

## Implementazione della Valutazione Formativa in Attività Argomentative per lo Sviluppo del Pensiero Algebrico: Indicatori e Dove Trovarli

## Implementation of Formative Assessment in Argumentative Activities for the Development of Algebraic Thinking: Indicators and Where to Find Them

## Implementación de la Evaluación Formativa en Actividades Argumentativas para el Desarrollo del Pensamiento Algebraico: Indicadores y Dónde Encontrarlos

**Alessandra Boscolo, Francesca Morselli e Elisabetta Robotti**

*Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Italia*

**Sunto.** *In questo lavoro vengono introdotti indicatori operativi per monitorare sia l'attivazione sia la realizzazione delle strategie di valutazione formativa, nell'implementazione di attività didattiche volte allo sviluppo del pensiero algebrico e alla promozione della competenza argomentativa. Gli indicatori costituiscono un prodotto di ricerca nato dal lavoro nella comunità di ricerca DIVA al DIMA e il loro utilizzo viene illustrato nell'articolo in riferimento a un caso studio esemplificativo: un percorso didattico co-progettato in seno alla comunità che vede le strategie di valutazione formativa come elemento cardine della progettazione. Tali indicatori costituiscono uno strumento per supportare la valutazione e il miglioramento del design delle progettazioni e per promuovere la riflessione critica dei docenti sulle scelte in fase di attuazione didattica, contribuendo al miglioramento delle pratiche educative e alla crescita professionale degli insegnanti.*

**Parole chiave:** valutazione formativa, riflessione sulla pratica, argomentazione, *symbol sense*, implementazione didattica.

**Abstract.** *This paper introduces operational indicators designed to monitor both the activation and realization of formative assessment strategies within educational activities, in which these strategies are positioned as a core dimension of the instructional design. Particularly, we here refer to learning sequences aimed at fostering algebraic thinking and promoting argumentative competence. The indicators represent a research outcome developed by the DIVA al DIMA community of inquiry and are illustrated in this paper through an exemplary case study. The indicators serve as a tool to support the evaluation and refinement of instructional design. Additionally, they aim to promote critical teacher reflection on the choices made during the*

*implementation phase, contributing to the improvement of educational practices and the professional development of educators.*

**Keywords:** formative assessment, reflective practice, symbol sense, argumentative skills, implementation.

**Resumen.** *Este artículo presenta indicadores operativos diseñados para monitorear tanto la activación como la implementación de estrategias de evaluación formativa en actividades didácticas orientadas al desarrollo del pensamiento algebraico y la promoción de la competencia argumentativa. Dichas estrategias se integran como una dimensión central en el diseño educativo. Los indicadores representan un resultado de investigación desarrollado en el marco de la comunidad de investigación DIVA del DIMA y se ilustran mediante un estudio de caso ejemplar. A través del análisis del estudio de caso, se demuestra cómo estos indicadores pueden constituir una herramienta efectiva para evaluar y optimizar el diseño de las propuestas didácticas. Asimismo, buscan fomentar la reflexión crítica por parte del profesorado sobre las decisiones tomadas durante la implementación educativa, contribuyendo al perfeccionamiento de las prácticas pedagógicas y al desarrollo profesional de los docentes.*

**Palabras clave:** evaluación formativa, reflexión sobre la práctica, argumentación, *symbol sense*, implementación didáctica.

## 1. Introduzione

La valutazione formativa, intesa come processo collaborativo, basato sul raccogliere evidenze dal lavoro degli studenti, che vengono poi interpretate e utilizzate da insegnanti, studenti o compagni per prendere decisioni sui passi successivi del percorso di apprendimento (Black & Wiliam, 2009) è considerata una dimensione fondamentale per promuovere una didattica efficace. Secondo Bell e Cowie (2001), essa supporta il miglioramento continuo dell'apprendimento, permettendo a insegnanti e studenti di riconoscere e rispondere attivamente ai risultati dell'apprendimento durante il percorso educativo. Ma come promuovere la valutazione formativa in classe?

Wiliam e Thompson (2007) hanno identificato cinque strategie chiave per la promozione della valutazione formativa all'interno di un contesto educativo, mettendo in luce che, non solo l'insegnante, ma anche i compagni di classe e lo studente stesso possono assumere un ruolo attivo in questo processo. Tuttavia, come evidenziato da Schildkamp et al. (2020), gli insegnanti incontrano sfide significative nell'implementare efficacemente la valutazione formativa in classe. È essenziale, infatti, che essa venga integrata strutturalmente nel processo di insegnamento-apprendimento, superando la logica che prevede la proposta di attività isolate appositamente dedicate. In particolare, la valutazione formativa deve essere ritenuta un elemento cardine all'interno della progettazione didattica.

Questa consapevolezza guida la comunità di ricerca DIVA (Didattica Inclusione Valutazione formativa Argomentazione) al DIMA (Dipartimento di Matematica) dell'Università di Genova, un gruppo di ricercatori e insegnanti-ricercatori di matematica e fisica di scuola secondaria di secondo grado, costituitosi nel febbraio 2023 e finalizzato alla riflessione sulla pratica didattica. In particolare, all'interno della comunità viene promossa la costruzione di sequenze didattiche che vengono co-progettate e sperimentate dai membri del gruppo. Tale lavoro innesca riflessioni di ricerca che portano anche alla costruzione di strumenti teorico-operativi volti a supportare l'implementazione didattica, in risposta alle esigenze dei contesti e per sostenere lo sviluppo professionale e personale.

In questo contributo, illustriamo un risultato di ricerca proveniente dal lavoro condotto all'interno di questa comunità, che si è interrogata intorno alle seguenti domande di ricerca:

1. Come è possibile rilevare l'attivazione delle strategie di valutazione formativa in relazione a specifici obiettivi di apprendimento durante l'attività didattica?
2. Come è possibile valutare se le strategie di valutazione formativa attivate siano state realizzate in modo efficace, in riferimento ai medesimi obiettivi di apprendimento?

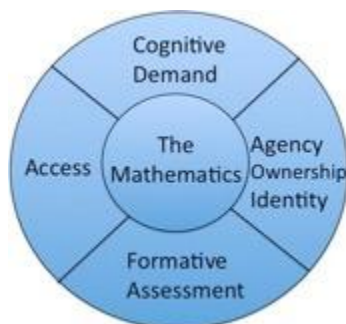
Per affrontare queste domande, sono stati sviluppati indicatori per rilevare sia l'attivazione sia la realizzazione delle cinque strategie di valutazione formativa. Tali indicatori sono stati progettati in riferimento a specifici obiettivi di apprendimento. In particolare, presentiamo in questo contributo indicatori specificatamente declinati in relazione ad attività didattiche volte alla promozione del pensiero algebrico, ovvero la capacità di riconoscere e generalizzare schemi, relazioni e strutture matematiche (Arcavi, 1994), e alla competenza argomentativa in contesto algebrico (Morselli & Boero, 2011) sviluppata attraverso la valutazione formativa (Cusi, Morselli & Sabena, 2017).

La scelta di declinare gli indicatori di valutazione formativa in relazione agli specifici obiettivi matematici è stata fortemente influenzata dallo strumento teorico adottato dalla comunità DIVA al DIMA, sia per supportare la progettazione didattica che la riflessione sulla pratica: il TRU (Teaching for Robust Understanding) elaborato da Schoenfeld (2016). Tale framework, infatti, articola la riflessione sulla promozione di un apprendimento "robusto" intorno a cinque dimensioni - la matematica, il carico cognitivo, l'accesso equo ai contenuti, l'agency, ownership, identity e la valutazione formativa - ponendo la dimensione matematica in una posizione privilegiata, al cuore del modello, in diretta relazione con tutte le altre dimensioni coinvolte (Fig. 1). Questa struttura influenza il modo di concettualizzare tutte queste dimensioni e, in particolare, anche la valutazione formativa, ponendola in stretta relazione con gli obiettivi matematici coinvolti. Tali obiettivi possono comprendere sia specifici significati matematici che determinate pratiche matematiche.

**Figura 1**

*Il framework Teaching for Robust Understanding*

(<https://www.map.mathshell.org/trumath.php>)



Gli indicatori si figurano come supporto operativo per la riflessione dei docenti sull'implementazione didattica, coerente con la filosofia delle rubriche proposte da Schoenfeld (2016), ed hanno una duplice funzione. Sono uno strumento di monitoraggio per l'attuazione di proposte didattiche, relazionando le scelte di progettazione con l'effettiva realizzazione didattica, tenendo conto degli specifici obiettivi matematici coinvolti. Essi permettono di monitorare non solo l'attivazione delle strategie, dovute ad opportune scelte di progettazione e di implementazione del docente, ma anche il loro grado di realizzazione nella pratica educativa, ovvero come tale attivazione abbia innescato processi di valutazione formativa. In questo senso, il passaggio dalla progettazione alla valutazione richiede un'attenta analisi basata su dati raccolti e interpretati nel contesto. Questo approccio si inserisce quindi in una visione che vede la progettazione didattica come un ciclo iterativo, in cui la riflessione e la revisione giocano un ruolo centrale nel miglioramento delle pratiche educative. Gli indicatori hanno però anche un'altra finalità, rappresentando uno strumento di promozione per la crescita professionale del docente, sostenendo un'analisi critica delle scelte effettuate in fase di implementazione e dei loro effetti rispetto agli obiettivi stabiliti in fase di progettazione.

Oltre a presentare gli indicatori realizzati in riferimento alle cinque strategie di valutazione formativa, declinati rispetto ai due obiettivi d'apprendimento (pensiero algebrico e competenza argomentativa), nel seguente contributo ne esemplificheremo l'utilizzo servendoci dell'analisi effettuata su un caso studio. L'illustrazione dell'esempio offrirà l'opportunità di discutere l'impiego e la funzionalità degli indicatori per i due fini sopra discussi.

## 2. Quadro Teorico

*Cosa sappiamo del pensiero matematico di ogni studente, e come possiamo costruire su di esso?* A partire da questa domanda chiave, Schoenfeld (2016) descrive la valutazione formativa come una componente essenziale da tenere in

considerazione per progettare e realizzare lezioni efficaci, cioè volte a promuovere un apprendimento significativo per ogni studente. Questa domanda è coerente con la concettualizzazione di valutazione formativa proposta da Black e Wiliam (2009), secondo cui la valutazione formativa è una metodologia didattica in cui

elementi di evidenza relativi ai risultati degli studenti vengono raccolti, interpretati ed utilizzati da insegnanti, studenti e loro pari – i compagni – per prendere decisioni sui passi successivi da fare nel processo di istruzione, che possano essere migliori, o meglio fondate, rispetto alle decisioni prese in assenza di tali elementi di evidenza (Black & Wiliam, 2009, p. 7, tradotto in Cusi, Morselli, & Sabena, 2017).

Per promuovere la valutazione formativa in classe Wiliam e Thompson (2007) indicano cinque strategie chiave (qui nella traduzione di Cusi, Morselli e Sabena, 2017): FA1) Chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo; FA2) Progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti; FA3) Fornire feedback che consentano allo studente di migliorare; FA4) Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri; FA5) Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento. Le strategie sono presentate organizzate in una tabella (Tabella 1), il che rende evidente il fatto che non solo il docente, ma anche i compagni di classe e lo studente stesso possono divenire agenti di valutazione formativa.

**Tabella 1**

*Le strategie di valutazione formativa*

	<i>Dove sta andando lo studente?</i>	<i>Dove si trova lo studente?</i>	<i>Come può raggiungere la meta lo studente?</i>
Insegnante	<i>Strategia 1:</i> chiarire gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo	<i>Strategia 2:</i> progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti	<i>Strategia 3:</i> fornire feedback che consentano allo studente di migliorare
Compagno	Capire e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo	<i>Strategia 4:</i> attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri	
Studente	Capire gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo	<i>Strategia 5:</i> attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento	

Come sottolineano gli autori, non solo gli insegnanti, ma anche i compagni e gli stessi studenti possono agire come agenti di valutazione formativa. inoltre, come mostra la tabella, le strategie si riconducono alle tre domande chiave alla base del processo di valutazione formativa: *dove sta andando lo studente? Dove*

*si trova lo studente in questo momento? Come può raggiungere la meta fissata?*

In allineamento con la prospettiva del TRU, la valutazione formativa non può che essere concepita in relazione ai significati e ai processi matematici promossi dalla specifica attività didattica, dal momento che la dimensione matematica costituisce il cuore della riflessione suggerita dal modello, sulla quale ognuna delle altre quattro dimensioni (il carico cognitivo, l'accesso equo ai contenuti, l'agency, ownership e identity e la valutazione formativa) va ad innestarsi per realizzare un apprendimento “robusto” (Schoenfeld, 2016). Conseguentemente, la dimensione matematica forgia le strategie di valutazione formativa, in quanto gli obiettivi di apprendimento e i relativi criteri di successo devono necessariamente essere declinati in relazione ai contenuti e le pratiche matematiche in gioco.

Nello specifico, in questo contributo facciamo riferimento ad attività didattiche in cui gli obiettivi di apprendimento riguardano lo sviluppo del pensiero algebrico e la competenza argomentativa. L'obiettivo di apprendimento relativo allo sviluppo del pensiero algebrico si ricollega alla concettualizzazione del symbol sense descritto da Arcavi (1994). Secondo l'autore, il symbol sense è un complesso e sfaccettato “feeling” coi simboli, che può essere concettualizzato in termini di apprezzamento, comprensione e istinto relativi ai simboli e al loro utilizzo. Più precisamente, sviluppare un symbol sense significa:

- Comprendere come e quando utilizzare i simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni.
- Sapere riconoscere quando è preferibile abbandonare i simboli in favore di altri approcci.
- Sapere gestire la dialettica tra manipolazione simbolica e interpretazione.
- Essere in grado di creare e adattare espressioni simboliche in base al contesto.
- Monitorare costantemente i significati associati ai simboli durante la risoluzione dei problemi.
- Comprendere i diversi ruoli che i simboli possono assumere in situazioni differenti.

Il primo punto di caratterizzazione del symbol sense, ovvero la capacità di utilizzare i simboli per generalizzare e dimostrare, si collega al secondo obiettivo di apprendimento, ovvero lo sviluppo della competenza argomentativa. Per inquadrare teoricamente la competenza argomentativa e dimostrativa facciamo riferimento a Morselli e Boero (2009), che riprendono e adattano alla didattica della matematica il costrutto di comportamento razionale proposto inizialmente dal filosofo Habermas (2003). Il processo argomentativo e dimostrativo, inteso come comportamento razionale, è caratterizzato da tre componenti, intrecciate tra loro:

- la componente epistemica, che riguarda la capacità di validare affermazioni

basandosi su premesse condivise e modalità di ragionamento legittime;

- la componente teleologica, che attiene alla dimensione del problem solving, ossia alle strategie e alle scelte orientate al raggiungimento di obiettivi specifici;
- la componente comunicativa, che riguarda la capacità di aderire alle regole che rendono i processi di ragionamento chiari, condivisibili e conformi agli standard matematici di una determinata comunità.

In particolare, la componente epistemica si manifesta nei criteri di correttezza e completezza: la correttezza riguarda l'assenza di errori matematici nelle risposte e nelle giustificazioni, mentre la completezza richiede che tutti i passaggi necessari per giungere alla conclusione siano esplicitati e coerenti con le conoscenze matematiche coinvolte. La componente teleologica si riflette nella consapevolezza e appropriatezza delle strategie adottate in relazione agli obiettivi dell'attività. La componente comunicativa si riflette nella chiarezza, ossia nella comprensibilità della risposta da parte di un interlocutore (compagni o insegnante), evidenziando l'importanza del piano comunicativo. Come sottolineato da Cusi, Morselli e Sabena (2017), correttezza, completezza e chiarezza rappresentano criteri fondamentali per una buona argomentazione matematica in contesto scolastico.

In particolare, poiché le attività a cui ci riferiamo hanno come altro obiettivo di apprendimento lo sviluppo del pensiero algebrico, facciamo riferimento anche a un ulteriore adattamento del costrutto di comportamento razionale all'uso del linguaggio algebrico nella modellizzazione e dimostrazione (Morselli & Boero, 2011). Nel caso specifico:

- la componente epistemica riguarda la correttezza delle formalizzazioni algebriche e l'interpretazione delle espressioni algebriche, e la corretta applicazione delle regole sintattiche di trasformazione delle espressioni algebriche;
- la componente teleologica riguarda il fatto che la scelta delle formalizzazioni algebriche, delle trasformazioni e delle loro interpretazioni sia consapevole e orientata agli obiettivi dell'attività;
- la dimensione comunicativa riguarda l'adesione alle norme riguardanti le notazioni standard, così come i criteri per una facile lettura e manipolazione delle espressioni algebriche.

Nel seguito ci riferiremo ai due obiettivi di apprendimento in termini di sviluppo del pensiero algebrico e della competenza argomentativa, intendendo con quest'ultima anche la competenza relativa all'uso dell'algebra come strumento dimostrativo.

### **3. Costruzione e Uso degli Indicatori**

Differentemente dalla definizione di Jaworski (2015), che vede la comunità di

ricerca come un contesto di promozione della formazione dei docenti, nella visione abbracciata dal DIVA, oltre agli obiettivi di sviluppo professionale in un'ottica di formazione insegnanti, essa si presenta come un contesto per sviluppare ricerca. A tal fine, si organizza in un gruppo misto di ricercatori e docenti, che assumono il profilo di insegnanti-ricercatori, con ricadute che mirano ad influenzare sia la scuola che la ricerca. Se, da un lato, si promuove la costruzione di sequenze didattiche co-progettate e sperimentate dal gruppo, dall'altro, il lavoro condotto dalla comunità innesca riflessioni di ricerca che portano anche alla costruzione di strumenti di ricerca volti a supportare l'implementazione didattica, in risposta alle esigenze dei contesti e per sostenere lo sviluppo professionale e personale. All'interno della comunità di ricerca vengono condivise modalità di lavoro e strumenti teorici che supportano la crescita professionale e strutturano il design, la sperimentazione e il monitoraggio di sequenze didattiche co-progettate all'interno del gruppo. Allo strumento principe che guida la riflessione condivisa, il framework TRU corredato dalle rubriche per i docenti (Schoenfeld, 2016), si aggiungono riferimenti teorici che vanno ad ampliare la conoscenza e la comprensione di specifici elementi rilevanti per il lavoro condotto nella comunità e nella scuola. In particolare, affrontando un lavoro specificatamente rivolto alla promozione di pratiche di valutazione formativa, sono stati condivisi i riferimenti teorici presentati nel paragrafo precedente, e similmente è accaduto per quel che riguarda la competenza argomentativa e lo sviluppo del pensiero algebrico. Il processo di co-design di sequenze didattiche risulta perciò informato dagli elementi teorici condivisi, così come il processo di revisione e di ripensamento.

Dalla necessità di creare degli strumenti in grado di monitorare in modo operativo la realizzazione di pratiche di valutazione formativa, in attività di sviluppo per il pensiero algebrico e la competenza argomentativa, nascono gli indicatori: un prodotto di ricerca che declina le indicazioni generali di Wiliam e Thompson (2007) attraverso i quadri teorici legati agli specifici contenuti e pratiche matematiche in gioco. Gli indicatori vogliono, da un lato, individuare elementi della progettazione didattica che hanno favorito processi di valutazione formativa, ma anche portare a consapevolezza le pratiche didattiche del docente che, al di là delle scelte di progettazione che caratterizzano il design della sequenza didattica, hanno permesso di realizzare compiutamente oppure hanno ostacolato l'attuarsi della valutazione formativa.

Per ogni strategia di valutazione formativa e in riferimento a ciascuna competenza in gioco (pensiero algebrico e competenza argomentativa), sono stati formulati una coppia di indicatori. Gli indicatori si distinguono tra *indicatori di attivazione*, che segnalano la presenza di comportamenti osservabili di attuazione delle strategie di valutazione formativa, e *indicatori di compiuta realizzazione*, che rilevano la presenza di effetti osservabili dovuti all'attuazione delle strategie di valutazione formativa.

Diamo ragione di questo sdoppiamento degli indicatori. Nella creazione



dello strumento di monitoraggio, per inquadrare la valutazione formativa come processo, ci è sembrato particolarmente rilevante complementare la rilevazione dell'attivazione delle strategie con ulteriori indicatori che ci permettono di rintracciare le possibili realizzazioni a partire da tali attivazioni. Infatti, riteniamo che la valutazione formativa, come pratica, si instauri nella dinamica e grazie all'interazione che avviene entro la classe in un arco temporale, coinvolgendo molteplici attori, e che la sola attivazione delle strategie non ne garantisca la compiuta attuazione, ma bensì vada osservata come processo nella sua evoluzione. Dunque, la proposta di indicatori di attivazione e compiuta realizzazione ci è sembrato che strutturi il monitoraggio in modo da porre in evidenza questo aspetto per noi centrale. Riteniamo, inoltre, che il valore aggiunto nella promozione della valutazione formativa si possa trovare nella compenetrazione delle cinque strategie. Privilegiamo, per questo, un'analisi condotta attraverso gli indicatori che porti alla luce l'integrazione e la copresenza di molteplici indicatori, anche in riferimento a soggetti diversi, come chiariremo grazie all'analisi riportata su un caso studio, a scopo esemplificativo. Nel prossimo paragrafo presentiamo gli indicatori rimandando la descrizione del processo di creazione ad un articolo in lavorazione (Boscolo et al., submitted). Nel paragrafo seguente, ne esemplifichiamo l'uso facendo riferimento a una sperimentazione condotta all'interno della comunità di ricerca (per i dettagli, vedere Quartara et al., 2024).

La sequenza didattica è stata co-progettata e sperimentata da un insegnante-ricercatore con vasta esperienza didattica e familiarità teorica relativamente agli elementi in gioco nella progettazione, ovvero, la valutazione formativa, lo sviluppo del pensiero algebrico e la competenza argomentativa. Due delle autrici del contributo sono state coinvolte come osservatrici non partecipanti durante la sperimentazione. Inoltre, sono state raccolte le risposte individuali e di gruppo ai quesiti argomentativi proposti, le schermate della lavagna condivise dal docente, le videoregistrazioni delle discussioni di classe, i questionari (moduli Google) compilati dagli studenti tra una lezione e l'altra.

Sulla totalità dei dati raccolti è stata condotta un'analisi olistica che ha preso in esame l'intera sequenza didattica, insieme ad un'analisi sistematica focalizzata su alcuni episodi ritenuti particolarmente rilevanti e informativi dalle autrici e dal docente coinvolto. Per il monitoraggio sistematico, si è proceduto con un'analisi stratificata da parte delle tre autrici, ovvero ciascuna ha preso in carico l'analisi dei materiali selezionati - principalmente degli stralci di discussione e dei moduli di autovalutazione - attraverso uno/due specifici indicatori. Tale analisi è stata seguita da una revisione condivisa. L'analisi astratta ha fatto sì che gli episodi selezionati venissero analizzati con diversi focus di attenzione e ha permesso di non limitarci ad osservare, nei singoli scambi/risposte/interventi, esclusivamente la strategia più evidente tra quelle presentate, dando risalto alla sinergia e la compenetrazione tra le varie strategie. Successivamente, le analisi condotte separatamente sono state riunite nella

creazione di tabelle di analisi, come quelle che verranno presentate relativamente ad alcuni stralci di discussione (Tabelle 7, 8, 9), al fine di evidenziare la contemporanea attivazione o realizzazione di diverse strategie.

Mostreremo, al termine del paragrafo 5, che cosa è stato possibile discutere a partire dall'analisi condotta con gli indicatori, mostrando la funzionalità di questo strumento sia per il monitoraggio di sequenze didattiche che per l'analisi delle pratiche del docente, con l'obiettivo di riflettere sia sulla progettazione didattica che sulla consapevolezza dell'insegnante coinvolto.

#### 4. Gli Indicatori

In questo paragrafo presentiamo come le strategie di valutazione formativa sono state elaborate in termini di indicatori. Preliminarmente, e facendo riferimento a quanto illustrato nel quadro teorico, sintetizziamo gli specifici obiettivi di apprendimento delle attività didattiche: lo sviluppo del pensiero algebrico (Caratterizzazione 1) e lo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica (Caratterizzazione 2).

*Caratterizzazione 1 - C1. Pensiero algebrico (adattamento da Arcavi, 1994):*

- uso corretto dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni;
- consapevolezza del fatto che in alcuni casi è più conveniente abbandonare i simboli a favore di altri approcci;
- consapevolezza dell'importanza di affrontare la dialettica tra manipolazione e interpretazione dei simboli;
- consapevolezza del fatto che è possibile creare espressioni simboliche, e capacità di farlo;
- consapevolezza dell'importanza di selezionare, ma anche abbandonare o modificare, una rappresentazione simbolica;
- consapevolezza dell'importanza di controllare costantemente il significato dei simboli durante la risoluzione dei problemi;
- consapevolezza del fatto che i simboli possono assumere ruoli diversi.

*Caratterizzazione 2 - C2. Competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica:*

- comportamento razionale relativamente alla componente epistemica (con particolare riferimento a correttezza e completezza);
- comportamento razionale relativamente alla componente teleologica (con particolare riferimento alla strategia per risolvere il problema, alle azioni orientate all'obiettivo...);
- comportamento razionale relativamente alla componente comunicativa (con particolare riferimento alla chiarezza);

- consapevolezza dell'importanza di fornire spiegazioni;
- consapevolezza dei criteri per una buona argomentazione;
- consapevolezza del ruolo degli esempi nell'argomentazione.

La prima strategia di valutazione formativa, FA1, si focalizza sulla esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento dell'attività e dei relativi criteri di successo (Tabella 2). Per quanto riguarda gli indicatori di attivazione, FA1.1 è orientata allo sviluppo del pensiero algebrico e si basa sui sette punti della caratterizzazione di symbol sense delineata da Arcavi (1994). L'insegnante può attivare tale strategia in fase di discussione, per esempio in fase di restituzione di un questionario, ma anche delle richieste di riflessione individuale, mettendo in luce il ruolo dell'algebra all'interno delle produzioni degli studenti. È possibile osservare l'indicatore di attivazione FA1.1 anche durante l'introduzione dell'attività, quando l'insegnante chiarisce gli obiettivi dell'attività stessa.

L'indicatore corrispondente di avvenuta realizzazione si riferisce alla capacità dello studente di dimostrare consapevolezza degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo legati al pensiero algebrico, come ad esempio il riconoscimento dell'importanza dell'algebra per generalizzare, in linea con la strategia FA1.1(a). È possibile individuare indicatori di avvenuta realizzazione nelle discussioni quando gli studenti descrivono come hanno usato l'algebra per generalizzare un certo esempio numerico.

FA1.2, invece, è indicatore di sviluppo della competenza argomentativa nella dimostrazione algebrica. Per l'attivazione di questa strategia si considerano interventi dell'insegnante finalizzati a evidenziare l'importanza dell'argomentazione e i criteri per una buona argomentazione, con un focus particolare sulle tre dimensioni del comportamento razionale (dimensione epistemica, teleologica e comunicativa). È possibile per l'insegnante attivare l'indicatore FA1.2 tramite task individuali che richiedono di spiegare e motivare le scelte effettuate. La proiezione alla LIM di alcune di tali risposte può creare le condizioni per verificarne l'avvenuta realizzazione.

Infatti, l'indicatore di avvenuta realizzazione associato a FA1.2 si riferisce alla consapevolezza dello studente degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo riguardanti l'argomentazione in ambito algebrico, evidenziando sia la capacità di superare schemi dimostrativi basati su esempi numerici o in generale su verifiche empiriche, sia quella di argomentare in modo razionale. È possibile identificare l'avvenuta realizzazione dell'indicatore FA1.2 in fase di discussione collettiva quando uno studente riconosce come corretta/non corretta, completa/non completa, comprensibile/non comprensibile l'argomentazione proposta da un/a altro/a studente/ssa.

**Tabella 2**

*Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA1, che si focalizza sull'esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento dell'attività e dei relativi criteri di successo). FA1.1 riguarda lo sviluppo del pensiero algebrico, mentre FA1.2 riguarda lo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica*

<i>FA1</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA1.1	<p>L'insegnante sottolinea/rende espliciti gli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1). In particolare:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. sottolinea/rende esplicita l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni</li> <li>b. evidenzia che in alcuni casi è più conveniente abbandonare i simboli a favore di altri approcci</li> <li>c. rende esplicita l'importanza di affrontare la dialettica tra manipolazione e interpretazione dei simboli</li> <li>d. sottolinea la possibilità di creare espressioni simboliche, e la capacità di farlo</li> <li>e. sottolinea l'importanza di selezionare, ma anche di abbandonare o modificare, una rappresentazione simbolica</li> <li>f. sottolinea l'importanza di controllare costantemente il significato dei simboli durante la risoluzione dei problemi</li> <li>g. sottolinea che i simboli possono assumere ruoli diversi</li> </ul>	<p>Lo/a studente/ssa dimostra di essere consapevole degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo riguardanti il pensiero algebrico (vedi C1) (ad esempio, menzionando l'importanza dell'uso dell'algebra per generalizzare, in riferimento alla strategia cfr. FA1.1(a))</p>
FA1.2	<p>L'insegnante sottolinea/rende espliciti gli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2). In particolare:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. sottolinea l'importanza di fornire spiegazioni</li> <li>b. chiarisce i criteri per una buona argomentazione</li> <li>c. promuove una riflessione sulla componente epistemica (con particolare riferimento a correttezza e completezza)</li> <li>d. promuove una riflessione sulla componente teleologica (strategia per risolvere il problema, azioni orientate all'obiettivo...)</li> <li>e. promuove una riflessione sulla componente comunicativa (comprensibilità della soluzione, ...)</li> <li>f. promuove una riflessione sul ruolo degli esempi nell'argomentazione</li> </ul>	<p>Lo/a studente/ssa dimostra di essere consapevole degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo relativi all'argomentazione (vedi C2) (ad esempio, riconoscendo la necessità di andare oltre gli esempi numerici per dimostrare cfr. FA1.2(f))</p>

La seconda strategia di valutazione formativa si concentra sulla progettazione e realizzazione di attività didattiche volte a rendere visibile l'apprendimento degli studenti, nel nostro caso con particolare riferimento agli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo del pensiero algebrico e della competenza argomentativa. Il design della sequenza didattica può includere attività come il lavoro in piccolo gruppo, le discussioni collettive e i momenti di autovalutazione progettati in quest'ottica. Queste scelte rappresentano l'attivazione della strategia FA2 (Tabella 3, Colonna 1).

Gli indicatori di attivazione riguardano quindi la progettazione dell'attività, che deve prevedere momenti di confronto tra strategie (ad esempio, attraverso la proiezione su LIM delle soluzioni proposte dagli/le studenti/esse), per stimolare una riflessione sul valore del linguaggio algebrico (FA2.1), oppure momenti di confronto tra argomentazioni, al fine di promuovere la competenza argomentativa (FA2.2). Possiamo trovare tali indicatori di attivazioni in domande di apertura delle discussioni collettive, del tipo: "Confrontate le strategie proposte da ognuno di voi. Quali sono i punti di forza e di debolezza di ciascuna?", in linea con gli indicatori di attivazione FA2.2(a) e FA2.2(b), in quanto stimola il confronto critico tra le argomentazioni. È anche possibile attivare le strategie FA2 richiedendo che i risultati di un lavoro di gruppo vengano presentati alla LIM. Questo può permettere la condivisione e l'analisi dei punti di forza e di debolezza di ogni soluzione (FA2.1) e argomentazione (FA2.2), a partire dai materiali prodotti dai gruppi stessi.

Gli indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 3, Colonna 2) includono sia l'insegnante che formula domande mirate a raccogliere evidenze sul percorso di apprendimento degli studenti (relative, rispettivamente, al pensiero algebrico o alla competenza argomentativa), sia lo/a studente/ssa che, attraverso i propri interventi, fornisce elementi utili per comprendere il suo percorso di apprendimento in relazione a questi aspetti. Per esempio, possiamo trovare evidenze di avvenuta realizzazione di queste strategie nelle risposte degli studenti ad un questionario di autovalutazione quando le domande proposte stimolano le riflessioni individuali e nel rispondere, gli studenti portano evidenze del proprio percorso di apprendimento sia in riferimento al pensiero algebrico, sia in riferimento all'argomentazione.

Osserviamo qui che, rispetto agli indicatori relativi alle altre strategie di valutazione formativa, gli indicatori relativi alla strategia FA2 hanno una peculiarità: l'attivazione riguarda la progettazione dell'attività, mentre l'avvenuta realizzazione riguarda il fatto che quanto progettato sia poi attuato (per esempio, l'insegnante conduce la discussione precedentemente pianificata, ponendo le opportune domande al fine di raccogliere informazioni sul processo di apprendimento degli studenti).

**Tabella 3**

*Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA2, riguardante la progettazione e implementazione di attività didattiche volte a mettere in luce l'apprendimento degli studenti. FA2.1 concerne il design di attività che consentono di mettere in luce lo sviluppo del pensiero algebrico mentre FA2.2 il design di attività che rendono evidente il processo di apprendimento della competenza argomentativa volta alla dimostrazione algebrica*

<i>FA2</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA2.1	<p>Il design include attività quali lavoro di piccolo gruppo, discussione in classe e autovalutazione, mirate a far emergere il percorso di sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1), quindi, in particolare a:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>confrontare strategie di risoluzione e soluzioni, con particolare riferimento all'uso dell'algebra come strumento dimostrativo</li> <li>riflettere sui punti di forza e debolezza delle strategie di risoluzione (ad esempio, la scelta della formalizzazione)</li> <li>chiedere agli studenti di esplicitare il proprio processo di risoluzione, con particolare riferimento all'uso dell'algebra come strumento dimostrativo</li> </ol>	<p>L'insegnante pone domande volte a far emergere riscontri sul percorso di apprendimento degli/delle studenti/studentesse, con riferimento al pensiero algebrico (vedi C1)</p> <p>Lo/a studente/ssa fornisce riscontri sul proprio percorso di apprendimento, in riferimento al pensiero algebrico (vedi C1).</p>
FA2.2	<p>Il design include attività quali lavoro di piccolo gruppo, discussione in classe e autovalutazione, mirate a far emergere il percorso di sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2), quindi, in particolare a:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>confrontare argomentazioni e valutarle in termini di correttezza, completezza e chiarezza</li> <li>riflettere sui punti di forza e debolezza delle argomentazioni (ad esempio, il ruolo degli esempi numerici nella dimostrazione) e valutare l'appropriatezza e la funzionalità delle strategie impiegate in riferimento agli obiettivi</li> <li>chiedere agli studenti di esplicitare le loro scelte strategiche in fase di processo di argomentazione e creazione del prodotto argomentativo (ad esempio, l'uso di termini specialistici)</li> </ol>	<p>L'insegnante pone domande volte a far emergere riscontri sul percorso di apprendimento, con riferimento alla competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica (vedi C2)</p> <p>Lo/a studente/ssa fornisce riscontri sul proprio percorso di apprendimento, in riferimento alla competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica (vedi C2)</p>

La terza strategia di valutazione formativa si focalizza sui feedback, intesi come informazioni fornite allo studente. Tali feedback mirano a rendere lo studente consapevole degli obiettivi di apprendimento, del livello raggiunto e delle azioni da intraprendere per migliorare. Considerando che si vogliono individuare indicatori specifici per i due obiettivi di apprendimento (pensiero algebrico e competenza argomentativa), scegliamo di fare riferimento alla classificazione dei feedback descritti da Hattie e Timperley (2007), prendendo in considerazione, in particolare, il feedback sul compito (che riguarda la comprensione del testo e la correttezza della risposta) e il feedback sullo svolgimento del compito (inerente i processi di risoluzione adottati).

Gli indicatori di attivazione (Tabella 4, Colonna 1) si riferiscono dunque al fatto che l'insegnante fornisce feedback sulla comprensione del compito, sul processo risolutivo e sulla risposta finale in relazione all'uso del linguaggio algebrico (FA3.1) e all'argomentazione (FA3.2).

È possibile riscontrare indicatori di attivazione della strategia FA3.1 durante le discussioni collettive dei risultati quando, per esempio, l'insegnante riporta alla lavagna il disegno risolutivo di un gruppo di studenti e chiede agli altri studenti di cercare di capire il processo risolutivo dei compagni. In tale discussione l'insegnante può sottolineare l'importanza di condividere, all'interno della comunità classe, la stessa scrittura algebrica (FA3.1) per poter comprendere la soluzione di altri.

Ancora, l'insegnante può fornire un feedback specifico sulla correttezza, chiarezza e completezza di una argomentazione fornita da un'alunna o un alunno, attivando l'indicatore FA3.2(c).

Gli indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 4, Colonna 2) riguardano la capacità dello/a studente/ssa, dopo aver ricevuto il feedback, di esplicitare il proprio processo di pensiero, di compiere un passo avanti nel proprio processo di apprendimento e di riconoscere il progresso ottenuto.

Per esempio, se sono proposti dei questionari di autovalutazione, gli/le studenti/sse possono esplicitare cosa li ha aiutati a sviluppare il proprio processo di pensiero algebrico FA3.2(i) o quali elementi rendono forte/debole la propria argomentazione FA3.2 (i).

**Tabella 4**

*Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA3, che viene attivata dai feedback forniti dall'insegnante allo studente (per renderlo consapevole degli obiettivi di apprendimento, del livello di apprendimento raggiunto e di ciò che può mettere in atto per migliorare) e viene compiutamente realizzata in presenza di una risposta di quest'ultimo che dà seguito allo stimolo ricevuto. FA3.1 riguarda i feedback relativi al pensiero algebrico mentre FA3.2 relativi alla competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica*

<i>FA3</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA3.1	L'insegnante fornisce feedback volti a favorire lo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1), quindi, in particolare: <ol style="list-style-type: none"> <li>sull'utilizzo del pensiero algebrico nella comprensione e risoluzione del task</li> <li>sull'utilizzo del pensiero algebrico per il problem solving più in generale</li> </ol>	Lo/la studente/ssa, sulla base dei feedback ricevuti: <ol style="list-style-type: none"> <li>esplicita il proprio ragionamento per rendere trasparenti i propri processi di pensiero,</li> <li>mostra un avanzamento rispetto al proprio percorso di apprendimento (rispetto alla soluzione del task, rispetto allo sviluppo del pensiero algebrico - vedi C1)</li> <li>riconosce il proprio posizionamento rispetto agli obiettivi auspicati (in termini di sviluppo del pensiero algebrico - vedi C1)</li> </ol>
FA3.2	L'insegnante fornisce feedback volti a favorire lo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2), quindi, in particolare: <ol style="list-style-type: none"> <li>sull'uso dell'algebra e degli esempi numerici per dimostrare</li> <li>sull'appropriatezza delle strategie utilizzate</li> <li>sull'argomentazione prodotta, con particolare riferimento ai criteri di correttezza, completezza e chiarezza (ad esempio l'uso di termini specialistici)</li> </ol>	Lo/la studente/ssa: <ol style="list-style-type: none"> <li>Riconosce punti di forza/debolezza della propria argomentazione (vedi C2)</li> <li>Riformula la propria argomentazione seguendo i feedback indicati (ad esempio, l'uso appropriato di termini specialistici) (vedi C2)</li> <li>Mostra un'evoluzione nella sua competenza argomentativa (ad esempio, riconosce i criteri di una buona argomentazione - vedi C2).</li> </ol>

La quarta strategia di valutazione formativa si propone di fare in modo che gli studenti diventino risorse gli uni per gli altri. Questo concetto ha qui una doppia valenza: uno studente può essere risorsa per i propri compagni sia condividendo il proprio processo di pensiero sia fornendo feedback alla risposta di un compagno.

Gli indicatori di attivazione (Tabella 5, Colonna 1) tengono conto di entrambe le due accezioni collegandole rispettivamente allo sviluppo del pensiero algebrico (FA4.1) e alle competenze argomentative (FA4.2). Questi



indicatori possono riguardare sia l'intervento dello studente sia l'eventuale invito a intervenire formulato dal docente.

Possiamo, per esempio, trovare riscontro dell'indicatore FA4.2(a) quando l'insegnante coinvolge la classe chiedendo di commentare l'argomentazione di un/a compagno/a in fase di discussione collettiva dei risultati (Cusi & Morselli, 2024).

Gli indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 5, Colonna 2) si osservano negli altri studenti del gruppo classe che traggono vantaggio dall'essere sostenuti da un compagno. Tali indicatori, declinati per il pensiero algebrico in FA4.1 e per la competenza argomentativa in FA4.2, riguardano la capacità di un membro della classe di recepire e applicare il feedback ricevuto o di utilizzare le riflessioni condivise dal compagno. Spesso, questo si manifesta (pertanto è indicatore di avvenuta realizzazione) quando, in una fase successiva del percorso di apprendimento, lo studente fa riferimento proprio a quel feedback o a quelle riflessioni del compagno. Indicatori di avvenuta realizzazione dell'indicatore FA4.2 si possono riscontrare, per esempio, nei questionari di autovalutazione o nelle discussioni dove gli studenti mostrano progresso a partire dall'idea di un altro studente.

**Tabella 5**

*Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA4: gli studenti diventano risorse gli uni per gli altri. FA4.1 riguarda l'intervento di studenti/sse o la richiesta dell'insegnante circa il dare feedback relativi allo sviluppo del pensiero algebrico o allo spiegare la propria soluzione ai/alle pari. FA4.2 riguarda l'intervento di studenti/sse o la richiesta dell'insegnante circa il dare feedback relativo allo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica*

<i>FA4</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA4.1	<p>Lo/a studente/sa interviene per/ l'insegnante sprona gli/le studenti/sse a intervenire per favorire lo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1), quindi, in particolare:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>commentare/ dare feedback riguardo la risposta/l'intervento di un/una altro/a studente/sa riguardo all'uso dell'algebra e degli esempi numerici. (ad esempio, la scelta di usare o no l'algebra / la modalità di usare l'algebra)</li> <li>spiegare la propria risposta ai/alle pari per aiutare la loro comprensione, con particolare riferimento all'uso dell'algebra e degli esempi numerici</li> </ol>	<p>In riferimento allo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1):</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Lo/la studente/sa riconosce il feedback ricevuto.</li> <li>Lo/la studente/sa trae vantaggio dal feedback ricevuto o dalla comparazione con i/le pari (ad esempio, modificando la propria soluzione in accordo).</li> <li>Lo/la studente/sa fa riferimento al feedback ricevuto/ le strategie dei/delle pari in un passo successivo del suo percorso d'apprendimento</li> </ol>
FA4.2	<p>Lo/a studente/sa interviene per/ l'insegnante sprona gli/le studenti/sse a intervenire per favorire lo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2), quindi, in particolare:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>commentare/ dare feedback riguardo l'argomentazione di un/una altro/a studente/sa, con particolare riferimento alle scelte strategiche e alla correttezza, chiarezza e completezza dell'argomentazione prodotta</li> <li>spiegare la propria argomentazione ai/alle pari per aiutare la loro comprensione</li> </ol>	<p>In riferimento allo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2):</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Lo/la studente/sa riconosce il feedback ricevuto.</li> <li>Lo/la studente/sa trae vantaggio dal feedback ricevuto o dalla comparazione con i/le pari (ad esempio, modificando la propria argomentazione in accordo).</li> <li>Lo/la studente/sa fa riferimento al feedback ricevuto/ le strategie dei/delle pari in un passo successivo del suo percorso d'apprendimento</li> </ol>

Infine, la quinta strategia di valutazione formativa riguarda il fatto che ciascuno studente diventa responsabile del proprio apprendimento, in ottica di autovalutazione. Questo comporta la capacità di rendere conto del proprio processo di apprendimento e la capacità di sapersi situare rispetto ai pari e rispetto agli obiettivi di apprendimento condivisi. Gli indicatori di attivazione (Tabella 6, Colonna 1) declinano queste capacità rispetto allo sviluppo del pensiero algebrico (FA5.1) e alle competenze argomentative (FA5.2),

prendendo in considerazione tanto l'intervento dello studente quanto l'eventuale invito a intervenire formulato dal docente. I corrispondenti indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 6, Colonna 2) si riferiscono alla capacità dello studente di descrivere il proprio processo di apprendimento in relazione agli specifici obiettivi di apprendimento (pensiero algebrico in FA5.1, competenza argomentativa in FA5.2). Per esempio, indicatore di attivazione è lo studente che si posiziona rispetto agli obiettivi di apprendimento chiedendo un chiarimento durante una discussione (FA5.1(c)) o anche dichiarando, in un questionario di autovalutazione, di non aver compreso appieno alcuni significati matematici trattati durante la lezione.

Rispetto all'avvenuta realizzazione, esempio dell'indicatore (FA5.1(ii)) è lo studente che esplicita il suo feeling con i simboli e la fiducia nella dimostrazione algebrica.

**Tabella 6**

*Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA5: ciascuno studente diventa responsabile del proprio apprendimento, in ottica di autovalutazione. FA5.1 riguarda l'intervento degli/lle studenti/sse (in modo autonomo o in risposta alla richiesta dell'insegnante) per rendere esplicito il proprio processo di apprendimento, confrontarsi con le soluzioni dei/delle pari e posizionarsi rispetto agli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo del pensiero algebrico, mentre FA5.2 rispetto allo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica*

FA5	Indicatore di attivazione	Indicatori di avvenuta realizzazione
FA5.1	<p>Lo/a studente/ssa interviene per / l'insegnante sprona gli/le studenti/sse al fine di promuovere lo sviluppo del pensiero algebrico, (vedi C1) quindi, in particolare:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a rendere trasparente ed esplicito il proprio processo di apprendimento rispetto all'uso/ il non uso dell'algebra e ai modi di farne uso per la risoluzione di problemi</li> <li>a confrontare le soluzioni dei/delle pari per comprendere altre strategie e modalità di fare uso dell'algebra per risolvere problemi</li> <li>a identificare il proprio posizionamento rispetto agli obiettivi di apprendimento dello sviluppo del pensiero algebrico</li> </ol>	<p>Se il suggerimento viene dall'insegnante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Lo/a studente/ssa rende trasparente ed esplicito il processo d'apprendimento</li> <li>Lo/a studente/ssa sa posizionare sé stesso/a rispetto all'obiettivo d'apprendimento dello sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1)</li> <li>Lo/a studente/ssa riconosce che l'ascolto attivo delle soluzioni dei compagni rappresenta una risorsa per il proprio apprendimento</li> </ol> <p>Se l'attivazione è a carico dello/a studente/ssa, essa coincide con la realizzazione della strategia</p>
FA5.2	<p>Lo/a studente/ssa interviene per / l'insegnante sprona gli/le studenti/sse al fine di promuovere lo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2) quindi in particolare:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a mostrare/ descrivere/ esplicitare/ giustificare il proprio processo argomentativo e l'argomentazione prodotta</li> <li>a confrontare le argomentazioni dei/delle pari per comprendere altre strategie e modalità di argomentare</li> <li>a identificare il proprio posizionamento rispetto agli obiettivi di apprendimento di sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica</li> </ol>	<p>Se il suggerimento viene dall'insegnante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Lo/a studente/ssa mostra/ descrive/esplicita/ giustifica la propria argomentazione</li> <li>Lo/a studente/ssa sa posizionare se stesso/a rispetto all'obiettivo di apprendimento dello sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2)</li> <li>Lo/a studente/ssa riconosce che l'ascolto attivo delle argomentazioni dei compagni rappresenta una risorsa per il proprio apprendimento</li> </ol> <p>Se l'attivazione è a carico dello/a studente/ssa, essa coincide con la realizzazione della strategia</p>

## 5. Un'Esemplificazione dell'Uso degli Indicatori

Per esemplificare l'uso dello strumento e discuterne la funzionalità, illustreremo, in questo paragrafo, l'analisi condotta su un caso studio: una sequenza didattica volta a promuovere la competenza argomentativa e il pensiero algebrico, co-progettata all'interno della comunità di ricerca DIVA al DIMA. Dapprima, presenteremo la sequenza didattica che è stata progettata sotto la guida del TRU e ha previsto la valutazione formativa come elemento cardine del design (tuttavia, presenteremo esclusivamente le fasi della sequenza didattica, rimandando a Quartara et al. (2024) per una discussione approfondita delle scelte di progettazione e del loro collegamento con le dimensioni del TRU). Di seguito, forniremo degli esempi di analisi, mostrando dapprima l'uso sistematico degli indicatori, in riferimento ad alcuni stralci di discussione. Inoltre, avvalendosi di esempi tratti da altre fasi della sequenza didattica, daremo contezza del monitoraggio attuato sull'intera progettazione. Infine, discuteremo la possibile interpretazione dell'analisi condotta con gli indicatori al fine, da un lato, di utilizzare questo strumento per monitorare la progettazione e implementazione didattica della sequenza e, dall'altro, di promuovere la riflessione del docente sulla propria pratica didattica.

### 5.1. Il Caso Studio

Il percorso didattico si è svolto nel mese di maggio 2023, per un totale di 8 ore curricolari, in una classe prima di liceo scientifico (opzione scienze applicate) composta da 18 studenti. La sequenza è caratterizzata da quattro fasi (Figura 2): individuale, piccolo gruppo, discussione di classe e autovalutazione.

**Figura 2**

*Le fasi dell'attività didattica*



La fase individuale è stata progettata per favorire una prima esplorazione della situazione matematica proposta nella scheda, con l'obiettivo di arrivare alla formulazione di una congettura motivata. Lo studente è stato coinvolto in una sfida autentica e produttiva, in cui le consegne non si limitavano a richiedere semplici risposte, ma stimolavano anche spiegazioni che potessero essere poi condivise con il gruppo.

La prima scheda, da svolgere individualmente, presenta una versione

riadattata di un quesito INVALSI (si veda Quartara, 2024 per il dettaglio della progettazione), *se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri  $2n+1$ ,  $2n+3$ ,  $2n+5$ ?*, e dalla consegna *dopo aver letto il quesito compi una prima esplorazione della situazione proposta. Si tratta di un primo approccio al problema per cui non sentirti costretto/a a dover fornire una congettura definitiva.*

La seconda scheda, sempre individuale, propone il seguente quesito: *L'insegnante chiede: "Se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri  $2n+1$ ,  $2n+3$  e  $2n+5$ ?" Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri". Luisa afferma: "Si ottiene sempre un numero dispari". Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3". A seguito della tua esplorazione iniziale del problema e avendo letto le affermazioni di Mario, Luisa e Giovanni discuti, motivando la scelta, il valore di verità delle tre affermazioni".*

La terza scheda, da svolgere in piccolo gruppo, apre la seconda fase della sequenza didattica. Si presenta il quesito nella forma originale INVALSI, seguito da una consegna riformulata: *L'insegnante chiede: "Se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri  $2n+1$ ,  $2n+3$  e  $2n+5$ ?" Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri". Luisa afferma: "Si ottiene sempre un numero dispari". Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3". Chi ha ragione? A. Tutti e tre B. Solo Mario C. Solo Luisa D. Solo Giovanni. Scrivi qual è la soluzione scelta dal gruppo, specifica il motivo di tale scelta e spiega perché sono state scartate le altre opzioni.*

Dopo aver raccolto le risposte condivise di ciascun gruppo, si è passati alla discussione. Le soluzioni sono state proiettate alla lavagna e presentate alla classe dai gruppi. Successivamente, il docente e gli studenti hanno discusso le caratteristiche delle argomentazioni fornite a supporto delle diverse soluzioni. La sequenza didattica si è conclusa con un questionario di autovalutazione, somministrato tramite un modulo di Google, che conteneva le seguenti domande:

1. *Nell'affrontare il quesito hai avuto momenti di blocco? Se sì, quali?*
2. *Se hai avuto momenti di blocco che cosa hai fatto per provare a superarli?*
3. *Nella discussione nel piccolo gruppo hai condiviso il tuo ragionamento e la strategia per affrontare il quesito? Hai contribuito per la costruzione della risposta di gruppo?*
4. *Hai avuto difficoltà nell'ascoltare le opinioni dei tuoi compagni? Ti è servito il confronto per arrivare alla soluzione del quesito?*
5. *L'algebra dove è intervenuta e in che cosa ci ha aiutato?*
6. *Fai riferimento all'attività sul pensiero algebrico. Scrivi una domanda che vorresti fare alla classe.*

Nella progettazione dell'intero percorso si possono individuare scelte orientate

all'attivazione di strategie di valutazione formativa. Le indicazioni contenute nelle schede individuali sottolineano l'importanza di fornire risposte argomentate, con esplicitazione di uno degli obiettivi di apprendimento dell'attività (FA1). Inoltre, richiedere risposte argomentate è un modo per rendere il pensiero visibile (FA2) e quindi favorire i feedback da parte del docente (FA3) e dei pari (FA4). In questo senso, l'argomentazione diventa strumento per la valutazione formativa, come rilevato in Cusi, Morselli & Sabena (2017). La discussione di classe è un momento cruciale in cui il docente raccoglie informazioni sullo stato di apprendimento (FA2) e in cui gli studenti, giustificando le proprie risposte e commentando le risposte altrui, sono attivati come responsabili del loro apprendimento (FA5) e risorse per i compagni (FA4). Anche i momenti di lavoro di gruppo sono funzionali ad attivare gli studenti come risorse per i compagni (FA4). Infine, il questionario è stato ideato e realizzato con due finalità: dal punto di vista del ricercatore, è volto a monitorare le cinque dimensioni del quadro TRU. In particolare, la domanda 6 è formulata in ottica di valutazione formativa, per poter prendere decisioni sui passi successivi dell'attività, basandosi sulle necessità emergenti degli studenti. Dal punto di vista dello studente, l'intero questionario intende stimolare riflessioni meta legate all'autovalutazione (FA5). In questo senso, possiamo affermare che la valutazione formativa sia un elemento cardine della progettazione in oggetto.

## 5.2. *L'Analisi del Caso Studio Mediante gli Indicatori*

Presentiamo ora alcuni stralci dell'analisi condotta con gli indicatori di attivazione e realizzazione, a scopo esemplificativo, per mostrare dove essi possono essere rintracciati e il loro impiego come strumento analitico.

### 5.2.1. *Indicatori di Attivazione e Realizzazione: Dove Trovarli?*

Gli indicatori di attivazione, che contrassegnano momenti nei quali si creano le condizioni per la realizzazione delle strategie di valutazione formativa, possono essere ricercati in quelle fasi della sequenza didattica che sono state esplicitamente concepite in riferimento alla dimensione del TRU legata alla valutazione formativa, come descritto nella sezione precedente. Per quanto riguarda gli indicatori di compiuta realizzazione, questi sono invece da ricercarsi conseguentemente all'attivazione delle strategie. In particolare, all'interno del caso studio presentato, possiamo ricercare indicatori di realizzazione della strategia FA1 negli interventi degli studenti della discussione, come anche in risposta alla domanda del questionario di autovalutazione "*L'algebra dove è intervenuta e in che cosa ci ha aiutato?*".

La strategia FA2 si caratterizza in modo differente rispetto alle altre strategie. Infatti, la sua attivazione si concretizza in fase di progettazione e la sua realizzazione avviene quando le scelte di progettazione offrono opportunità di attivare le altre strategie di valutazione formativa. Dunque,

nell'implementazione didattica, è possibile trovare esclusivamente traccia della sua compiuta realizzazione. La strategia FA3 si vede realizzata sia nella discussione, quando gli studenti traggono beneficio dalle indicazioni del docente, ovvero nell'osservazione della progressione del loro apprendimento prima e dopo gli scambi con il docente. La strategia FA4 si realizza nel momento in cui gli studenti progrediscono nel loro apprendimento grazie allo scambio coi compagni, in fase di lavoro di gruppo ma anche di discussione collettiva. La strategia FA5 si realizza soprattutto quando gli studenti, nelle discussioni, esprimono un loro posizionamento rispetto al raggiungimento degli obiettivi dell'attività, indicano le proprie difficoltà e si fanno carico delle proprie affermazioni; la stessa strategia FA5 si trova realizzata anche nei moduli di autovalutazione, quando gli studenti riconoscono l'apporto fornito dai compagni per il proprio apprendimento.

Per fornire un esempio del possibile utilizzo sistematico degli indicatori, si è scelto di presentare in dettaglio l'analisi relativa all'attivazione e l'avvenuta realizzazione delle strategie di valutazione formativa in tre episodi tratti dalla discussione che ha fatto seguito alla risoluzione del task. Nella discussione con l'intera classe, infatti, risulta particolarmente evidente l'intrecciarsi delle diverse strategie attivate e realizzate. Tuttavia, sottolineiamo che non tutte le strategie vedono come momento principe della loro attivazione e realizzazione questa fase. Completeremo perciò con brevi esempi dell'analisi condotta sugli altri dati (ad esempio, le risposte ai moduli di autovalutazione).

### 5.2.2. *Un Esempio del Processo di Analisi*

Forniamo, dapprima, un'esemplificazione di come abbiamo proceduto ad associare gli indicatori agli interventi nella discussione, per rendere trasparente il processo di analisi. In particolare, l'esempio che proponiamo riguarda la strategia FA1 ed evidenzia come gli indicatori permettano di monitorare la valutazione formativa come processo che evolve in un arco temporale, nell'interazione dei membri della classe.

Troviamo tracce dell'attivazione della strategia FA1 (esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento) negli interventi del docente volti a chiarire gli obiettivi auspicati. Ad esempio, all'interno dell'episodio 1 della discussione (Tabella 7), dato che l'insegnante sottolinea l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare generalizzazioni, al seguente intervento (intervento 14.) abbiamo associato l'indicatore FA1.1(a) (sottolinea/rende esplicita l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni):

T: “[...] Beh sì, è la potenza dell'algebra: quella di generalizzare e condensare in una scrittura atomica infiniti numeri. Effettivamente è così eh,  $2n$ : abbiamo scritto in un secondo gli infiniti numeri pari [...]”

L'avvenuta realizzazione della strategia FA1 ha luogo, invece, quando troviamo



traccia nei protocolli degli studenti, negli interventi degli studenti durante la discussione o nei questionari di autovalutazione, dell'appropriazione degli obiettivi di apprendimento esplicitamente dichiarati dall'insegnante. Un esempio che riguarda gli interventi degli studenti nella discussione, di attivazione della strategia FA1.1(a), lo troviamo all'interno dell'episodio 3 (Tabella 9, intervento 8.):

Fede: “[...] si somma un numero dispari è inteso come qualunque numero dispari. In questo modo avevamo bisogno di una scrittura che potesse generalizzare un qualsiasi numero dispari, quindi abbiamo utilizzato  $2n+1$ ”

### 5.2.3. *I Tre Stralci di Discussione Collettiva*

Mostriamo adesso l'analisi di tre episodi, selezionati dalla discussione di classe che ha introdotto il secondo incontro della sequenza didattica. Durante il primo incontro, gli studenti hanno affrontato il lavoro individuale e in piccolo gruppo sulla risoluzione del task, e una successiva discussione di sintesi focalizzata sulla correttezza delle soluzioni. Consolidata la validità delle risposte, il secondo incontro si è incentrato su una meta-riflessione mirata ad approfondire le argomentazioni prodotte dagli studenti. In particolare, il dibattito ha messo in luce il ruolo degli esempi numerici nelle argomentazioni, un aspetto individuato dal docente come strategico per supportare il passaggio dall'aritmetica al pensiero algebrico. Gli interventi delle discussioni relative ai tre episodi sono stati trascritti nella prima colonna delle Tabelle 7-8-9 che presentiamo, mentre nelle due colonne di destra sono rappresentati gli indicatori di attivazione e di avvenuta realizzazione.

Il primo episodio (min. 24:13 - min. 27:10 della seconda parte della discussione) è stato scelto perché illustra in modo evidente l'implementazione di strategie di valutazione formativa da parte del docente. L'insegnante (T) - unico attivatore di strategie in questa fase - interviene con l'obiettivo di identificare le criticità presenti nelle argomentazioni degli studenti e di guidarli verso gli obiettivi di apprendimento, ponendo enfasi sull'uso dell'algebra e sul ruolo degli esempi numerici nelle argomentazioni (in particolare, nell'intervento 14., pone enfasi su molteplici aspetti degli obiettivi legati al pensiero algebrico, dapprima a, poi b e d - Tabella 1). Il docente, inoltre, incoraggia gli studenti a giustificare le proprie scelte (interventi 1. e 3. sollecitano a giustificare il ruolo dell'esempio numerico nella argomentazione volta alla dimostrazione, 11.), attivandoli (attuando FA3 e FA5) sia come risorsa per sé stessi che per i compagni, offrendo feedback orientati al miglioramento (interventi 5., 9., 11.). Parallelamente, gli studenti rispondono con interventi che evidenziano una crescente consapevolezza del proprio apprendimento, posizionandosi attivamente rispetto agli obiettivi proposti (in particolare, intervento 8., 12.) e contribuendo con spiegazioni per supportare le risoluzioni proposte (intervento 2., 4., 6.), come anche per argomentare le affermazioni dei compagni (intervento 13).

**Tabella 7***Analisi attraverso gli indicatori di attivazione e compiuta realizzazione dell'episodio 1*

<i>EPISODIO 1</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di compiuta realizzazione</i>
1. T: “Bene. Perché? Fede, se lo ricorda Fede perché avete fatto un esempio?”	FA1.2(f) FA5.1 FA5.2	FA2.1 FA2.2
2. Fede: “Abbiamo fatto un esempio per verificare che ... perché comunque volevamo anche una conferma pratica del fatto che la nostra osservazione fosse vera. Volevamo anche dare un modo per quando avremmo, magari, presentato anche per, come dire, avere un punto in più d'appoggio, non saprei”		FA2.2 FA5.2
3. T: “Sentiamo anche gli altri due. L'avete messo come punto su cui appoggiarsi, come punti di appoggio, come ancora di sicurezza, provare con $n=1$ e far vedere che viene 15?”	FA3.2(a) FA5.2	FA2.2
4. Franci: “Sì, cioè sì, anche se sappiamo che non generalizza tutti i numeri. Cioè, generalizzare tutti i numeri lo abbiamo già scritto sopra con $6n+9$ e 3 per $2n+3$ , però abbiamo deciso di mettere un esempio non per confermare ma ...”		FA1.2(d) FA2.2 FA3.1 FA3.2 FA1.1(c) FA2.1 FA5.2
5. T: “Non vi fidate ancora tanto dell'algebra ma dei numeri ancora sì. Domanda, posso? Sembrerebbe così. Tu hai detto: sopra, algebricamente, lo abbiamo già fatto vedere in generale, poi abbiamo fatto l'esempio numerico. Allora io mi chiedo: perché non ci fidiamo ancora completamente dell'algebra che va a generalizzare, quindi devo fare uno sforzo ... [gesto come un corno che si origina dalla testa verso l'alto]”	FA1.2(f) FA3.1(a) FA5.2	FA2.1 FA2.2
6. Fede: “No, secondo me, è sempre meglio farlo. Non si sa mai, non è che ... però ...”		FA1.2(c) FA5.2
7. T: “Dici: non si sa mai. Bah, io direi ...”		
8. Fra: “Io non mi fido ancora”		FA2.1 FA5.2 FA3.1
9. T: “Oh, ecco. Lui non si fida ancora. Come mai tu non ti fidi ancora? Diccelo. Hai fatto una bellissima osservazione”	FA5.2 FA3.1(b)	

10. Fra: “No non lo so. Mi viene naturale fare ancora dei calcoli. Cioè ...”		FA2.1 FA5.2 FA3.1
11. T: “Eh, ma orientati a che cosa? Bella osservazione Fra”	FA1.2(d, f) FA5.1 FA3.1(b)	
12. Fra: “Non lo so, mi sento più sicuro con i numeri.”		FA2.1 FA3.1 FA5.1
13. Matti: “Forse perché, ancora, che adesso che è da poco che abbiamo a che fare con l'algebra, allora ci sembra strano che una cosa grande come la matematica ... Che, tutti i numeri infiniti, cose infinite, riescano a concentrarsi in poche parole, in poco scritto, ...”		FA5.2 FA3.1 FA2.1
14. T: “In pochi simboli! Beh sì, è la potenza dell'algebra: quella di generalizzare e condensare in una scrittura atomica infiniti numeri. Effettivamente è così eh. $2n$ : abbiamo scritto in un secondo gli infiniti numeri pari. Eh beh, sì certo. Però è il problema ... diciamo, è sia, come dire, un limite perché non mi sto fidando ma è una potenza quella di poter scrivere $2n$ . Certo non li vediamo tutti, bisogna fare affidamento all'astrazione Effettivamente sì. Quindi, diciamo, un ricorso a un numero ti da sempre ... Dice, <i>maniman</i> trovassi un ...”	FA1.1(a) FA3.1(b)  FA1.1(b, d)	
15. Fede: “Controesempio”		FA1.1(b, c, f)

Il secondo episodio (min. 27:11 - min. 28:36 della seconda parte della discussione) strettamente collegato al precedente, è stato scelto perché mette in evidenza il processo attraverso cui gli studenti cercano di comprendere il proprio posizionamento nel percorso di apprendimento. In questo contesto, gli interventi del docente assumono particolare rilievo: attraverso un atteggiamento riflessivo, che funge da specchio per gli studenti, il docente fornisce feedback orientati a chiarire in che modo la consapevolezza del proprio stato di avanzamento possa essere utilizzata per progredire verso gli obiettivi di apprendimento, esplicitando anche i criteri necessari per il raggiungimento del successo. Troviamo, infatti, traccia dell'attivazione della strategia 3, in riferimento alla competenza argomentativa nell'ambito della dimostrazione algebrica (in particolare, per il ruolo degli esempi numerici) negli interventi 1, 3, 5, 9, 13, che si realizza (e anche per l'obiettivo di sviluppo del symbol sense) nelle risposte di una molteplicità di studenti (interventi 2, 4, 6, 11, 12).

**Tabella 8***Analisi attraverso gli indicatori di attivazione e compiuta realizzazione dell'episodio 2*

<i>EPISODIO 2</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di compiuta realizzazione</i>
1. T: “Che allora dici: ho sbagliato la manipolazione sopra, eh? Dimmi Tommi”	FA5.2	
2. Tommi: “Secondo me, allora, comunque, vedendo dai lavori che abbiamo fatto ci stiamo comunque abituando ad usare l'algebra, perché, ad esempio, questo esempio, lo hanno fatto dopo aver avuto la conferma di essere riusciti, cioè di ...”		FA3.2 FA5.2 FA2.2
3. T: “Ah, guardate che bello, Tommi fa una osservazione proprio sull'aspetto di struttura di come comparire la soluzione e ha detto: guardate che l'esempio non è stato il primo, quindi vuol dire che ci stiamo abituando, non abbiamo – non hanno usato l'esempio numerico, come dire, come partenza e poi hanno generalizzato. Sono andati a partire a generalizzare e poi dopo sono tornati indietro. Quindi, per Tommi, è un esempio del fatto che ci stiamo abituando a dare, in maniera, magari non ancora esplicita, importanza all'algebra invece che all'aritmetica. Potrebbe anche essere un'osservazione corretta”	FA4.2 FA3.2(a)	FA2.2
4. Fede: “Noi avevamo fatto così perché sappiamo che con un esempio - ci basterebbe trovare anche solo un controesempio per mandare a rotoli tutta la nostra affermazione. Allora c'è sembrato magari più sicuro agire in primo luogo con l'algebra”		FA1.2(d, f) FA2.2 FA3.1 FA3.2 FA4.2
5. T: “Allora, attenzione! Lui dice: avevamo il sentore che l'affermazione fosse vera. E quindi sapevamo che per dimostrare qualcosa non basta un esempio, allora abbiamo usato l'algebra.”	FA4.2 FA3.2 (a)	FA2.2
6. Fede: “Anche perché c'era scritto: spiegare perché ha ragione Luisa”		FA3.1
7. T: “No, c'era scritto: chi ha ragione punto interrogativo”	FA3.1(a)	
8. Fede: “Ah, allora non lo so”		
9. T: “Ma magari nel gruppo eravate già convinti che tutti e tre avevano ragione e volevate dimostrarlo. Può essere così eh!”	FA3.2(b)	

10. Fede: “No, non mi pare. Però, ci è sembrato comunque più diretto fare così”		FA5.2
11. Tommi: “Bene. Anche perché se si sa che si ha ragione non si cerca nemmeno il controesempio, no?”		FA1.2(d) FA2.2 FA3.2
12. Fra: “è anche vero che, però, cioè, usando l'algebra, magari, ti fa anche vedere se generalizzando si è sbagliato qualcosa e allora poi capire che, cioè, hai fatto qualcosa di sbagliato e poi andare a correggere”	FA5.1	FA3.1
13. T: “Quindi, mi stai dicendo, potevi magari trovare un controesempio e dire: ‘Cavolo! qualche manipolazione mi è sfuggita’ e andare a rivedere. Va bene.”	FA3.1(b)	

Il terzo episodio (min. 32:19 - min. 33:48 della seconda parte della discussione) è caratterizzato dalla partecipazione degli studenti come risorsa attiva, sia per il proprio apprendimento che per quello dei compagni (strategia 4 e 5). Questo aspetto si manifesta sia durante l'esposizione delle proprie risoluzioni (intervento 3., 5., 8., 13. in cui attuano la strategia 4 e la strategia 5), sia nel ruolo di ascoltatori attivi (intervento 1., 4., 13. come attivazione e 10. e 14. come conseguente realizzazione, in particolare, della strategia 4), attraverso un impegno mirato a comprendere e analizzare le strategie adottate dagli altri. Gli studenti mostrando così un alto grado di responsabilità nei confronti del proprio apprendimento (che corrisponde all'attivazione della strategia 5, in particolare nella sequenza di interventi 3., 4. 5.). In questo contesto, il docente assume un ruolo di facilitatore, stimolando la collaborazione e promuovendo l'attivazione degli studenti come risorsa reciproca nel processo didattico (attuando quindi la strategia 3, interventi 2., 4., 6.).

**Tabella 9**

*Analisi attraverso gli indicatori di attivazione e compiuta realizzazione dell'episodio 3*

<i>EPISODIO 3</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di compiuta realizzazione</i>
1. Simo: “Io non capisco perché hanno scritto $2n+2n+1$ , ma quel $2n+1$ non è $2n+3$ ?”	FA4.1	FA2.1
2. T: “Perché dici $2n+3$ ?”	FA3.2(b)	
3. Simo: “Eh, faccio riferimento a quello che abbiamo fatto noi nel nostro gruppo, che è poi quello che ha detto Auro. Là, abbiamo scomposto il 3”	FA5.1	FA3.1
4. T: “Allora, spiegatemi cosa avete voluto fare con quel $2n+1$ ”	FA3.2(b) FA5.1	FA2.2
5. Franci: “Abbiamo generalizzato ...”	FA5.1	FA3.1
6. T: “Che cosa? Dove deve guardare Simo?”	FA3.2(b)	FA2.2
7. Fede: “Devi guardare ... [sovrapposizione Fede e Franci]”		FA2.2
8. Fede: “Se guardi la parte in italiano che abbiamo scritto per affermare che Luisa, secondo noi, aveva ragione, se sommiamo un numero dispari - il numero dispari - si somma un numero dispari è inteso come qualunque numero dispari. In questo modo avevamo bisogno di una scrittura che potesse generalizzare un qualsiasi numero dispari quindi abbiamo utilizzato $2n+1$ ”	FA4.1	FA1.1(a, d) FA2.2 FA3.2
9. T: “Ok? E questo è $2n$ per un numero pari. Loro hanno voluto dimostrare la frase scritta in italiano”		FA2.2
10. Simo: “Quindi non fanno riferimento a 3 per $2n+3$ ”		FA4.1 FA2.2
11. Franci: “No”		
12. Simo: “Ok”		
13. Franci: “Però si può utilizzare quello che abbiamo scritto con $6n+9$ ”	FA4.1	
14. Simo: “Ok, ho capito. Grazie”		FA4.1

#### 5.2.4. Esempi dall'Analisi Complementare sugli Altri Dati

Nelle tabelle di analisi della discussione, la FA2 è una strategia di cui non rileviamo mai l'attivazione poiché essa è esclusivamente rilevabile in fase di

progettazione (come specificato nel paragrafo 4). Un esempio di come tale strategia è stata attivata, in riferimento all'obiettivo di promozione della competenza argomentativa FA2.2 ma, di riflesso, anche rispetto all'obiettivo di sviluppo del pensiero algebrico (FA2.1), è dato dalla scelta del docente di progettare i protocolli dei gruppi sulla lavagna luminosa, presentandoli nell'ordine indicato in figura (Figure 3, 4, 5) per favorire lo svolgimento della discussione di cui abbiamo presentato precedentemente alcuni stralci.

**Figura 3**

*Protocollo della risoluzione proposta dal gruppo 4*

**Gruppo\_4** ⚠️ +

Giovanni ha ragione perché: se si sommano  
 $2n+1 + 2n+3 + 2n+5 = 6n+9 \rightarrow 3 \cdot (2n+3) = 3 \cdot K \rightarrow$   
 tutti multipli di 3.

Luiza ha ragione perché:  $3(2n+3) = 3 \cdot K$   
 $n=0 \rightarrow 3(2 \cdot 0 + 3) = 3 \cdot 3 \rightarrow$  valore minimo  
 è il valore minimo di  $n$   $\rightarrow 3$  DISPARI

Mario ha ragione perché: se si moltiplica  $\times 3$   
 quindi il triplo si ottiene lo stesso numero che  
 viene se sommi i tre numeri

$2n+1 + 2n+3 + 2n+5 = 6n+9 \rightarrow 3(2n+3)$   
 $(2n+1) \cdot 3 = 6n+3$   
 $(2n+3) \cdot 3 = 6n+9$   
 $(2n+5) \cdot 3 = 6n+15$

$2m+3$  DISPARI  
 $2m+2+1$   
 $2(m+1)+1 = 2k+1$

**Figura 4**

*Protocollo della risoluzione proposta dal gruppo 3*

### Gruppo\_3

$m \in \mathbb{N}$   
 $2m+1 + 2m+3 + 2m+5 = 6m+9 = 3 \cdot (2m+3) = 3K$

$K = 2m+3$   
 $2m+2+1 = \text{dispari}$   
 necessario di un  $m$  pari quindi un  $m$  dispari

**LUISA HA RAGIONE**  
 numero numero numero  
 $2n+1 + 2n+3 + 2n+5 = 3K$   
 $K = 2n+3$   
 $3 \cdot K$   
 triplo

"Si ottiene il triplo di uno dei numeri"  
 $\downarrow$   
 $\cdot 3$

**MARIO HA RAGIONE**

**GIOVANNI HA RAGIONE**  
 $3 \cdot K$   
 un multiplo di 3, perché  $K \in \mathbb{N}$   
 $K \geq 3$

**Figura 5**

Protocollo della risoluzione proposta dal gruppo 2

**Gruppo\_2**

MARIO HA RAGIONE PERCHÉ:

$$2n+1 + 2n+3 + 2n+5 \rightarrow 6n+9$$

$$\downarrow \parallel$$

$$3 \cdot (2n+3)$$

$$\downarrow \parallel$$

$$6n+9 \text{ è il triplo di } (2n+3) \quad \text{ogni numero sostituito a } n \in \mathbb{N} \text{ rende vera l'affermazione}$$

$$6n+9 = 3 \cdot (2n+3)$$

esempio?

$n=1$

$$2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$6 \cdot 1 + 9 = 15$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

LUISA HA RAGIONE PERCHÉ OGGI SE SOMMO UN NUMERO DISPARI AD UN NUMERO PARI OTTIENGO UN NUMERO DISPARI

$$2n + 2n + 1 = 4n + 1$$

GIOVANNI HA RAGIONE:

$$6n+9 \xrightarrow{\text{Fatt.}} 3 \cdot (2n+3) = 9z \text{ sono un multiplo di } 3$$

Che proiettare alla LIM le diverse soluzioni in sequenza abbia favorito la realizzazione di FA4, è testimoniato, ad esempio, dalle risposte fornite alla domanda “Quali analogie e quali differenze hai notato nel modo di lavorare durante le tre lezioni del venerdì, rispetto al modo usuale di procedere durante le lezioni di matematica?”, presente nel modulo di autovalutazione. Per esempio:

Ho notato una maggior condivisione delle proprie idee risolutive perché il prof invece di chiedere chi aveva avuto determinate idee ha messo a confronto ogni ragionamento (poiché glieli avevamo consegnati) lasciando ancora di più la parola a noi.

Le risposte al modulo di autovalutazione forniscono anche evidenze dell'avvenuta realizzazione della strategia FA1.1(a) (che esplicita l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni), in corrispondenza della richiesta *L'algebra dove è intervenuta e in che cosa ti ha aiutato?* Ne è un esempio la seguente affermazione di uno studente: “L'algebra mi ha aiutato nella generalizzazione delle mie risposte, rendendole più chiare e applicabili in molteplici casi”.

Similmente, troviamo nel modulo finale anche tracce della realizzazione della strategia FA1.2 (ulteriori rispetto a quelle già individuate negli stralci di discussione presentati), conseguente all'attivazione avvenuta in corrispondenza



degli interventi del docente durante la discussione, come il seguente espressamente rivolto a FA1.2(e):

T: [...] “Ormai lo abbiamo già sviscerato, adesso, il quesito. Quindi adesso lavoriamo anche sull’aspetto di capacità comunicativa di quello che vedete. Al secondo gruppo, adesso, sappiamo già tutto del quesito. Giusto? Allora facciamo un upgrade: andiamo anche a indagare sul livello di comunicabilità, di efficacia comunicativa, di quello che avete detto. Tradotto: se io lo leggo così, capisco cosa volevano dire? Ci siamo? Anche voi che lo avete scritto, riflettete su questa cosa. Anche gli altri possono intervenire”.

Ne è un esempio la risposta alla domanda “*Pensi che queste modifiche ti abbiano aiutato od ostacolato? Perché?*”, presentata nel modulo di autovalutazione con lo scopo di valutare le modifiche alla struttura didattica della lezione:

[...] ho avuto la possibilità di lavorare prima singolarmente, poi confrontandomi solo con un piccolo gruppo di compagni e infine con tutta la classe ottenendo così risposte ai quesiti più corrette ma anche più chiare nello svolgimento.

Si evince in questo intervento, infatti, l’avvenuta realizzazione in risposta alle strategie FA1.2 (c, e) attivate.

In risposta a questa domanda troviamo, inoltre, la seguente affermazione, “*Sono più concentrato parlando insieme e spesso ciò che non capisco mi viene chiaro nella discussione*”, che testimonia l’avvenuta realizzazione di FA2 (in riferimento alla progettazione di discussioni didattiche efficaci), ma al contempo si ricollega altresì all’avvenuta realizzazione di FA3 e FA4. Infatti, spesso, nelle risposte ai moduli di autovalutazione (così come mostrato anche relativamente agli interventi durante le discussioni di classe, nelle tabelle del paragrafo precedente), è possibile rintracciare una molteplicità di strategie che si realizzano contemporaneamente. A tal proposito, riportiamo un ultimo esempio di avvenuta realizzazione al contempo delle strategie FA4 (studenti diventano risorse gli uni per gli altri), FA5 (ciascuno studente diventa responsabile del proprio apprendimento) e FA1.2 (esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento dell’attività, in particolare, relativi allo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica), in risposta a una domanda riguardante le opportunità e difficoltà di confrontarsi con i compagni, presente anch’essa nel modulo di autovalutazione,;

Sicuramente è difficile comprendere al volo il metodo risolutivo di un gruppo, anche perché entrare nella testa dei compagni non è mai facile. Certe volte dei processi risolutivi adottati da altri gruppi mi facevano pensare ad altri processi risolutivi magari più chiari e completi che avremmo potuto usare, inoltre scelgo se immagazzinare i metodi adottati da altri gruppi per a mia volta usarli in futuro o se non immagazzinarli.

### 5.3. Quali Indicazioni dall'Uso degli Indicatori

In questa sezione, illustriamo alcune considerazioni tratte dall'analisi con gli indicatori del caso studio proposto. Verrà qui discussa l'efficacia, in riferimento all'implementazione delle strategie di valutazione formativa, sia delle scelte di progettazione che delle scelte intraprese dal docente in fase di attuazione, con l'obiettivo di mostrare la funzione degli indicatori come strumento operativo per supportare la riflessione sulla pratica e la riprogettazione. Infatti, attraverso l'analisi con gli indicatori di attivazione e realizzazione delle strategie di valutazione formativa, abbiamo l'opportunità:

- I. di mettere in luce gli elementi della progettazione che hanno permesso di mettere in atto pratiche di valutazione formativa, come quelli che invece sono stati più ininfluenti (obiettivo di monitoraggio);
- II. di promuovere una riflessione che ha per oggetto le azioni del docente, che son state rilevanti in fase di attuazione, rispetto allo specifico caso studio (obiettivo di riflessione).

Rispetto all'obiettivo di monitoraggio (I), per parlare di *effettiva realizzazione* della dimensione della valutazione formativa (componente chiave del design della sequenza didattica) andiamo ad osservare se le strategie, oltre ad essere attivate sono state realizzate con pervasività, coinvolgendo molteplici agenti.

Intendiamo, quindi, con *effettiva realizzazione* la concomitanza e la sinergia delle strategie di valutazione formativa che si sono, in primo luogo, attivate (creando l'opportunità per una loro attuazione) ma anche compiutamente realizzate, in molteplici occasioni e coinvolgendo una molteplicità di soggetti (il docente e una varietà di studenti). Nell'analisi qui presentata, tale rilevazione è di stampo qualitativo.

L'analisi effettuata porta evidenze della compiuta realizzazione della strategia FA2. Infatti, già dalla selezione di elementi proposti in questo articolo, possiamo osservare se e come la sinergia degli elementi previsti nel design dell'attività abbia promosso l'attuazione delle strategie di valutazione formativa. L'organizzazione dell'attività a step, che ha previsto due prime brevi fasi iniziali (una di esplorazione individuale e una dedicata ad un primo tentativo di risoluzione) ha responsabilizzato i singoli studenti nei confronti della risoluzione del problema algebrico, e quindi del proprio apprendimento nei confronti del primo obiettivo (realizzando FA5.1), consentendo di lavorare maggiormente sull'obiettivo di argomentazione, in piccolo gruppo, nella terza fase. Gli studenti, nel passaggio dalla soluzione individuale alla soluzione condivisa coi compagni, hanno avuto modo di divenire consapevoli dell'apporto dei compagni per il perseguimento dei due obiettivi di apprendimento (realizzando FA4.1 e FA4.2). Inizialmente, ciò si evince, in particolare, in riferimento all'obiettivo di sviluppo del pensiero algebrico: infatti, si osserva come i protocolli individuali non presentino una componente argomentativa rilevante, nonostante l'insegnante richieda di discutere motivando le scelte e il valore di verità delle affermazioni proposte. La realizzazione della quinta

strategia, in riferimento all'obiettivo di argomentazione (FA5.2), raggiunge invece il suo apice quando il docente, durante la discussione, chiede di commentare l'argomentazione proposta agli stessi studenti che l'hanno prodotta. Notiamo che l'attivazione delle strategie FA1.2 di esplicitazione degli obiettivi di apprendimento volti alla competenza argomentativa (come i criteri di chiarezza, completezza e correttezza), non erano enunciati nelle consegne, ma sono emersi esclusivamente in fase di discussione: questo può aver determinato il ritardo della realizzazione delle strategie rispetto a questo secondo obiettivo. Le discussioni, organizzate proiettando i protocolli in modo da confrontare le argomentazioni proposte dai diversi gruppi di studenti, hanno dato modo, una volta accertata la risoluzione del problema, di lavorare in modo più puntuale sulle caratteristiche delle argomentazioni, facendo divenire l'argomentazione non solo un mezzo ma un fine della discussione. Hanno perciò permesso di attivare e realizzare le strategie della forma FAX.2, che sono infatti predominanti nelle tabelle di analisi delle discussioni proposte. Con un'osservazione longitudinale delle tabelle, è anche possibile osservare come l'attivazione e realizzazione delle strategie del primo (FAX.1) e del secondo tipo (FAX.2) risultino intrecciate, a dimostrazione del ruolo dell'argomentazione nel favorire i processi di apprendimento rispetto agli elementi di contenuto sui quali si argomenta. Inoltre, possiamo osservare che il livello di difficoltà del problema proposto, che è risultato accessibile all'intera classe (infatti, ogni gruppo, ha fornito la soluzione corretta anche se con tempi differenziati), ha permesso di lavorare su meta-riflessioni per gran parte della discussione. La scelta di un task che garantisse l'accesso alla risoluzione (senza troppe difficoltà) a tutti gli studenti, può essere risultato particolarmente significativo per l'attuazione della valutazione formativa in questo contesto specifico in cui si affrontavano le prime attività di introduzione all'algebra. Un elemento particolarmente utile per l'obiettivo di monitoraggio sono stati i moduli di autovalutazione, consegnati al termine della sequenza didattica, che hanno dato l'opportunità di identificare l'avvenuta realizzazione delle strategie attivate nelle fasi precedenti: FA1, ad esempio, riconoscendo la caratterizzazione del symbol sense di Arcavi nel ruolo che ha avuto l'algebra nell'attività proposta, FA3 e FA4 quando gli studenti riconoscono l'apporto dei feedback del docente e dei compagni per il perseguimento degli obiettivi di apprendimento. Inoltre, i moduli hanno permesso l'attivazione della strategia FA5, attivando meta-riflessioni degli studenti sui propri processi d'apprendimento, che trovano realizzazione, ad esempio, nel questionario finale quando gli studenti esprimono i propri dubbi su quanto emerso, ponendo domande da rivolgere alla classe nel successivo incontro, oppure quando stabiliscono come si posizionano rispetto agli obiettivi dichiarati dal docente. Per concludere, possiamo dunque affermare che le scelte di progettazione hanno favorito un'effettiva implementazione della valutazione formativa.

Analizziamo ora le pratiche attuate dal docente. Innanzitutto, possiamo

osservare come, in fase di discussione, innescare riflessioni a livello meta, a partire dalle argomentazioni prodotte dagli studenti, con l'obiettivo di osservare il ruolo degli esempi numerici, sia una pratica risultata significativa per perseguire l'attuazione delle strategie del tipo FAx.2 (ovvero riferite all'argomentazione per la dimostrazione algebrica). Il docente ha attivato queste strategie, organizzando le discussioni; come, ad esempio, nella scelta di comparare le diverse soluzioni, richiedendo agli studenti di analizzarle in termini di chiarezza, correttezza e completezza. Notiamo, peraltro, come le azioni del docente siano sostenute dall'attuazione di pratiche strettamente connesse con i riferimenti teorici condivisi nella formazione del DIVA (e presentati nel paragrafo 2).

Inoltre, la pratica del docente di girare tra i banchi per cogliere gli elementi critici e catalizzanti, sia del lavoro individuale che di gruppo, per rilanciarli nella discussione, ha dato l'opportunità di rendere esplicito il pensiero degli studenti, soprattutto in riferimento alle difficoltà incontrate. Ciò ha permesso di fornire feedback (FA3.1) e attivare i compagni per sostenere l'apprendimento in risposta alle difficoltà emerse (FA4.1), offrendo inoltre l'occasione per riflettere sul ruolo dell'algebra e, quindi, rinforzando l'attivazione della strategia FA1.1.

Infine, nella fiducia reciproca testimoniata dagli interventi degli studenti - come l'affermazione di Fra, *“Io non mi fido ancora”*, o il commento di Simo, rispetto alla soluzione di un compagno, *“Io non capisco perché hanno scritto  $2n+2n+1$ , ma quel  $2n+1$  non è  $2n+3$ ?”* - accolti e valorizzati dal docente nella discussione, si intuisce che la valutazione formativa è parte della cultura della classe. Questo elemento ha senza ombra di dubbio un grande impatto nell'attuazione delle strategie.

## 6. Conclusioni

Nel contributo abbiamo presentato un prodotto di ricerca, risultante dal lavoro della comunità di ricerca DIVA al DIMA. La comunità utilizza il framework TRU (Schoenfeld, 2016) per promuovere la riflessione sulla pratica (Cusi & Robutti, 2017), sostenuta principalmente attraverso attività di co-progettazione, monitoraggio/valutazione, e ri-progettazione di attività didattiche che mirano ad essere efficaci rispetto agli obiettivi posti dai docenti. Ulteriori riferimenti teorici, condivisi nella comunità, vengono integrati in relazione alle specifiche dimensioni del TRU. Ad esempio, per la valutazione formativa, si fa riferimento alla definizione di Black & Wiliam (2009) e alle strategie di Wiliam & Thompson (2007). Questa integrazione rispetto al framework TRU, che pone la dimensione matematica al centro delle riflessioni, richiede la messa in relazione dei riferimenti teorici selezionati con le specifiche pratiche e significati matematici coinvolti. A loro volta, queste pratiche e significati matematici vengono inquadrati attraverso riferimenti teorici condivisi con i docenti: ad esempio, per lo sviluppo del pensiero algebrico si fa riferimento al symbol sense

(Arcavi, 1994) mentre, per lo sviluppo della competenza argomentativa nell'ambito della dimostrazione algebrica, si richiama il concetto di comportamento razionale (Morselli & Boero, 2011).

Per supportare la riflessione dei docenti, in particolare, in riferimento alla valutazione formativa, è stato creato uno strumento teorico-pratico che è espressione di questo processo di integrazione. Esso si profila come un supporto per monitorare e valutare l'attuazione di progettazioni che hanno previsto questa dimensione del TRU come elemento cardine del design. Questi indicatori, illustrati nell'articolo, declinano le strategie di Wiliam & Thompson (2007) rispetto alla dimensione matematica che, nello specifico, coinvolge lo sviluppo del pensiero algebrico e la pratica argomentativa in ambito dimostrativo. Essi si distinguono in indicatori di attivazione, ovvero indicatori che mostrano l'intenzionalità nell'implementare la strategia, e indicatori di avvenuta realizzazione, che mostrano un'efficace implementazione della stessa, ovvero gli effetti che si sono realizzati nel contesto classe a partire dalle condizioni createsi tramite l'attivazione. Oltre a descriverne la formulazione, è stato presentato un esempio d'uso degli indicatori attraverso un caso studio, che ci ha permesso di discutere la funzionalità di questo strumento per valutare l'effettiva realizzazione della valutazione formativa in classe, in termini di pervasività e molteplicità di agenti coinvolti.

L'analisi fine condotta con gli indicatori ha un duplice scopo. Da un lato, (I) valutare in che modo le scelte di progettazione, effettuate con l'obiettivo di promuovere la valutazione formativa, hanno favorito la realizzazione in classe di questa pratica, individuando le caratteristiche determinanti e le possibili modifiche in ottica di ri-progettazione. Dall'altro, (II) rendere il docente consapevole delle scelte prese in fase di attuazione, così come degli effetti di queste scelte, in termini di valutazione formativa. Tali effetti possono essere legati a caratteristiche della pratica didattica o a contingenze. In ogni caso, un'analisi critica può essere fondamentale per sostenere una riflessione che promuova la crescita professionale e personale.

Con un criterio di generalità crescente, i passi che possono fare seguito al lavoro qui presentato possono prevedere, innanzitutto, una valutazione della funzionalità di questi indicatori in progettazioni che hanno gli stessi obiettivi di apprendimento. Secondariamente, la realizzazione di indicatori per la valutazione formativa in presenza di altri obiettivi di apprendimento, ovvero la formulazione di indicatori che declinano le strategie rispetto ad altri riferimenti teorici selezionati in relazione agli obiettivi della dimensione matematica. Infine, ci proponiamo di costruire indicatori relativi alle altre dimensioni del TRU, come supporto per la riflessione sulla pratica dei docenti, in accordo con la proposta delle rubriche di Schoenfeld (2016). Infatti, l'applicabilità di quest'ultime per gli obiettivi sopra indicati (I-II) può risultare compromessa dalla difficoltà nel tradurre, rispetto a specifici obiettivi matematici, le domande presenti nelle rubriche. Pertanto, la creazione di strumenti teorico-pratici che

guidino l'analisi critica di docenti e ricercatori si è configurata come obiettivo di ricerca primario per la comunità DIVA al DIMA.

## Riferimenti

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Bell, B., & Cowie, B. (2001). Teacher development for formative assessment. *Waikato Journal of Education*, 7, 37–49.
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5–31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>
- Boscolo, A., Morselli, F., & Robotti, E. (submitted). Formative assessment of the formative assessment implementation. A process for developing indicators to promote a TRU-based reflective practice.
- Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promuovere strategie di valutazione formativa in matematica con le nuove tecnologie: L'esperienza del progetto FaSMEd. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 9(14), 91–107.
- Cusi, A., & Morselli, F. (2024). The key-roles of the expert during classroom discussions aimed at fostering formative assessment processes through the use of digital technologies. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 741–755. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01572-0>
- Cusi, A., & Robutti, O. (2017). La collaborazione per rendere i docenti protagonisti della propria formazione: Esempi dall'Italia e dal mondo. In L. Giacardi, M. Mosca, & C. Sabena (Eds.), *Conferenze e seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016–2017* (pp. 231–248). L'Artistica Editrice.
- Habermas, J. (2003). *Truth and justification*. MIT Press.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Morselli, F., & Boero, P. (2010). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for the teaching and learning of proof. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6: Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 211–220). Lyon, France.
- Morselli, F., & Boero, P. (2009). Habermas' construct of rational behaviour as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 100–105). Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Morselli, F., & Boero, P. (2011). Using Habermas' theory of rationality to gain insight into students' understanding of algebraic language. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 453–481). Springer.

- Morselli, F., & Quartara, S. (2023). “My mind is getting used to always find a better solution process”: Formative assessment and self-regulation in secondary school algebra. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 4020–4028). Alfréd Rényi Institute of Mathematics & ERME.
- Quartara, S., Boscolo, A., Morselli, F., & Robotti, E. (2024). DIVA a DIMA: Un teaching experiment in ottica TRU. L’esperienza di un insegnante. In D. Marocchi, M. Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Atti del XI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, DI.FI.MA. 2023* (pp. 132–138).
- Schoenfeld, A. H., & Teaching for Robust Understanding (TRU) Project. (2016). *An introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) framework*. Graduate School of Education, University of California, Berkeley. [https://www.map.mathshell.org/trumath.php\\_map.mathshell.org+1](https://www.map.mathshell.org/trumath.php_map.mathshell.org+1)
- Schildkamp, K., van der Kleij, F. M., Heitink, M. C., Kippers, W. B., & Veldkamp, B. P. (2020). Formative assessment: A systematic review of critical teacher prerequisites for classroom practice. *International Journal of Educational Research*, 103, 101602. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2020.101602>
- William, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (pp. 53–82). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315086545>