

La Storia della Matematica nel Quadro di Riferimento della *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT): Una Proposta Teorica

The History of Mathematics in the Framework of *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT): A Theoretical Proposal

La Historia de las Matemáticas en el Marco del *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT): Una Propuesta Teórica

Tullio Aebischer

Dipartimento di Matematica, Università di Roma “Tor Vergata”, Italia

Sunto. *La storia della matematica è considerata un’importante e utile conoscenza per l’attività didattica e, quindi, per la professionalità dei docenti. Si propone l’introduzione e la giustificazione teorica di una specifica categoria-ponte di conoscenza storica della matematica tra quelle disciplinari e quelle pedagogiche del quadro di riferimento della Mathematical Knowledge for Teaching.*

Parole chiave: storia della matematica, conoscenza matematica per l’insegnamento, Mathematical Knowledge for Teaching.

Abstract. *The history of mathematics is considered an important and useful knowledge for teaching activities and, therefore, for the professionalism of teachers. The introduction and theoretical justification of a specific category of historical knowledge of mathematics between disciplinary and pedagogical ones is proposed in the framework of Mathematical Knowledge for Teaching.*

Keywords: history of mathematics, Mathematical Knowledge for Teaching.

Resumen. *La historia de las matemáticas se considera un conocimiento importante y útil para las actividades de enseñanza y, por tanto, para la profesionalidad de los docentes. El objetivo de este artículo es introducir y justificar teóricamente una categoría específica de conocimiento histórico de las matemáticas que cierra la brecha entre el conocimiento disciplinar y el pedagógico en el marco del Conocimiento Matemático para la Enseñanza.*

Palabras clave: historia de las matemáticas; conocimientos matemáticos para la enseñanza, *Mathematical Knowledge for Teaching.*

1. Premessa

Il ruolo della scuola si è sempre più ampliato dalla semplice trasmissione di contenuti e competenze di base (leggere, scrivere e saper fare di conto) all'interazione socio-culturale con la complessa realtà odierna. Parimenti anche l'insegnamento della matematica è andato subordinandosi ai contesti culturali e storici in cui è analizzato. Lo stesso accade per le indicazioni curriculari e per i corsi di aggiornamento di contenuto matematico e pedagogico frequentati dai docenti così come per la scuola e la composizione del gruppo classe.¹ Tutto ciò si riflette nell'approccio alla didattica e nei contenuti che si insegnano. In tale contesto la scuola si impegna a perseguire metodi e obiettivi che offrano agli studenti un percorso di studi idoneo ad acquisire un pensiero critico (Arrigo, 2003), ossia capace di leggere le discipline e il mondo che ci circonda con strumenti sempre più adeguati. Negli ultimi anni la tecnologia ha iniziato a pervadere la didattica indirizzandola verso l'operatività (Moricca, 2016), ma nel farlo l'ha necessariamente distratta da altri strumenti, diciamo, più classici, ma non meno attuali e validi, come l'epistemologia e la storia. Il percorso che ha portato a riconsiderare importante l'introduzione della storia in ambito scientifico-didattico (non solo in matematica, ma, a esempio, anche in fisica) ha come sfondo il difficile dialogo tra materie umanistiche e scientifiche (D'Amore & Sbaragli, 2017; Sansavini, 2014) e una loro separazione *de facto* avvenuta quando l'interesse per i temi fondazionali della matematica venne meno all'interno della matematica stessa, soprattutto dagli anni Trenta del secolo passato dopo i lavori di K. Gödel (1906-1978) (Bottazzini, 2017; Lolli, 2020; Patras, 2006), dallo sviluppo nel secondo dopoguerra in Francia della "matematica moderna" basata sul formalismo (Borga & Palladino, 1997) e dallo spostamento della ricerca didattica dal "cosa" si insegnava al "come" (Arzarello et al., 2014). L'incomprensione nel dialogo tra scienziati sociali e scienziati naturali può derivare da un diverso armamentario culturale e nei differenti obiettivi. In particolare, vi è chi relega la cultura scientifica nel limbo del sapere minore, mentre i portatori della cultura scientifica sostengono che le scienze umane e sociali non hanno pari dignità perché prive del meccanismo galileiano di correzione automatica. Su tale questione, in Italia alcune prese di posizione storiche fecero asserire che la classe di umanisti alla guida dei Paesi avanzati nutra un pregiudizio antiscientifico. Infatti, è nota la diatriba tra il filosofo B. Croce (1866-1952) e il matematico e filosofo della scienza F. Enriques (1871-1946) manifestatasi durante il congresso della Società Filosofica Italiana del 1911 (Gambetti, 2014). In quella sede Croce sostenne che matematica e scienza

¹ Per non appesantire la lettura si è scelto di usare il genere dell'Autore intendendo prendere in considerazione entrambi a meno che ne sia necessaria la distinzione. Lo stesso si è fatto per la figura dello studente.

non sono vere forme di conoscenza, e per di più sono adatte solo agli “ingegni minuti” degli scienziati e dei tecnici, contrapponendovi le “menti universali” dei filosofi idealisti, come Croce medesimo (Cassia, 2015). Superando questa visione manichea, la formazione dei docenti di matematica anche su tematiche storico-culturali permette, invece, di recuperare una sensibilità tecnico-epistemologica verso i contenuti, ma richiede una visione interdisciplinare delle nozioni di base come anche un approccio mentale attento alle relazioni tra le discipline per acquisire una comprensione dei concetti utile a un approccio metacognitivo alla didattica (Grugnetti & Speranza, 2000).

Nel percorso storico della ricerca didattica, dagli anni Sessanta del secolo passato a oggi, è interessante notare come l’attenzione della stessa si sia spostata dal curriculum al docente passando per lo studente (D’Amore, 2006). In tale percorso il docente, uno dei vertici del “triangolo della didattica”,² viene considerato un centro epistemologico e non solo di trasmissione della matematica allo studente (Iori, 2007) poiché si pongono in risalto la sua formazione, le sue convinzioni e il suo ruolo.

Di recente è stata evidenziata una carenza di ricerche sulla catena di effetti tra l’essere docente, le attività e i processi di apprendimento degli studenti (Manizade et al., 2023), ritenendo ancora fondamentale che i docenti conoscano la materia che insegnano partendo dal presupposto che è altamente probabile che chi non la conosca non abbia le competenze necessarie per aiutare gli studenti ad apprendere i contenuti (Ball et al., 2008). In tale prospettiva si muove uno studio di Keller e colleghi (2017) che evidenzia la necessità che competenza disciplinare, competenza pedagogica e capacità di trasmettere la propria motivazione agli studenti siano sempre compresenti al fine di migliorarne le competenze disciplinari. La conoscenza matematica dei docenti non deve, però, essere intesa solo come la padronanza degli aspetti tecnici, ma anche come capacità di trasmettere efficacemente i significati epistemologici nell’attività di insegnamento per dare un senso all’apprendimento degli studenti.

Volendo supportare l’aforisma che “chi comprende, insegna” (Shulman, 1986, p. 14) rispetto al “chi sa, insegna” espresso dallo scrittore G.B. Shaw (1856-1950), ci si concentrerà sulla conoscenza e comprensione dei contenuti disciplinari supportata dalla storia della disciplina stessa: nel nostro caso la matematica.

La base teorica che consente di giustificare l’uso della storia come sequenza di fatti e documenti, e dell’ambiente culturale dell’epoca, è stata studiata da Radford (1997) e successivi approfondimenti con il suo approccio socio-culturale (D’Amore et al., 2006). Infatti, la conoscenza è un processo il cui prodotto è ottenuto attraverso la negoziazione del significato che deriva dall’attività sociale degli individui ed è racchiuso nell’ambito culturale in cui gli individui agiscono. Da ciò la storia della matematica ha molto da offrire

² Per “triangolo della didattica” si intende un diagramma che schematizza le relazioni (lati) tra Docente, Studente e Sapere (vertici) (D’Amore, 2001).

all'epistemologia della matematica fornendo informazioni sullo sviluppo della conoscenza matematica e sul modo in cui i significati sono sorti e si siano modificati. Considerando la professionalità del docente un *habitus* complesso (Cattani, 2021), si ritiene utile un approccio inizialmente analitico con l'acquisizione di informazioni per una successiva visione d'insieme come ribadito dalle *Indicazioni Nazionali* nel paragrafo 'Per un nuovo umanesimo' (MIUR, 2012). In questo paragrafo si evidenzia la necessità di un approccio interdisciplinare tra discipline umanistiche e scientifiche, e l'importanza del contesto: "lo studio dei contesti storici, sociali, culturali nei quali si sono sviluppate le conoscenze è condizione di una loro piena comprensione" (p. 7). L'importanza di tale approccio fu ribadito anche nelle successive *Indicazioni Nazionali e nuovi scenari* (MIUR, 2018). Meno enfasi sull'aspetto storico-culturale, invece, la si evince dalle recenti *Linee guida per le discipline STEM* (MIM, 2023).

2. Metodologia

Nel presente lavoro si proporrà, giustificandola teoricamente, l'inclusione esplicita della conoscenza storico-disciplinare nel quadro di riferimento della *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball et al., 2008), modello concettuale per lo studio delle conoscenze dei docenti per l'insegnamento basato su una ricerca di Shulman (1986). La concettualizzazione della MKT del 2008, che ha introdotto per la matematica la conoscenza disciplinare del docente accanto a quella pedagogica dello stesso, rispose alle critiche avanzate alla ricerca di Shulman, il cui risultato non consentiva di organizzare un'adeguata sperimentazione (Chua, 2020; Döhrmann et al., 2018). Infatti, Ball e colleghi hanno strutturato la MKT in categorie di conoscenze, che in alcuni lavori sono chiamate sotto-domini, per l'ambito matematico (Morris et al., 2009), mentre Shulman ne aveva indicate alcune in via generale, non correlate tra loro e senza circoscriverle a una disciplina, pur riferendosi alle scienze in generale.

Si è scelta la MKT come quadro di riferimento nel quale inserire la presente proposta perché è considerata fondazionale nella letteratura (Ball et al., 2008; Mosvold & Fauskanger, 2013) e generale per dedurre quadri teorici più articolati come, a esempio, la *Trasposizione Meta-Didattica* (Arzarello et al., 2013) e successive modifiche con l'inserimento delle convinzioni dei docenti e dei ricercatori (Pocalana & Cerasaro, in press). La teorizzazione di nuovi quadri di riferimento è stata conseguente alla rinascita dell'interesse negli anni '80 del secolo passato allo studio della conoscenza disciplinare dei docenti (Damiano, 2007). La generalità della proposta di Shulman e della categorizzazione di Ball e colleghi (2008, p. 392) si evidenzia anche dal fatto che non si propose un catalogo di contenuti imprescindibili. In particolare, Shulman voleva indicare una direzione concettuale alla ricerca. Tale approccio consente anche di svincolarsi dai curricula nazionali per separare concettualmente l'attività in

classe da quella della formazione personale del docente senza porre in secondo piano la formazione / esperienza che si acquisisce in classe.

La presente proposta teorica di una nuova categoria di tematica storica della MKT sarà preceduta da una descrizione della MKT stessa (paragrafo 3) alla quale seguiranno la motivazione e la descrizione dell'introduzione della categoria stessa (paragrafo 4).

3. Il Quadro di Riferimento della *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)

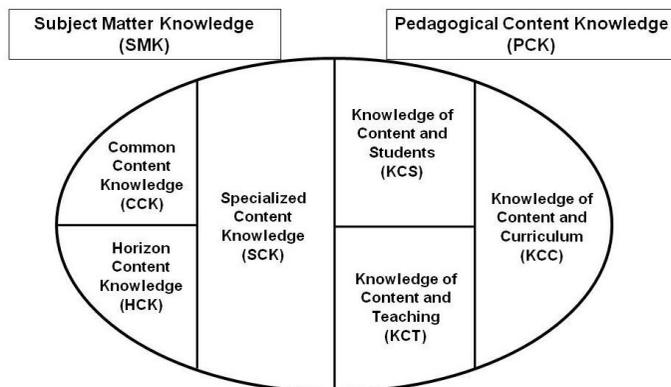
Shulman costruì il suo quadro di riferimento sulla formazione dei docenti dall'osservazione che quasi il 90% delle domande nei test per selezionare i futuri docenti americani nel XIX sec. riguardava i contenuti della disciplina e dall'osservazione che nella seconda metà del XX sec. l'interesse della ricerca didattica si era, invece, spostato sugli aspetti pedagogici. Inoltre, era convinto che insegnare qualcosa richiedesse più della somma della conoscenza di fatti e concetti, e che il docente dovesse avere una chiara comprensione della struttura della disciplina, ovvero sapere quali siano gli argomenti centrali e quelli periferici (Moreira & David, 2008). Notando, poi, che i contenuti disciplinari non comparivano nei vari quadri di riferimento della ricerca a lui contemporanei (Biehler, 1994, p. 56), lo stesso Shulman definì questa lacuna come un 'paradigma mancante'. Da un punto di vista storico, Shulman evidenziò come la situazione si fosse invertita dall'inizio del XX sec., quando si considerava poca pedagogia e più contenuti (Rowe, 1985; Weigand et al., 2019).

Ball aveva svolto una precedente ricerca (1988) sulla questione delle conoscenze dei docenti sui contenuti matematici effettuando varie interviste. Successivamente fu necessaria una maggiore attenzione alla matematica poiché una buona parte degli articoli che studiavano i contenuti pedagogici lo faceva senza porre attenzione a una specifica disciplina pervenendo, così, a conclusioni generiche. L'approccio di Ball e colleghi (2008) ha considerato come punto di partenza la pratica: considerando assodata la conoscenza degli argomenti disciplinari, si concentrarono sul come i docenti dovessero conoscere gli argomenti per insegnarli, ossia si partiva dall'insegnamento e non dai docenti. Con questo punto di vista si sono volute gettare le basi per una teoria pratica della conoscenza matematica per l'insegnamento (Ball et al., 2009).

Per contestualizzare la presente proposta, si riportano le definizioni delle varie categorie di conoscenze della MKT come illustrate in Figura 1 e suddivise tra i due domini *Subject Matter Knowledge* (SMK) e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK).

Figura 1

I due domini SMK e PCK, e la struttura delle categorie della MKT (da Ball et al., 2008)



Le categorie del dominio disciplinare SMK sono:

- CCK (*Common Content Knowledge*): conoscenza matematica per risolvere tecnicamente i problemi rispettando il relativo formalismo;
- SCK (*Specialized Content Knowledge*): conoscenza specifica della matematica e della sua struttura per entrare nel mondo metacognitivo degli studenti. Identifica la conoscenza dei contenuti e la struttura sostanziale (comprensione delle regole di dimostrazione) e sintattica (organizzazione di fatti, concetti e principi che correlano le conoscenze precedenti e l'esperienza di insegnamento) della matematica (Fitriani & Juandi, 2023);
- HCK (*Horizon Content Knowledge*): conoscenza delle connessioni verticali del curriculum degli anni precedenti e successivi del percorso scolastico per dare una visione di continuità agli studenti e per comprendere le loro possibili misconcezioni acquisite;

mentre quelle del dominio pedagogico PCK sono:

- KCS (*Knowledge of Content and Students*): correlazione tra le conoscenze disciplinari del docente e quelle degli studenti in modo che il primo possa anticipare le difficoltà dei secondi per pianificare meglio l'insegnamento e fornire risposte adeguate al livello scolastico;
- KCT (*Knowledge of Content and Teaching*): competenza del docente nello scegliere il percorso di apprendimento più funzionale per la comprensione dello studente;
- KCC (*Knowledge of Content and Curriculum*): conoscenza tecnica degli argomenti del curriculum per insegnarle.

Ball e colleghi (2008) identificarono le suddette categorie considerando la pratica quotidiana dei docenti nell'affrontare l'insegnamento di un concetto matematico o durante l'attività di *problem solving*. La pratica quotidiana dei docenti fu rilevata con una batteria di domande che si rifaceva al lavoro di Hill

e Ball (2004). La proposta strutturale della MKT come rappresentata in Figura 1 fu costruita in maniera empirica considerandola sin dall'inizio provvisoria e ritenendo plausibile operare su di essa per un "perfezionamento e revisione" (Ball et al., 2008, p. 403). Pertanto, la presente proposta teorica di una nuova categoria, in particolare una categoria-ponte tra i domini SMK e PCK, è coerente con quanto prospettato nel lavoro originario di Ball e colleghi.

4. La Proposta: la Categoria-Ponte *Specialized Historical Knowledge* (SHK)

La questione dell'uso della storia della matematica in ambito educativo è dibattuta dalla comunità scientifica e presenta diverse sfaccettature a seconda del Paese e della sua presenza nei curricula nazionali (Kjeldsen, 2012). L'idea di utilizzare la storia per fini didattici parte dal concetto che l'evoluzione del pensiero umano sul lungo periodo (filogenesi) e quella su scala individuale (ontogenesi) abbiano dei punti in comune (Furinghetti, 2002, pp. 45–49). Da ciò si deduce come il sorgere, lo svilupparsi e il perfezionarsi di concetti e strumenti matematici abbia delle somiglianze con il suddetto intreccio tra filogenesi e ontogenesi, tra comunità scientifiche e singoli matematici, per cui acquisire una conoscenza storica risulta utile nell'analisi dei processi di insegnamento-apprendimento (Gentile, 2005). L'apprendimento di un concetto matematico mediato dalla sua evoluzione storica ed epistemologica solleva comunque problemi connessi all'interpretazione, inevitabilmente condotta alla luce degli attuali paradigmi culturali mediante i quali si pongono in contatto differenti culture con il rischio di anacronismi. Pertanto, l'attenzione alla corretta collocazione storico-culturale dei concetti si intreccia con i processi di insegnamento-apprendimento della matematica a sua volta influenzati dalle concezioni dei docenti sulla natura della conoscenza scientifica e della sua evoluzione, come anche a seguito di riflessioni personali o, meglio, di occasioni di confronto teorico con i colleghi (D'Amore et al., 2006). La formazione dei docenti a monte della trasposizione didattica mira proprio a far acquisire una maggiore consapevolezza matematica per dipanare e/o anticipare gli 'ostacoli epistemologici' della tematica affrontata dagli studenti (Brousseau, 1989). Il compito del docente è, così, di rielaborare il sapere scientificamente rilevante e socialmente legittimato in un sapere insegnabile o, meglio, apprendibile da parte degli studenti (Damiano, 2007). Con questo punto di vista, lo studio interdisciplinare dei testi coevi allo sviluppo storico dei concetti matematici consente agli studenti di assaporare il piacere della scoperta seguendo un percorso euristico (Telloni, n.d.) che, in ultima analisi, è anche un forte strumento motivazionale per l'apprendimento (Demattè, 2006).

Per quanto riguarda la MKT, in letteratura si è ritenuta la storia della matematica collegata alle categorie HCK e KCT (Jankvist et al., 2016, p. 450; Smestad et al., 2014) anche se la definizione della prima categoria riflette più i

contenuti tecnici dei curricula. Nei due lavori precedenti, tuttavia, non è stata proposta una modifica dell'impostazione delle categorie di Ball e colleghi (2008), considerando quindi la storia un mero strumento accessorio. In Hurrell (2013) viene riportata una tabella di domande per valutare l'acquisizione delle varie categorie della MKT, ma in corrispondenza alla categoria SCK non ve ne sono di collegate alla storia della matematica. Lo stesso in Phelps e Howell (2016).

Ai fini della presente proposta risulta interessante ricordare l'idea originale di Shulman della Pedagogical Content Knowledge poiché la pone in collegamento con i contenuti della disciplina:

Le forme più utili di rappresentazione di quelle idee, le analogie più potenti, le illustrazioni, gli esempi, le spiegazioni e le dimostrazioni, in una parola, i modi più utili di rappresentare e formulare l'argomento che lo rendono comprensibile agli altri. [...] La conoscenza dei contenuti pedagogici include anche la comprensione di ciò che rende facile o difficile l'apprendimento di argomenti specifici: le concezioni e i preconcetti che gli studenti di età e background diversi portano con sé nell'apprendimento di quei argomenti e lezioni insegnati più frequentemente. (Shulman, 1986, p. 9, traduzione dell'Autore)

La storia della matematica, intesa sia come narrazione di fatti e documenti che come percorso pedagogico di come e perché i concetti matematici sono nati e si sono evoluti, può fungere da ponte tra i domini SMK e PCK poiché la sua conoscenza migliora l'efficacia della trasposizione didattica (Bagni, 2002; 2009).

Un'altra indicazione che giustifica l'esplicitazione di una categoria-ponte sul tema della storia della disciplina tra i due domini SMK e PCK la si ha da quanto scrive Grossmann (1990) riferendosi a un insegnamento di J. Dewey (1859-1952): “gli insegnanti devono imparare a ‘psicologizzare’ la loro materia per l'insegnamento, a ripensare gli argomenti disciplinari per renderli più accessibili agli studenti” (p. 8, traduzione dell'Autore).

Inoltre, come ulteriore giustificazione della sua importanza e necessità per una didattica più efficace, si ritiene che la categoria-ponte proposta possa essere vista anche come una messa in pratica dell'*Humanitas* scientifica propugnata da F. Enriques (Giacardi, 2023; Nicotra, 2018, 2019) che, all'inizio del secolo passato, rivolgendosi ai docenti gli esortava ad approfondire “lo spirito filosofico” della matematica, “quello spirito di relazione che tutto coordina in una sintesi, e fa brillare sugli umili particolari la grande luce dell'idea generale!” (Enriques, 1900, p. 23). Su questo punto si rammenti quanto riportato nelle *Indicazioni Nazionali* del 2012, il difficile dialogo tra discipline umanistiche e scientifiche, e, in particolare, la diatriba tra Enriques e Croce (paragrafo 1).

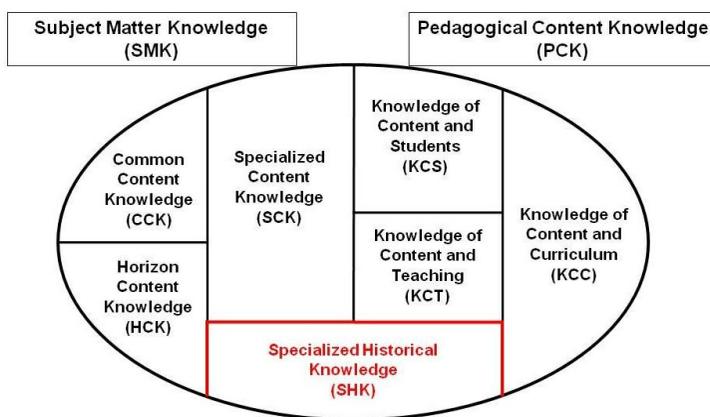
La proposta categoria-ponte si basa anche sulla distinzione non solo tra CCK, intesa come conoscenza nel senso di competenza formale, e SCK, intesa come conoscenza nel senso di competenza epistemologica, ma anche quella tra matematica accademica e matematica scolastica (Ball et al., 2008; Moreira &

David, 2008). Infatti, la matematica accademica ha l'obiettivo di far avanzare la conoscenza matematica verso nuovi orizzonti senza una particolare preoccupazione nel tenere memoria del processo ideativo e costruttivo della teoria, e con la sola necessità di dimostrare la validità del risultato. La matematica scolastica, al contrario, focalizza la sua attenzione anche sul processo tecnico ed epistemologico che ha portato alla dimostrazione finale, cogliendo come possibili spunti didattici, in funzione metacognitiva, errori, critiche, persino percorsi che non hanno portato a risultati. In relazione alle categorie della MKT, la matematica accademica si pone all'interno della SCK, mentre quella scolastica nelle categorie CCK e HCK.

La presente proposta teorica vuole aggiornare la struttura delle categorie della MKT. Infatti, la sistemazione in categorie di Ball e colleghi (2008) affianca i domini SMK e PCK sollevando il dubbio se tra loro ci sia qualche connessione che ne possa spiegare l'eventuale interazione. Con questo dubbio, in questo articolo si propone di inserire una nuova categoria-ponte che espliciti la tematica storica della disciplina come nucleo fondante della conoscenza dei docenti e, allo stesso tempo, evidenzi un collegamento tra i due domini della MKT. La funzione di ponte della proposta categoria denominata *Specialized Historical Knowledge* (SHK) tra i domini SMK e PCK e la sua posizione nel quadro della MKT sono evidenziate in Figura 2. La posizione della SHK nella struttura modificata della MKT soddisfa anche la connessione con la categoria HCK come suggerito in Jankvist e colleghi (2016) e Smestad e colleghi (2014).

Figura 2

La struttura modificata della MKT con la proposta categoria-ponte SHK (da Ball et al., 2008 con elaborazione dell'Autore)



In base a quanto sopra illustrato, la SHK è la conoscenza dei fatti, dei documenti e dei personaggi (per la geometria vedasi Brandl & Vinerean, 2023), come anche dello sviluppo storico-culturale dei concetti matematici che aiutano il docente nella propria consapevolezza della disciplina e nel progettare una

trasposizione didattica efficace per l'apprendimento degli studenti.

La nuova categoria SHK si caratterizza come ponte tra i domini SMK e PCK poiché la matematica non è solo tecnicismo, ma anche un fenomeno storico-culturale essendo una costruzione dell'Uomo (Enriques, 1938). Nella sua attività matematica l'Uomo dà ai concetti un significato epistemologico e una descrizione applicativa. Nel dinamismo dell'attività matematica si ha lo sviluppo dei concetti che risulta utile al docente sia per la propria autoformazione che per la progettazione di un'efficace trasposizione didattica (i due aspetti sono intimamente collegati). La storia della matematica, mediata didatticamente anche da testi coevi alla formazione del concetto e/o successivamente approfonditi e/o interpretati secondo i dettami dell'ermeneutica di H.-G. Gadamer (2012) (Gennari, 2014), si deve considerare una conoscenza fondamentale della professionalità del docente per superare gli 'ostacoli epistemologici' degli studenti (D'Amore et al., 2006). Per tale motivo, nella modificata struttura della MKT, la SHK si interfaccia con le due categorie HCK e SCK del dominio SMK, e con le due categorie KCT e KCC del dominio PCK.

5. Conclusioni

Per poter inquadrare la storia della matematica come categoria esplicita in funzione sia della formazione dei docenti che della didattica, si è considerato il quadro di riferimento della MKT concettualizzata da Ball e colleghi (2008) da un'idea di ricerca di Shulman (1986; 1987). La si può definire come la conoscenza dei fatti, dei documenti e dei personaggi, come anche dello sviluppo storico-culturale dei concetti matematici che aiutano il docente nella propria consapevolezza della disciplina e nel progettare una trasposizione didattica efficace per l'apprendimento degli studenti.

Come si è fatto per la categoria SCK, anche per la SHK non si è dato volutamente un elenco di narrazioni storiche e/o di documenti da conoscere assolutamente. L'esplicitazione e la collocazione della SHK, e le relazioni con le altre categorie servono a guidare il docente nella sua autoformazione e autonoma progettazione didattica.

L'introduzione della categoria-ponte SHK nel panorama delle conoscenze professionali dei docenti, che in via teorica si è qui proposta, solleva immediatamente, come qualunque conoscenza, la questione della relativa formazione. Per i docenti in formazione universitaria (Mosvold et al., 2014) comporta la scelta di quei corsi, anche al di fuori della matematica, che possano far apprendere queste nuove conoscenze e i relativi collegamenti. Per i docenti in servizio si rende necessario offrire un aggiornamento che ponga in primo piano uno studio epistemologico della matematica e poi l'applicazione laboratoriale intesa come progettazione didattica e utilizzo di risorse storiche documentali e/o interpretative. Per tale motivo la proposta della categoria-ponte

SHK apre a possibili future sperimentazioni più puntuali sul suo ruolo nella formazione dei docenti e per fornire ulteriori elementi utili per la sua più dettagliata caratterizzazione.

Ringraziamenti

Si ringraziano l'Editor incaricato e i Referee per le puntuali osservazioni e i suggerimenti.

Si ringrazia il dottorando G. Bianco (Università di Palermo) per le interessanti conversazioni e osservazioni sulle tematiche affrontate nel presente lavoro.

L'Autore riconosce il supporto del Department of Excellence grant MatMod@TOV (2023-27) assegnato al Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma Tor Vergata.

Riferimenti

- Arrigo, G. (2003). Matematica e formazione del pensiero. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Atti del Convegno "Incontri con la Matematica XVII"* (pp. 3–16). Pitagora.
- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2013). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 347–372). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_15
- Bagni, G. T. (2002). Dalla storia alla didattica della matematica. In G. Callegarin (Ed.), *Atti del Convegno Nazionale "La matematica è difficile?"* (pp. 19–30). Pitagora.
- Bagni, G. T. (2009). Storia e didattica della matematica, una prospettiva ermeneutica. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 19, 45–57.
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education* [Unpublished doctoral dissertation]. Michigan State University.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. C. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Ball, D. L., Thames, M. H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., & Phelps, G. C. (2009). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 95–98). Aristotle University of Thessaloniki.
- Biehler, R. (1994). Teacher education and research on teaching. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 55–60). Springer.
- Borga, M., & Palladino, D. (1997). *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*. La Scuola SEI.
- Bottazzini, U. (2017). *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica*. UTET Universitaria.

- Brandl, M., & Vinerean, M. (2023). Narrative didactics in mathematics education: Results from a university geometry course. *Open Education Studies*, 5(1), 1–15. <https://doi.org/10.1515/edu-2022-0186>
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (pp. 41–63). Les Editions Agence d'Arc Inc.
- Cassia, L. (2015, 2–18 ottobre). Conoscenza tecnico-scientifica e sapere umanistico: La sfida della complessità. Tavola rotonda presentata al XIII Festival Bergamo Scienza.
- Cattani, L. (2021). L'attualità del pensiero di Pierre Bourdieu. *Pandora Rivista*.
- Chua, V. G. (2020). A meta-synthesis of studies on deficiencies and affordances in mathematical knowledge for teaching. *Araneta Research Journal (Indagatio)*, 43(1), 15–21.
- D'Amore, B. (2001). Il “triangolo” allievo-insegnante-sapere in didattica della matematica. *L'educazione matematica*, 3(2), 104–113.
- D'Amore, B. (2006). Didattica della matematica “C”. In S. Sbaragli (Ed.), *Atti del Convegno La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno* (pp. 93–96). Pitagora.
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B(1), 11–39.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). Esempi significativi di storia della matematica per l'attività in aula. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Matematica, didattica e scuola: Fra ricerca e prassi quotidiana* (pp. 13–18). Pitagora.
- Damiano, E. (2007). *Il sapere degli insegnanti. Introduzione alla didattica per concetti con esercitazioni*. FrancoAngeli.
- Demattè, A. (2006). *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la secondaria di primo e secondo grado. Volume per l'insegnante*. Editore Provincia di Trento – IPRASE del Trentino.
- Döhrmann, M., Kaiser, G., & Blömeke, S. (2018). The conception of mathematics knowledge for teaching from an international perspective: The case of the TEDS-M Study978. In Y. Li & R. Huang (Eds.), *How Chinese acquire and improve mathematics knowledge for teaching* (pp. 57–81). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789463512367_004
- Enriques, F. (1900). *Questioni riguardanti la geometria elementare*. Zanichelli.
- Enriques, F. (1938). *Le matematiche nella storia e nella cultura*. Zanichelli.
- Fitriani, A. D., & Juandi, D. (2023). Effect of mathematical content knowledge on mathematical knowledge for teaching. *Journal for Educators, Teachers and Trainers*, 14(5), 299–308. <https://doi.org/10.47750/jett.2023.14.05.029>
- Furinghetti, F. (2002). *Matematica come processo socioculturale*. IPRASE Trentino.
- Gadamer, H.-G. (2012). *Bildung e umanesimo*. Il Nuovo Melangolo.
- Gambetti, F. (2014). Enriques e la Società Filosofica Italiana: Scienza, filosofia e riforma dell'università. *Rivista di storia della filosofia*, 69(2), 41–54.
- Gennari, M. (2014). Postfazione. In M. Gennari (Ed.), *H. G. Gadamer. Educare è educarsi* (pp. 35–60). Il Nuovo Melangolo.
- Gentile, G. (2005, November). La storia della matematica per la didattica della matematica: Cosa può insegnarci Archimede? Presentazione al II Convegno

- GRIM/AICM, Università di Palermo. AICM-GRIM-SISSIS-Università di Palermo.
- Giacardi, L. (2023). Le ‘battaglie’ di Federigo Enriques in difesa della *Humanitas* scientifica e le ricadute sull’insegnamento della matematica. *Scientia*, 1(2), 73–126. <https://doi.org/10.53134/2974-9433-202302-012>
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. Teachers College Press.
- Grugnetti, L., & Speranza, F. (2000). Riflessioni sul problema Storia e Didattica della matematica (risposta al Discussion Document per l’ICMI Study sull’argomento). *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 6(3*), 71–77.
- Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California’s Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330–351. <https://doi.org/10.2307/30034819>
- Hurrell, D. P. (2013). What teachers need to know to teach mathematics: An argument for a reconceptualized model. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(11), 54–64. <https://doi.org/10.14221/ajte.2013v38n11.3>
- Iori, M. (2007). Epistemologia dell’insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale. (Parte I: Quadro teorico e rassegna di alcuni risultati di ricerca). *La matematica e la sua didattica*, 21(2), 197–220.
- Jankvist, U. Th., Mosvold, R., & Clark, K. (2016). Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of history in mathematics education. In L. Radford, F. Furinghetti, & Th. Hausberger (Eds.), *Satellite meeting of the 2016 ICME International Study Group on the relations between the history and pedagogy of mathematics* (pp. 441–452). IREM de Montpellier.
- Keller, M. M., Neumann, K., & Fischer, H. E. (2017). The impact of physics teachers’ pedagogical content knowledge and motivation on students’ achievement and interest. *Journal of Research in Science Teaching*, 54(5), 586–614. <https://doi.org/10.1002/tea.21378>
- Kjeldsen, T. H. (2012). Uses of history for the learning of and about mathematics: Towards a theoretical framework for integrating history of mathematics in mathematics education. In É. Barbin, S. Hwang, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM 2012* (pp. 1–21). KSME & KSHM.
- Lolli, G. (2020). L’incompletezza di Gödel e le interpretazioni filosofiche. In G. Lolli & F. S. Tortoriello (Eds.), *L’arte di pensare. Matematica e filosofia* (pp. 116–143). UTET Universitaria.
- Manizade, A., Buchholtz, N., & Beswick, K. (2023). The evolution of research on teaching mathematics: International perspective in the digital era. In A. Manizade, N. Buchholtz, & K. Beswick (Eds.), *The evolution of research on teaching mathematics. International perspective in the digital era* (Vol. 22, pp. 1–18). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-31193-2>
- MIM – Ministero dell’Istruzione e del Merito. (2023). *Linee guida per le discipline STEM*. Recuperato da https://www.mim.gov.it/documents/20182/0/linee_guida_stem-stampa.pdf
- MIUR – Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione*.

- Annali della Pubblica Istruzione*, LXXXVIII (numero speciale). Le Monnier. Recuperato da https://sial.school/wp-content/uploads/2022/04/Indicazioni_Annali_Curricolo_Italiano.pdf
- MIUR – Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca. (2018). *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari*. Recuperato da <https://www.mim.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+sce+nari>
- Moreira, P. C., & David, M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(1), 23–40. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9057-5>
- Moricca, C. (2016). L’innovazione tecnologica nella scuola italiana. Per un’analisi critica e storica. *Form@re - Open Journal per la formazione in rete*, 16(1), 177–187. <http://dx.doi.org/10.13128/formare-18063>
- Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 491–529. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.40.5.0491>
- Mosvold, R., & Fauskanger, J. (2013). Teachers’ beliefs about mathematical knowledge for teaching definitions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 8(2–3), 43–61. <https://doi.org/10.29333/iejme/273>
- Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. Th. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, 23(1), 47–60. <https://doi.org/10.1007/s11191-013-9612-7>
- Nicotra, L. (2018). Federigo Enriques: Tra filosofia e matematica. Parte I. *ArteScienza*, 5(10), 5–33. <https://doi.org/10.30449/AS.v5n10.085>
- Nicotra, L. (2019). Federigo Enriques: Tra filosofia e matematica. Parte II. *ArteScienza*, 6(12), 5–36. <https://doi.org/10.30449/AS.v6n12.101>
- Patras, F. (2006). *Il pensiero matematico contemporaneo*. Bollati Boringhieri.
- Phelps, G., & Howell, H. (2016). Assessing mathematical knowledge for teaching: The role of teaching context. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1), 50–72. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1365>
- Pocalana, G., & Cerasaro, S. (in press). A model for teacher professional development taking into account meta-didactical praxeologies, documentation work and beliefs. *For the Learning of Mathematics*.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Rowe, D. (1985). Felix Klein’s “Erlanger Antrittsred”: A transcription with English translation and commentary. *Historia Mathematica*, 12, 278–291. [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(85\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0315-0860(85)90003-5)
- Sansavini, S. (2014). Il difficile dialogo fra le culture umanistica e scientifica. *Il Carrobbio*, 15, 1–18.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1–22.

- Smestad, B., Jankvist, U. Th., & Clark, K. M. (2014). Teacher's mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3–4), 169–183. <https://doi.org/10.7146/nomad.v19i3-4.148654>
- Telloni, A. I. (n.d.). La scienza sospesa: Le vie della ricerca fra metodo ed euristica. *MATEpristem*. Recuperato da <https://matematica.unibocconi.eu/articoli/la-scienza-sospesa-le-vie-della-ricerca-fra-metodo-ed-euristica>
- Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., & Schubring, G. (Eds.). (2019). *The legacy of Felix Klein*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7>