne possa tenere in considerazione nella sua attività di insegnamento, non necessariamente improntata sul metodo storico.

3. Le Frazioni Egizie: Frazione come Parte/Tutto e Misura

Il concetto di frazione come relazione parte/tutto è il primo con cui si viene a contatto a scuola poiché si comprende in maniera intuitiva attraverso la manipolazione di materiali, che ne danno una concettualizzazione visiva: quante parti di pizza o di cioccolata sono state nominate dagli insegnanti nelle aule delle scuole al riguardo! L'esigenza di dividere un oggetto in tante parti uguali e di prenderne alcune è emersa da molto presto nel corso della storia dell'umanità, ad esempio dividendo un campo per il numero di eredi, o una quantità di cibo per i commensali. Dalla lettura del Papiro di Rhind (Giacardi & Roero, 2010), una delle operazioni più richieste era dividere un numero m di pani o grani per n uomini: la quantità $\frac{m}{n}$ non veniva immaginata come numero, cioè non rappresentava un quoziente. Secondo Castelnuevo (1963), questa tipologia di problemi

ci attestano che l'umanità non poteva continuare a vivere utilizzando solo i numeri interi. Il matematico incognito, autore del papiro, aveva cercato di venire incontro ai bisogni delle società elencando un certo numero di problemi che potevano adattarsi alla risoluzione delle varie questioni. Ed era stato necessario prospettare tante eventualità perché l'autore, pur avendo, caso per caso, risolto il problema, aveva sempre cercato di evitare il simbolo di frazione sostituendolo con una somma di unità frazionarie: egli non aveva pertanto intuito una legge generale, non era cioè arrivato a considerare la frazione come numero. (Castelnuevo, 1963, p. 35)

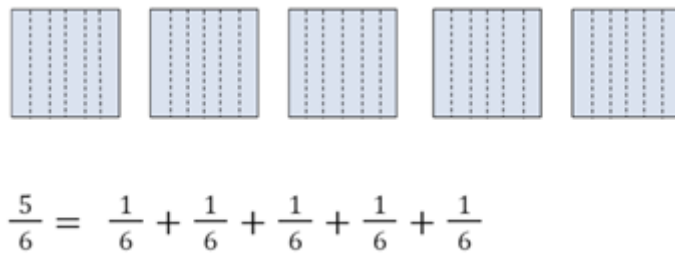
Le regole per la scrittura di una frazione come somma di frazioni unitarie, operazione chiamata *disgregazione*, sono state riportate da Leonardo Pisano Fibonacci all'interno del Liber Abbaci, in quanto tradizione radicata nella cultura araba, e risultano essere il modo più “equo” ed “economico” di scrivere

una frazione unitaria (Cerasaro & Tomassi, 2023). In questo modo si mette in evidenza anche il concetto di frazione come misura, se si considera $\frac{m}{n}$ come un multiplo m della frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (che rappresenta la scrittura in somma di frazioni unitarie più banale poiché $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$ per m volte). Quindi, la scrittura di una frazione come somma di frazioni unitarie permette di concentrare l'attenzione sul significato parte/tutto e come misura e ciò può essere notato nei primi sei problemi presenti sul papiro di Rhind, simili al seguente: *Dividere 5 pani per 6 persone*.

Questa attività può essere proposta agli studenti, utilizzando 5 fogli anziché pani, da dividere in modo equo tra 6 di loro. Gli studenti che hanno svolto questa attività nelle mie esperienze d'aula hanno presentato due diverse soluzioni: nella prima, sono stati effettuati 25 tagli in totale sui 5 fogli, che hanno permesso a ciascuno dei 6 studenti di avere 5 strisce di carte uguali da $\frac{1}{6}$.

Figura 2

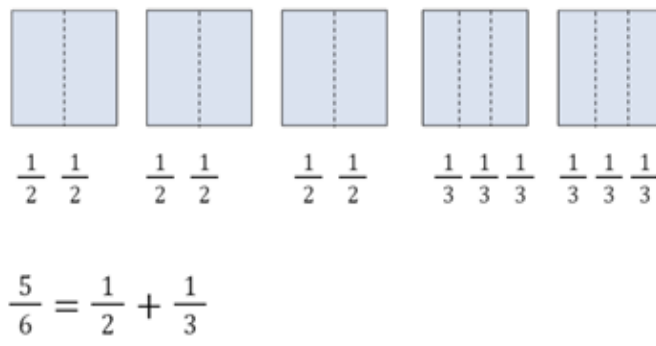
Divisione di ciascun foglio in sei parti



Nella seconda soluzione, sono stati effettuati, invece, soli 7 tagli, grazie ai quali ciascuno dei 5 studenti ha potuto avere una striscia di carta da $\frac{1}{2}$ e una da $\frac{1}{3}$.

Figura 3

Divisione a metà dei primi tre fogli ed i restanti in terzi



Gli studenti hanno focalizzato l'attenzione sull'atto pratico di considerare le frazioni unitarie, più semplici da pensare rispetto ad una frazione propria, e hanno potuto constatare che è più “veloce” rappresentare $\frac{5}{6}$ nel secondo caso poiché intervengono poche frazioni unitarie (due) rispetto al caso precedente (cinque). Per esprimere una frazione come parte/tutto è stato sfruttato il significato di frazione come misura, avendo ripartito la quantità a disposizione attraverso diverse suddivisioni, fino a ricoprirla con misure differenti.³

4. Il Rapporto: Significato della Frazione Presente negli Elementi di Euclide

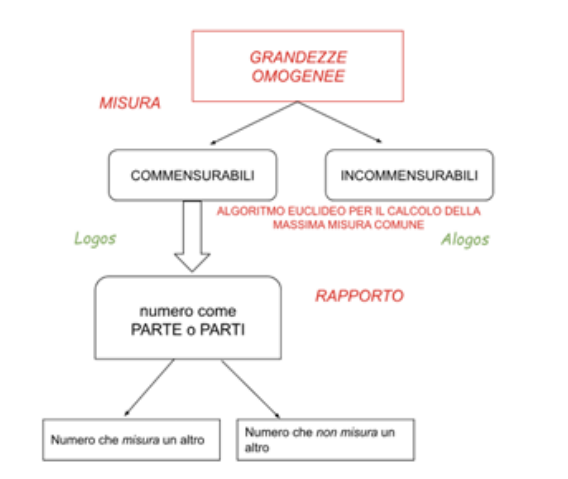
Nel periodo demotico, la cultura egiziana esercitò una notevole influenza su quella greca (Russo, 2001). Nella matematica ellenistica il concetto di frazione è legato alla frazione unitaria, come nell'antico Egitto. Negli Elementi di Euclide compaiono i termini *metà*, *terza parte*, *ecc.*, per indicare la divisione dell'intero in n parti, per poi considerarne solo una: quindi, usando il linguaggio attuale, compaiono frazioni del tipo $\frac{1}{n}$. Affermare che nella matematica ellenistica un rapporto tra grandezze indica un numero razionale, come avviene attraverso un'interpretazione algebrica o aritmetica di tutta l'opera, è anacronistico ed errato in quanto non si tiene conto del pensiero filosofico e scientifico del periodo storico preso in riferimento (Grattan-Guinness, 1996). Ad esempio, Euclide nella proposizione XII.10 dimostra che il cono con la stessa base e altezza di un cilindro è un terzo del cilindro. Archimede, in seguito, riuscì a trovare il rapporto tra una sfera e il cilindro circoscritto, che Euclide non era riuscito a trovare, concludendo che la sfera era 4 volte la terza parte del cilindro. Oggi, se volessimo scrivere tale rapporto, facendo spontaneamente ricorso all'interpretazione aritmetica, useremmo, senza pensarci, la frazione $\frac{4}{3}$ che, però, non era contemplata né negli Elementi di Euclide né nella matematica utilizzata da Archimede: il simbolo della frazione (usato in maniera forzata in tale contesto poiché non ancora introdotto nel linguaggio matematico del periodo) in questo caso indica un rapporto, concetto fondamentale nell'opera euclidea, che ancora non rappresenta affatto un numero. I protagonisti degli Elementi di Euclide, infatti, sono le *grandezze*, la *misura* e il *rapporto*: tali oggetti sono in relazione tra loro in quanto la misura è un attributo della grandezza stessa mentre il rapporto è la relazione tra le misure dello stesso tipo. Nella visione algebrica e aritmetica degli Elementi di Euclide, la grandezza e la sua misura sono confuse, risultano un numero con il quale svolgere tutte le

³ Per scrivere la frazione $\frac{m}{n}$ come somma di frazioni unitarie si divide m per n . Si dividono q interi (con $q \leq m$) in n_1 parti, considerandone n , con $n_1 \cdot q < m$. Si itera il procedimento sulla quantità $\frac{m}{n} - \frac{1}{n_1}$ fin quando la differenza non sarà uguale a 0.

operazioni, in maniera impropria. Con l'interpretazione aritmetica, c'è una trattazione per analogia del numero alla grandezza geometrica, ma ci sono delle sostanziali differenze in quanto Euclide non moltiplica mai una grandezza per un'altra, ma moltiplica i numeri, dando la definizione di prodotto nel VII libro;⁴ dati due numeri, si sommano, il minore si sottrae dal maggiore, si moltiplicano ma non si dividono, come afferma la visione algebrica: un numero minore *misura* o *non misura* il maggiore. In Euclide le grandezze omogenee, attraverso l'operazione di misura, vengono distinte in "commensurabili" e "incommensurabili": questa distinzione è il risultato dell'applicazione dell'algoritmo euclideo per il calcolo della massima misura comune basato sull'operazione di divisione successive. Se tale procedimento ha termine si hanno le prime grandezze, nel caso in cui non abbia termine si hanno le seconde. Se due grandezze sono commensurabili, tra loro esiste un certo *logos* (rapporto), mentre se sono incommensurabili un *alogos*, cioè, c'è un'assenza di rapporto. Questi concetti, attribuiti inizialmente alle grandezze a partire dal quinto libro, sono estesi al numero, nel settimo libro, che per Euclide è una collezione di unità. Per comprendere in che rapporto sono due numeri (commensurabili), si distingue un numero come "parte" o "parti" di un altro numero: un numero è parte di un altro quando lo misura perfettamente,⁵ mentre è parti di un altro quando non lo misura.⁶

Figura 4

Schema sintetico sul settimo libro degli Elementi di Euclide



⁴ Def. VII.15. Si dice che un numero moltiplica un altro numero quando quest'ultimo viene sommato tante volte quante sono le unità del primo.

⁵ Def. VII.3. Un numero è una parte di un numero, il minore del maggiore, quando misura il maggiore.

⁶ Def. VII.4. Ma parti quando non lo misura.

Da questa distinzione si comprende cosa sia un rapporto in Euclide, ovvero un discorso sulla relazione tra due numeri: il numero 3 è parte di 12 perché lo misura quattro volte, il numero 4 è parti di 18 perché non lo misura ma è, ad esempio, 2 volte la nona parte di 18.

Questo concetto assume un importante ruolo in didattica per chiarire la corrispondenza tra rapporto e frazione (Cerasaro, 2024). Se si vuole descrivere il rapporto tra due numeri m ed n , viene richiesto agli studenti di esprimere ciascuna delle parti di m come la sua q -sima parte, e vedere se quest'ultima misura n , specificandone il numero di volte. Tornando al numero 4 come parti di 18, analizziamo tutti i modi per poter definire il loro rapporto, partendo da ciascun numero che costituisce una parte di 18 (1, 2, 3, 6, 9). Si fa notare, che per indicare l' q -sima parte di 18 si utilizzerà la linea di frazione, scrivendo $\frac{18}{q}$, che indica una divisione avente come risultato numero intero.

- 1 è la diciottesima parte di 18 ($\frac{18}{18}$), allora 4 è 4 volte la diciottesima parte di 18 ($4 = 4 \times \frac{18}{18}$);
- 2 è la nona parte di 18 ($\frac{18}{9}$), allora 4 è 2 volte la nona parte di 18 ($4 = 2 \times \frac{18}{9}$);
- 3 è la sesta parte di 18 ($\frac{18}{6}$);
- 4 non può essere espresso come multiplo, secondo un intero, della sesta parte di 18, in coerenza con gli Elementi di Euclide;
- 6 è la terza parte di 18 ($\frac{18}{3}$), 4 non può essere espresso come multiplo, secondo un intero, della terza parte di 18, in coerenza con gli Elementi di Euclide;
- 9 è la metà di 18 ($\frac{18}{2}$), 4 non può essere espresso come multiplo, secondo un intero, della metà parte di 18, in coerenza con gli Elementi di Euclide.

Con questa tipologia di esercizio, ispirata alla matematica euclidea, si riesce a comprendere che il rapporto è un discorso che definisce la relazione tra due numeri, dove uno numero è espresso come parti di un altro.

5. I Numeri Rotti: la Frazione come Quoziente

Durante il periodo romano, le frazioni ancora non rappresentavano quello che oggi chiamiamo numero razionale, ma una suddivisione di una determinata quantità. Proprio per questo motivo le frazioni indicavano l' n -sima parte dell'intero, tipicamente frazionato su una base duodecimale ed erano usate nell'agrimensura e nella misura del peso. Le frazioni unitarie considerate erano quelle da $\frac{1}{2}$ fino a $\frac{1}{288}$ e ad ognuna corrispondeva un nome e un simbolo specifici, molto diversi dalle attuali notazioni. Le frazioni più usate oggi sarebbero scritte come $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ ed erano ancora legate ai significati di parte/tutto e di

misura (Yeldham, 1927). Il concetto di rapporto veniva largamente utilizzato nel periodo medievale, come è testimoniato da Boezio (Guillaumin, 2012) nelle opere *De Institutione Arithmetica* e nel *De Institutione Musica*. In esse si considerano ancora i soli numeri interi, legati attraverso il rapporto (*proportio*) e la proporzione (*proportionalitas*). Con la circolazione delle prime traduzioni delle opere provenienti dal mondo arabo, si ebbe una graduale diffusione del sistema di numerazione posizionale, che utilizzava le figure indo-arabiche: nel 1202 comparvero le frazioni come riportate nel Liber Abbaci di Leonardo Pisano, detto Fibonacci. A partire dal quinto capitolo del trattato, viene descritta per la prima volta la frazione, specificando il ruolo del denominatore, del numeratore e della lineetta che li separa: comparve, quindi, per la prima volta nella storia, il simbolo in uso ancora oggi, accompagnato da una dettagliata descrizione.

Quando su un qualsiasi numero sia stata tracciata una qualche lineetta, e sopra la stessa lineetta sia stato scritto un qualunque altro numero, il numero superiore indica la parte o le parti del numero inferiore; infatti il numero inferiore è chiamato denominato [denominatore] e quello superiore è chiamato denominante [numeratore]. (Traduzione a cura di Progetto Fibonacci del Liber Abbaci, in Boncompagni, 1857, p. 24)

Fibonacci nel suo trattato, senza darne esplicita definizione, chiama la frazione numero *ruptus, minutus o fractus*, cioè “rotto” perché si ottiene rompendo un numero intero, “minuto” o piccolo relativamente al valore, “fratto” per indicare il taglio fatto dall’intero per ottenerlo. Questi aggettivi si collegano ai significati di parte/tutto e misura sinora incontrati nel percorso storico. La novità sta nella collocazione di questo concetto all’interno del Liber Abbaci: Leonardo prima mostra le nove figure indiane, unite al “nuovo” segno, lo zero, e poi parla di tutte le operazioni aritmetiche che si fanno con esse, cioè mostra il funzionamento del sistema posizionale. Dopo aver descritto la divisione, il matematico pisano introduce il concetto di frazione perché collegato al resto della divisione tra due numeri: Fibonacci esprime il risultato come la somma di un quoziente intero ed un resto frazionario. Proprio per spiegare la natura del resto, introduce il numero rotto: per la prima volta nella storia, essendo ora la frazione un numero, vengono descritte tutte le operazioni che si fanno con esso, avendo adattato tutta la teoria euclidea dei rapporti al concetto di frazione, come era avvenuto già nel mondo arabo, nel corso dei secoli. La frazione ha assunto, quindi, il significato di un quoziente non risolto. Dal punto di vista didattico, gli studenti possono esprimere il resto di una divisione come una parte intera unita a quella frazionaria: in tal modo si riesce sia a comprendere che la frazione $\frac{m}{n}$ è il risultato della divisione $m:n$, sia che una frazione ha una posizione sulla retta dei numeri. Infatti, se il quoziente di tale divisione è q ed il resto è r , si capirà che la frazione $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$.

6. La Frazione come Operatore

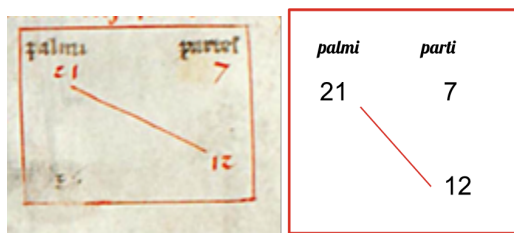
All'interno del Liber Abbaci e di tutti i trattati d'abaco successivi, ispirati ad esso, la frazione, che ora rappresenta anche il numero razionale, garantisce sempre l'esistenza del quarto termine proporzionale dati 3 numeri, con i primi due in un dato rapporto. Euclide, nei suoi Elementi, nelle proposizioni 16-17-18-19 del IX libro elenca delle condizioni affinché possano esistere il terzo e quarto proporzionale, facendo intendere che sono solo numeri interi. Con la matematica araba, data la proporzione $a:b=c:d$, il termine d esiste sempre ed è il numero razionale $\frac{b \times c}{a}$, dove a non divide necessariamente il prodotto $b \times c$. Questa novità permette di utilizzare un metodo, chiamato *regola del tre* o *della falsa posizione*, sfruttato per la risoluzione di molti problemi riguardanti questioni che potevano trovarsi nella vita dell'epoca, con lo stesso scopo didattico con cui venivano descritti i problemi nel Papiro di Rhind. È proprio all'interno di questi problemi che compare la frazione come operatore, ovvero, utilizzata per calcolare una relazione con una data quantità. Ad esempio, si legge:

C'è un albero, $\frac{1}{4} \frac{1}{3}$ del quale sta nascosto sotto terra, corrispondente a 21 palmi: si chiede quale sia la lunghezza di quell'albero (Traduzione del testo di Boncompagni, 1857, p. 173, XII.3.1).

In questo problema, che Leonardo risolve con la regola del tre, è presente la frazione come operatore ($\frac{1}{4} \frac{1}{3}$ di una quantità sconosciuta è 21): si nota ancora che la frazione è scritta come somma di frazioni unitarie, che corrispondono a $\frac{7}{12}$, che è l'operatore in questione. Calcolare $\frac{7}{12}$ di una quantità generica, che chiamiamo x , e dire che è 21 significa calcolare il quarto termine incognito della proporzione $7:12=21:x$, scrittura non presente sui testi dell'epoca, dove invece compare un diagramma risolutivo (Figura 5) utilizzato per la risoluzione di tutti i problemi di questa tipologia (Tomassi, 2023).

Figura 5

Diagramma utilizzato per la regola del tre, utilizzato per indicare una proporzione e sua ricostruzione



Gli studenti possono cimentarsi nella lettura del problema illustrato, che rappresenta la parte iniziale di quello descritto da Leonardo Pisano, tentando di

darne una soluzione in base alle loro conoscenze pregresse. In un secondo momento, potrà essere analizzato nella versione completa, contenente anche il procedimento risolutivo appena sintetizzato, prendendo in esame il diagramma proposto dall'autore. L'esempio descritto può far riflettere gli studenti sul concetto di frazione come operatore: esso resta individuato all'interno di un *analogos*, ovvero di una proporzione, intesa come scrittura di due rapporti equivalenti.

Abu-l-Wafa, matematico persiano attivo alla fine del decimo secolo, traduttore di Euclide e di Diofanto (Youschkevitch, 1976), nel suo *Libro sull'aritmetica necessaria agli scribi e ai mercanti* per definire le frazioni, fa uso della nozione euclidea di rapporto e di proporzione (def. V.5) e osserva che vi sono tre tipi di rapporto tra i numeri:

- quello dal più piccolo al più grande;
- quello dal più grande al più piccolo;
- quello tra due numeri uguali.

Tutta la prima parte del libro è dedicata al processo della “messa in rapporto di due numeri” e cioè, l'atto di esprimere i rapporti attraverso delle frazioni, che è l'elemento che attira principalmente la sua attenzione dal momento che questo procedimento veniva usato dai commercianti dell'epoca. Questo testimonia come, nell'aritmetica araba, il rapporto comincia ad essere denotato con la scrittura di una frazione.

7. La Frazione nei Secoli Successivi

Con l'introduzione delle frazioni nel mondo europeo grazie alla matematica araba, diffusa nel mondo cristiano per opera di Fibonacci, c'è stata un'evoluzione anche nel pensiero filosofico, accompagnato da un insieme di eventi che hanno portato l'umanità verso un progresso scientifico e culturale. Infatti, la comunicazione tra due culture, avvenuta attraverso la collaborazione di studiosi nelle corti, ha permesso confronti, riflessioni, adeguamenti dei saperi. I numeri razionali sono stati chiamati “numeri rotti” a partire dal Liber Abbaci e in tutti i testi destinati alla didattica fino a quelli in uso nel Regno d'Italia. In particolare, il confronto e l'integrazione dei contenuti dei trattati d'abaco con la matematica euclidea è evidente nell'opera di Clavio del 1585, tradotta in italiano da Lorenzo Castellano del 1686 (Castellano, 1686), *Aritmatica Prattica*, in cui, però, compaiono alcuni aspetti innovativi. I numeri rotti o “*minutie*” o “*fragmenti*” nascono

dall'avanzo della divisione dei numeri interi. Imperoché quando resta qualcosa nella divisione, si fa da quello il numeratore del rotto, che ha per denominatore il partitore [il divisore]. (Castellano, 1686, p. 77)

Clavio sembra quindi tenere in considerazione la definizione di numero rotto a

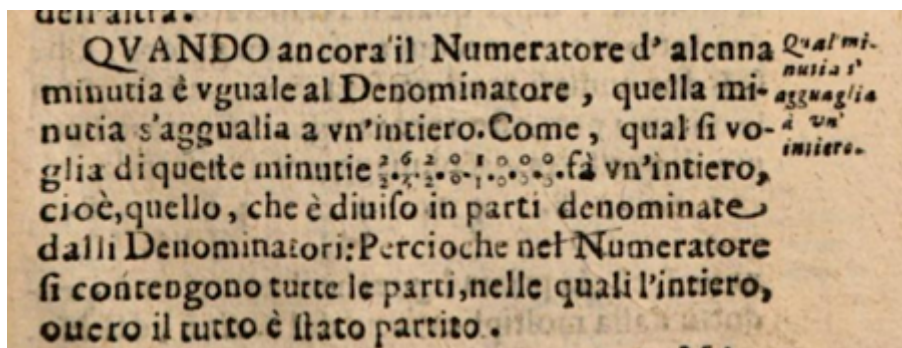
partire dalla divisione, come fa Leonardo e, per la definizione dettagliata di numero rotto, scrive:

Ogni numero rotto si scrive in questo modo. Il denominatore si pone direttamente sotto il numeratore Tirando una linea tra L'uno e l'altro numero. Come per esempio 3 quinte parti si scrivono in questo modo, e l'uno e l'altro numero si preferisce per il suo nome pronuntiando però nel primo luogo il numeratore. (Castellano, 1686, p. 67)

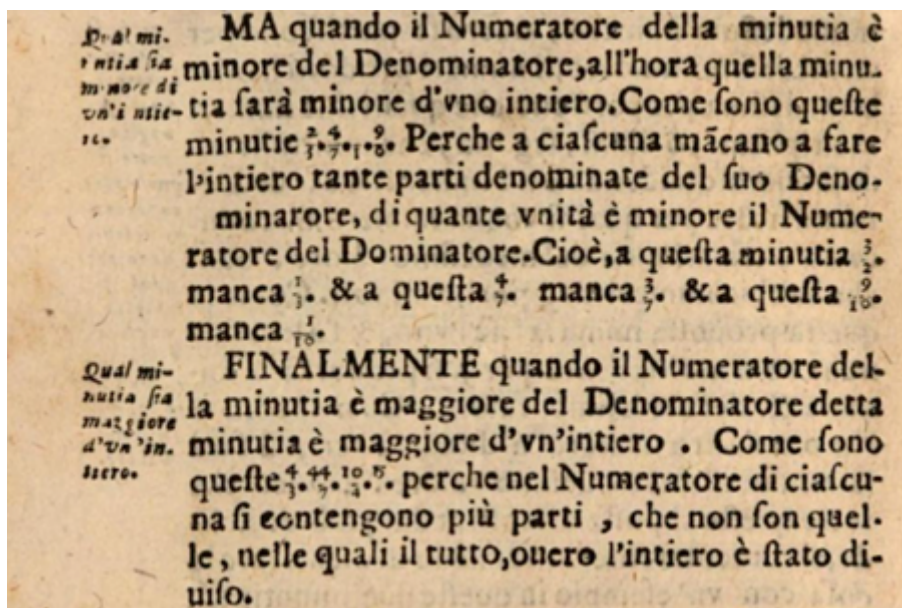
In questa definizione, Clavio descrive prima la frazione come in Fibonacci, ma pone attenzione alla lettura della notazione dicendo di pronunciare prima il numeratore, differentemente dal gesto suggerito nel Liber Abbaci di partire dalla suddivisione dell'intero, ovvero del denominatore, come la leggiamo ancora oggi. Mentre Fibonacci parla di numero rotto come una quantità minore dell'intero e considera il numero misto come la somma di un numero intero e un rotto, in Clavio comincia a essere presente la suddivisione delle frazioni che assomiglia a quella che conosciamo oggi, come riportate nei nostri libri di testo, ovvero la frazione apparente, propria e impropria. Non utilizza questi termini ma le loro descrizioni alludono proprio a tali concetti (Figura 6). Nei libri d'abaco non era presente questa classificazione, introdotta da Clavio molto probabilmente poiché ha adattato la teoria delle proporzioni degli *Elementi* di Euclide, in particolare la definizione V.5 di rapporto,⁷ al concetto di frazione. L'*Aritmetica Prattica* di Clavio ebbe molta influenza a livello didattico, soprattutto perché ispirato ai suoi studi approfonditi degli *Elementi*, tanto che il gesuita fu definito l'«Euclide del XVI secolo».

Figura 6

Classificazione delle frazioni a partire dal confronto tra numeratore e denominatore, Castellano (1686), p. 80



⁷ Numeri sono detti essere nello stesso rapporto, il primo rispetto al secondo e il terzo rispetto al quarto, quando, secondo un qualunque multiplo, gli equimultipli del primo e terzo o eccedono insieme rispettivamente gli equimultipli del secondo e quarto, oppure siano insieme uguali, oppure facciamo insieme difetto presi in ordine corrispondente.



Questo testimonia un ulteriore tentativo di avvicinare il concetto di rapporto a quello di frazione, non esplicitato in passato da Fibonacci nel suo trattato, attraverso lo stesso simbolo, come accade oggi, trascinando con sé tutti gli altri significati che la frazione aveva già avuto nel corso della storia.

Gli studenti, attraverso la lettura diretta della fonte, possono riflettere sui significati matematici trattati: questa operazione potrà disorientarli, soprattutto per il linguaggio usato, ma l'interpretazione educativa della fonte da parte dell'insegnante permetterà loro di capire che si parla degli stessi concetti già conosciuti riguardo le frazioni. Questa riflessione li renderà consapevoli del carattere evolutivo della matematica e sarà l'occasione per rivedere i significati relativi agli oggetti matematici coinvolti.

8. Conclusioni

In questo articolo, ho cercato di mostrare la genesi dei significati attribuiti, secondo Kieren, alla frazione facendo ricorso all'uso della storia delle matematiche, con lo scopo di suscitare riflessioni negli insegnanti riguardo la didattica di questo concetto il cui apprendimento non è sempre pienamente raggiunto dagli studenti e che mostra diverse difficoltà. È stato mostrato il significato attribuito inizialmente alla frazione dagli antichi Egizi, come parte/tutto e come misura, attraverso il processo di disgregazione di una frazione, ovvero di scrittura in somma di frazioni unitarie; è stato analizzato il concetto di rapporto in Euclide, che non rappresenta ancora un numero e come, a partire dalla teoria delle proporzioni, gli Arabi abbiano usato il simbolo della frazione per indicare anche il concetto di rapporto. È stato raccontato che la matematica araba è giunta in Europa grazie al *Liber Abbaci* di Fibonacci, nel

quale compare per la prima volta la definizione di frazione partendo dal numero delle parti in cui resta diviso il numero intero, il denominatore, per arrivare al numero di parti da considerare, scritte al di sopra della lineetta, nel numeratore. La frazione diventa, nel famoso trattato, un modo per esprimere il risultato di una divisione con resto, per cui assume il ruolo di quoziente non svolto. Nei problemi presenti nel Liber Abbaci, dove Fibonacci mostra l'utilità pratica dell'aritmetica delle frazioni, sono usate molto spesso le proporzioni euclidee, attraverso la regola del 3, le quali permettono di arrivare a definire la frazione come operatore. Inoltre, è stato visto come, attraverso lo studio effettuato dal “nuovo Euclide”, Clavio, il concetto di rapporto euclideo, in particolare di *stesso rapporto* (proporzione) della definizione V.5, sia stato avvicinato a quello di frazione, descrivendo una classificazione del tutto simile a quella che è presente ancora oggi nei libri di testo, ovvero di frazione propria, impropria e apparente.

Nelle Indicazioni ministeriali si fa riferimento anche ai numeri decimali, che possono essere compresi come modo differente di scrivere una frazione come quoziente “svolto”. La storia dei numeri decimali è un po' più complessa da tenere in considerazione (Van Brummelen, 2024) ma capire che sono una “evoluzione” della frazione come numero da porre sulla retta dei numeri è fondamentale per favorire l'apprendimento. La scala di riduzione (o di ingrandimento) esprime un rapporto, la percentuale è un rapporto equivalente ad uno dato, per cui è definita a partire da una proporzione, nella quale il secondo rapporto è in centesimi. Conoscere l'ordine della comparsa “cronologica” di alcuni concetti nella storia dell'uomo può suggerire, dunque, una metodologia didattica alternativa a quelle solitamente messe in atto nel processo di insegnamento-apprendimento, contando sull'intuizione, intesa come un'anticipazione di una conoscenza e come fenomeno evolutivo (D'Amore, 2023); solo in seguito si passa all'adattamento di quanto già conosciuto, soffermandosi, però, sulla definizione del nuovo oggetto matematico avuto per farlo esistere indipendentemente dal suo processo di nascita.

Riferimenti

- Barbin, É. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, 37(1), 20–25.
- Barbin, É. (2022). On the role and scope of historical knowledge in using the history of mathematics in education. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1597–1611. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01410-1>
- Bartolini Bussi, M. G., Baccaglini-Frank, A., & Ramploud, A. (2014). Intercultural dialogue and the geography and history of thought. *For the Learning of Mathematics*, 34(1), 31–33.

- Boncompagni, B. (Ed.). (1857). *Liber abbaci* (Vol. 1). Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.
- Castellano, L. (1678). *Aritmetica pratica composta del molto R. P. Christoforo Clauio ... et tradotta dal latino in italiano dal sig. Lorenzo Castellano*. Steffano Curti.
- Castelnuovo, E. (1952). L'insegnamento delle frazioni. In *La scuola secondaria e i suoi problemi* (Vol. 2, pp. 73–80). Centro Didattico Nazionale per la Scuola Secondaria.
- Castelnuovo, E., Arzarello, F., & Bartolini, M. G. (1963). *Didattica della matematica*. La Nuova Italia.
- Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. (1980). Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. *The Mathematics Teacher*, 73(5), 329–338.
- Cerasaro, S. (2024). I rapporti e le proporzioni: Proposta di un percorso storico. *Archimede*, 1, 20–35.
- Cerasaro, S., & Tomassi, L. (2023). Le frazioni egizie nella didattica. *Matematica, Cultura e Società*, 8(2), 157–173.
- Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 297–317. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00023-3](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00023-3)
- D'Amore, B. (2023). *Elementi di didattica della matematica*. Bonomo Editore.
- Dehaene, S. (2009). *I neuroni della lettura*. Raffaello Cortina.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Le frazioni: Aspetti concettuali e didattici*. Pitagora.
- Giacardi, L., & Roero, C. S. (2010). *La matematica delle civiltà arcaiche: Egitto, Mesopotamia, Grecia*. Associazione Università Popolare Editore.
- Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them? *Historia Mathematica*, 23, 355–375.
- Guillaumin, J. Y. (2012). Boethius's *De Institutione Arithmetica* and its influence on posterity. In N. H. Kaylor & P. E. Phillips (Eds.), *A companion to Boethius in the Middle Ages* (pp. 135–161). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004225381_005
- Guillemette, D., & Radford, L. (2022). History of mathematics in the context of mathematics teachers' education: A dialogical/ethical perspective. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1493–1505. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01437-4>
- Hart, K. (1981). Fractions. *Mathematics in School*, 10(2), 13–15.
- Kieren, T. E. (1975). On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational number. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101–144). Eric-SMEAC.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). ERIC/SMEAC.
- Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157–162.
- Tomassi, L. (2023). I precursori medioevali dei compiti di realtà: Le trame narrative che nascondevano i rapporti “proibiti” in matematica. *Periodico di Matematica*, 4(3), 169–195.
- Van Brummelen, G. (2024). Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy. *Historia Mathematica*, 66, 1–13.