La Matematica e la sua Didattica, ISSN 3035-2940, Volume 33, n. 2, 2025, 115–159
https://doi.org/10.60923/issn.3035-2940/23699

Un'Analisi delle Concezioni sulla Dimostrazione di Studenti di un Corso di Laurea in Matematica

An Analysis of Students' Conceptions of Proof in a Mathematics Degree Course

Un Análisis de las Concepciones de los Estudiantes sobre la Demostración en una Licenciatura de Matemáticas

Tania Bertolini[1] e Miglena Asenova[2]
[1]*Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Italia*
[2]*Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano, Italia*

Sunto. *Questo studio esplora le concezioni di studenti universitari riguardo alla dimostrazione matematica, focalizzandosi su un gruppo di 70 studenti iscritti a corsi di laurea triennale e magistrale in Matematica presso un'università italiana. Attraverso la raccolta e l'analisi di produzioni testuali personali (TEP), la ricerca indaga gli aspetti che determinano le concezioni degli studenti e come queste si modificano nel tempo, influenzate dal percorso accademico seguito. I risultati evidenziano una varietà di concezioni, raggruppate in categorie deduttive, desunte dalla letteratura, e induttive, ricavate dai dati, che riflettono sia le funzioni della dimostrazione, sia aspetti legati alle modalità di apprendimento, sia questioni legate alla struttura logica della dimostrazione. Lo studio offre una mappatura dettagliata delle concezioni sulla dimostrazione emerse durante la ricerca, facendo riferimento a una agenda di codifica appositamente predisposta per lo studio.*

Parole chiave: concezioni sulla dimostrazione di studenti universitari, studenti di un corso di laurea in Matematica, categorie di concezioni, TEP.

Abstract. *This study explores university students' conceptions of mathematical proof, focusing on a group of 70 students enrolled in bachelor's and master's degree courses in Mathematics at an Italian university. Through the collection and analysis of personal textual productions (TEP), the research investigates the aspects that determine students' conceptions and how this change over time, influenced by the academic path followed. The results reveal a variety of conceptions, grouped into deductive, i.e., deduced from literature, and inductive categories, i.e., inferred from data analysis, reflecting the functions of proof, aspects of learning modes, and issues related to the logical structure of a proof. The study provides a detailed mapping of the conceptions about proof that emerged during the research, with reference to a coding agenda.*

Keywords: proof conceptions by undergraduate students, students on a degree course in

Mathematics, categories of conceptions, TEP.

Resumen. *Este estudio explora las concepciones de los estudiantes universitarios sobre la demostración matemática, centrándose en un grupo de 70 estudiantes del curso de licenciatura y máster en Matemáticas en una universidad italiana. A través de la recogida y análisis de producciones textuales personales (PTE), la investigación indaga los aspectos que determinan las concepciones de los estudiantes y cómo éstas cambian a lo largo del tiempo, influidas por la trayectoria académica seguida. Los resultados destacan una variedad de concepciones, agrupadas en categorías deductivas, inferidas de la literatura, e inductivas, derivadas de los datos, que reflejan tanto las funciones de la demostración, como aspectos relacionados con los modos de aprendizaje y cuestiones relacionadas con la estructura lógica de la demostración. El estudio ofrece un mapeo detallado de las concepciones sobre la demostración que surgieron durante la investigación, haciendo referencia a una agenda de codificación.*

Palabras clave: concepciones sobre la demostración por parte de estudiantes universitarios, estudiantes de una licenciatura en Matemáticas, categorías de concepciones, TEP.

1. Motivazione e Struttura della Ricerca

Secondo Balacheff e Gaudin (2010) una concezione rappresenta uno stato di equilibrio dinamico in un sistema in cui soggetto e ambiente interagiscono tra loro.[1] Le concezioni sono quindi dipendenti dall'ambiente con cui lo studente interagisce (si veda p.e. Heinze et al., 2005, ma anche Hoyles, 1997) ed è plausibile assumere che esse si modifichino in base al percorso seguito dallo studente. Indagare le concezioni degli studenti che seguono un percorso universitario altamente specializzato in Matematica può fornire informazioni utili su come tale ambiente incida sulle loro concezioni e sullo sviluppo di queste ultime nel tempo. In Italia, dove la formazione dei futuri docenti di Matematica di scuola secondaria avviene prevalentemente nell'ambito dei corsi di laurea triennali e magistrali in Matematica, un'indagine in questa direzione può essere interessante per ottenere informazioni sulle concezioni dei potenziali futuri docenti di Matematica che hanno seguito un tale percorso formativo. Un quadro di riferimento il più possibile esaustivo sulle concezioni degli studenti universitari in Matematica sulla dimostrazione ha inoltre un valore intrinseco per la ricerca. Infatti, sapere come tali concezioni si conformano e sviluppano nel tempo, consente di mappare in maniera più efficace l'apprendimento di questo importante strumento matematico a questo livello di istruzione, ma può fungere da base anche per analoghe mappature in altri livelli scolastici. Questo articolo, tratto dalla tesi di laurea magistrale del primo autore (Bertolini, 2024), presenta una ricerca che si focalizza sulla caratterizzazione delle concezioni di

[1] Per una trattazione più esaustiva del termine 'concezione' si rimanda alla terza sezione, dedicata al quadro teorico.

un gruppo di 70 studenti universitari frequentanti un corso di laurea triennale o magistrale in Matematica presso un'università italiana, nonché sull'influenza del percorso da loro seguito nell'evoluzione di tali concezioni.

L'articolo è strutturato come segue. Nella sezione 2 viene caratterizzato il problema di ricerca, contestualizzandolo nella letteratura di riferimento, e vengono formulate le domande di ricerca. Nella sezione 3 viene esposto il quadro teorico che è composto da una prima parte, dedicata alla caratterizzazione della nozione di concezione, e una seconda parte, in cui vengono esposte le basi utili alla definizione a priori degli elementi costituenti le concezioni degli studenti. Nella sezione 4 viene presentato l'approccio metodologico generale della ricerca. La sezione 5 è incentrata sulla metodologia di analisi dei dati e sulla presentazione del sistema di categorie, nonché su alcuni esempi particolarmente significativi di analisi puntuale di risposte degli studenti. La sezione 6 è rivolta alla presentazione dei risultati e alla risposta alle domande di ricerca. La sezione 7 è dedicata alla discussione dei risultati. Nella sezione 8 si traggono le conclusioni di questo studio, evidenziandone alcune limitazioni e fornendo indicazioni su possibili futuri sviluppi.

2. Contestualizzazione del Problema di Ricerca e Formulazione delle Domande di Ricerca

In Italia, uno studente che si iscrive a un corso di laurea in Matematica, avrà molto probabilmente incontrato le prime dimostrazioni già nella scuola secondaria di secondo grado, p.e. nell'ambito della Geometria Euclidea e/o nell'introduzione all'Analisi (MIUR, 2010, pp. 337–341).

Tuttavia, sarà soprattutto nel corso degli studi universitari che lo studente avrà la possibilità di affrontare un'ampia gamma di dimostrazioni in quasi tutti i corsi e quindi in tanti contesti diversi, come quello dell'Analisi, della Geometria, dell'Algebra, della Fisica Matematica, ecc. in cui la dimostrazione assume un ruolo più vicino a quello che riveste per il matematico professionista: uno strumento di indagine che sancisce l'accettabilità del risultato ottenuto, sulla base del ricorso a 'schemi' ampiamente accettati nella comunità di riferimento, nel senso evidenziato da Thurston (2006). Sulla base della propria esperienza personale durante questo percorso, lo studente svilupperà delle concezioni personali riguardo al significato del concetto di dimostrazione in Matematica che influenzeranno il suo atteggiamento e le sue convinzioni nei confronti della dimostrazione stessa (Stylianou et al., 2015), così come le sue esperienze in aula (si vedano p.e. Ouvrier-Buffet, 2023; Stewart e Thomas, 2019). In letteratura non mancano studi riguardanti le concezioni sulla dimostrazione degli studenti di scuola secondaria di secondo grado (p.e. Balacheff, 1988; Healy e Hoyles, 2000). Anche per quanto riguarda l'istruzione universitaria, sono stati condotti diversi studi relativi alle concezioni degli studenti riguardo ad aspetti particolari della dimostrazione (p.e. Antonini, 2019, riguardo all'accettazione della dimostrazione per assurdo; Stewart e Thomas, 2019, riguardo alle concezioni degli studenti sulle dimostrazioni in Algebra Lineare).

Jones (1998) analizza le concezioni sulla dimostrazione di laureati in Matematica che aspirano a diventare docenti della scuola secondaria di secondo grado, ricorrendo allo strumento delle mappe concettuali per indurre i partecipanti a una rappresentazione autonoma dei termini che essi considerano importanti per caratterizzare il concetto di dimostrazione nonché delle relazioni tra essi. L'autrice osserva che, tra gli insegnanti in formazione coinvolti nella ricerca, chi ha la competenza matematica più alta non necessariamente possiede le competenze necessarie per attuare un insegnamento più efficace della Matematica e, viceversa, chi ha una solida preparazione in ambito didattico, può avere una preparazione disciplinare insufficiente per garantire la profondità disciplinare necessaria per un insegnamento efficace. Jones (1998) non indaga però l'evoluzione delle concezioni nel tempo e non fornisce una definizione esaustiva delle categorie di concezioni usate dai partecipanti. Altre ricerche riguardano le concezioni degli studenti universitari che emergono dall'analisi del loro approccio a compiti specifici (si vedano Stylianou et al., 2015, ma anche gli studi classici di Balacheff, 1988, Coe e Ruthven, 1994, Harel e Sowder, 1998, nonché Healy e Hoyles, 2000).

Nonostante la vasta letteratura sull'argomento, le concezioni degli studenti universitari sulla dimostrazione rimangono un problema di ricerca ancora non sufficientemente approfondito almeno fino all'inizio del secondo decennio del XXI secolo. Questo emerge dal volume XIX ICMI Study (2012) sul tema *Proof and Proving in Mathematics Education*. Nel contributo di Cabassut et al. (2012) si legge che la letteratura solo raramente affronta la questione delle convinzioni in modo diretto ed esplicito (p. 179).[2] Inoltre, sempre nello stesso volume, Selden (2012) afferma che una delle questioni aperte nella ricerca è come gli studenti universitari concepiscono teoremi, dimostrazioni, assiomi e definizioni e le relazioni tra loro (p. 414).

A tale proposito, alcuni anni più tardi, Stylianou et al. (2015) indagano le posizioni di studenti dei primi anni di università sul significato del concetto di dimostrazione in Matematica e come queste si collegano al loro atteggiamento e alle loro convinzioni nei confronti della dimostrazione nonché alle loro esperienze in classe. Lo studio in questione coinvolge esclusivamente studenti dei primi due anni di università e conferma diversi aspetti già emersi dalla ricerca di Healy e Hoyles (2000), in particolare il fatto che gli studenti reputano più rigorosa una dimostrazione logico-deduttiva, mentre la prova più esplicativa e più vicina all'argomento 'che userebbero per spiegare il problema a uno dei loro compagni' è formulata in un linguaggio più discorsivo e meno formale. Gli autori analizzano le convinzioni (*belief*) degli studenti in relazione alla loro

[2] Consideriamo questo termine come sinonimo di 'concezione', rimandando alla sezione dedicata al quadro teorico per un chiarimento terminologico più approfondito.

attitudine nei confronti della Matematica e ai loro risultati complessivi in essa, mostrando che c'è effettivamente una correlazione tra i due parametri. Dallo studio si evince che gli studenti ad alto rendimento sono più propensi a scegliere un argomento 'deduttivo-simbolico' rispetto agli studenti con basso rendimento; inoltre, studenti abili in Matematica tendono nel complesso ad avere atteggiamenti più positivi e attivi rispetto ai loro colleghi con più basso rendimento in questa disciplina.

Per quanto noto agli autori, dal 2015 ad oggi, la letteratura sulle concezioni degli studenti universitari riguardo alla dimostrazione non sembra essersi arricchita di ricerche significative. A sostegno di questa affermazione riportiamo il già citato lavoro di Ouvrier-Buffet (2023), in cui l'autrice evidenzia la necessità di approfondimento del tema, proponendo un questionario in una prospettiva di indagine su larga scala al fine di innescare collaborazioni in Europa sulla caratterizzazione delle concezioni sulla dimostrazione degli studenti universitari. Evidenziamo inoltre che manca ancora in letteratura un sistema classificatorio che permetta di mettere a confronto diretto i risultati delle ricerche già condotte e possa servire come 'mappa' per le concezioni degli studenti in indagini future.

Il presente studio si inserisce nella direzione di ricerca appena evidenziata e si propone di indagare le concezioni sulla dimostrazione di studenti universitari dei corsi di laurea triennale e magistrale in Matematica. L'obiettivo è sia quello di caratterizzare le concezioni degli studenti riguardo alla dimostrazione, sia di analizzare se e come la frequenza del corso di studi (Matematica) influenzi queste concezioni. Infatti, pur non trattandosi degli stessi studenti seguiti negli anni, ipotizziamo che possa esserci un'evoluzione di tipologie di concezioni che sia dovuta alla frequenza di corsi di studi altamente specializzati, come sono quelli delle lauree triennale e magistrale in Matematica. A tale scopo sono state formulate le due seguenti domande di ricerca:

- DR1: Quali concezioni sulla dimostrazione manifestano gli studenti di corsi di laurea in Matematica?
- DR2: Quale influenza ha il percorso di studi universitari in Matematica sulle concezioni sulla dimostrazione?

3. Quadro Teorico

Dato che l'obiettivo della presente ricerca è quello di indagare le concezioni degli studenti sulla dimostrazione, è doveroso premettere una definizione del termine 'concezione', evidenziando anche la differenza tra questo e il termine 'convinzione' e chiarendo quindi il senso con cui il termine 'concezione' viene usato in questa ricerca. A questo aspetto è dedicata la prima parte del quadro teorico.

La seconda parte del quadro teorico è dedicata all'individuazione degli elementi teorici utili alla determinazione delle categorie deduttive delle concezioni sulla dimostrazione. È possibile risalire a tali elementi per almeno tre vie: attraverso le fonti provenienti dalla ricerca d'aula in Didattica della Matematica, tramite indagini teoriche di natura epistemologica sulle funzioni della dimostrazione in Matematica (con intersezione dei risultati non vuota tra quest'ultima e la prima via), oppure tramite indagini storico-epistemologiche che mirano all'individuazione di possibili ostacoli epistemologici (Brousseau, 1989). Nella seconda parte del quadro teorico riportiamo quindi una breve trattazione delle fonti usate per individuare le categorie tratte dalla letteratura, suddividendole in tre sezioni: una relativa alle concezioni già emerse a vario titolo dalle ricerche d'aula in Didattica della Matematica, una relativa alle concezioni dedotte dalle funzioni della dimostrazione messe in evidenza nei lavori di natura epistemologica di Lolli (2005) sulla dimostrazione, una terza sezione in cui facciamo riferimento al concetto di ostacolo epistemologico come strumento per l'individuazione a priori di categorie di concezioni.

3.1. Distinzione tra Concezioni (Conception) e Convinzioni (Belief) e il Legame tra Esse

Dato che l'uso della terminologia in letteratura non è uniforme e a volte ci si riferisce indistintamente a concezioni (*conception*) e a convinzioni (*belief*), premettiamo una breve trattazione che evidenzia il senso in cui il primo dei due termini viene usato in questo articolo, distinguendolo dall'altro.

In letteratura si possono trovare diverse definizioni del termine *conception* (p.e. Balacheff e Gaudin, 2010; Cabassut et al., 2012; Philipp, 2007). In questo contesto ci focalizziamo sulla definizione fornita da Balacheff e Gaudin, poiché essa risulta utile per la presente ricerca: "una concezione è lo stato di equilibrio dinamico di un ciclo di azione/reazione tra un soggetto e un ambiente sotto vincoli restrittivi di attuabilità" (Balacheff & Gaudin, 2010, p. 217, traduzione degli autori). Balacheff e Gaudin (2010) si riferiscono alla citazione appena riportata come alla "definizione di concezione" (p. 13), mentre chiamano "modello di concezione" (p. 13) la quadrupla (P, R, L, Σ), dove P sta per un insieme di problemi, R sta per un insieme di operatori, L sta per un insieme di rappresentazioni e Σ sta per un sistema di controllo. Gli autori considerano tale modello di concezione come "complementare alla sua definizione, e pensato per fornire uno strumento efficace per rappresentare concretamente e analizzare il corpo di dati che possono essere ottenuti attraverso l'osservazione delle attività degli studenti" (p. 13, traduzione degli autori). L'applicazione del modello presuppone quindi che ci sia un'*osservazione delle attività* dei soggetti le cui concezioni si intendono studiare, mentre la definizione si focalizza su una prospettiva più generale e meno articolata di tali concezioni, che non presuppone che ci sia una osservazione di attività, e la cui presenza può essere inferita anche dall'analisi di un testo, come nel caso di questa ricerca. La definizione di concezione di Balacheff e Gaudin (2010) richiede che ci sia la possibilità di osservazione della presenza di uno stato di equilibrio dinamico da parte del soggetto, dopo che sia avvenuta una perturbazione, dovuta all'interazione con l'ambiente (*milieu*). Nel contesto specifico di questa ricerca, la perturbazione del sistema soggetto-*milieu* è rappresentata dalla richiesta fatta agli studenti di produzioni testuali personali (*TEP*, dal tedesco *Textuelle Eigenproduktion*, cioè produzione testuale personale) (D'Amore & Maier, 2002); tale richiesta rappresenta il *milieu* appositamente strutturato dal ricercatore. Notiamo che si tratta di una richiesta inusuale per il contesto in cui erano immersi gli studenti, paragonabile a un problema da risolvere. La risposta fornita nei *TEP* rappresenta invece lo stato di equilibrio raggiunto dallo studente in risposta alla perturbazione. Sottolineiamo che il focus del presente studio non è sulla distinzione tra processi e prodotti, ma sulle concezioni, in senso ampio, della e sulla dimostrazione, alle quali i partecipanti ricorrono nel confronto con il *milieu* appositamente predisposto, con l'obiettivo di ristabilire un equilibrio, causato dalla perturbazione del sistema soggetto-*milieu*. Evidenziamo inoltre che, nel corso degli studi universitari, possono verificarsi altre perturbazioni che saranno seguite da altre risposte intente a ristabilire l'equilibrio.[3] Si deduce il carattere provvisorio delle concezioni: nella fase di apprendimento una concezione può essere 'rivisitata' come risultato dell'adattamento ad un nuovo contesto.

Prendendo spunto dalla definizione fornita da Balacheff e Gaudin (2010), nel presente studio ci focalizziamo dunque sul ruolo del contesto sulle concezioni e sul loro sviluppo, ma il nostro interesse non è rivolto alla determinazione della concezione complessiva di dimostrazione di ogni singolo studente coinvolto nell'indagine, bensì alla raccolta e mappatura di possibili concezioni sulla dimostrazione che emergono dall'analisi complessiva dei *TEP* di tutte le studentesse e gli studenti nel contesto universitario descritto.

In letteratura si riscontrano anche diverse definizioni di *belief*. Ad esempio, Schoenfeld (1992) evidenzia che essi sono "le comprensioni e i sentimenti di un individuo che modellano i modi in cui l'individuo concettualizza e si impegna nel comportamento matematico" (p. 358). Da questo emerge che i *belief* rientrano nell'ambito dell'*affect*.[4] Abelson (1979) sottolinea che i sistemi di *belief* si basano fortemente su componenti valutative e affettive. Furinghetti e Pehkonen (2002) confermano che le convinzioni, quindi *belief*, riguardano sia

---

[3] Ringraziamo i *referee* per aver sollevato la questione della appropriatezza della definizione di concezione usata, inducendoci a esplicitare meglio la nostra scelta. In questo senso riteniamo importante sottolineare che Balacheff stesso (Balacheff, 2013) dichiara che il modello cK¢ (conception, knowing, concept) (non la definizione) è creato con il proposito di fornire uno strumento utile per progettare situazioni didattiche e ambienti di apprendimento di oggetti matematici specifici. Il presente contributo non ha invece questo obiettivo e per esso la definizione di concezione di Balacheff e Gaudin (2010) rappresenta, a nostro avviso, una scelta appropriata.

[4] Secondo Hannula (2012) l'*affect* coinvolge tutti quegli aspetti del pensiero umano che non riguardano la pura cognizione, come ad esempio le emozioni, le convinzioni, l'atteggiamento, il valore, la motivazione, i sentimenti, gli obiettivi, l'interesse, etc.

il dominio cognitivo sia quello affettivo. Ad esempio, chi ritiene che la Matematica sia noiosa, avrà maggiori difficoltà a comprenderla; chi non si reputa capace, non avrà fiducia nelle potenzialità e nell'utilità di tale disciplina (Furinghetti & Pehkonen, 2002).

Per chiarire il legame tra *conception* e *belief*, facciamo riferimento a Philipp (2007), citato da Cabassut et al. (2012): "[le concezioni sono] una nozione generale o struttura mentale che comprende beliefs, significati, concetti, proposizioni, regole, immagini mentali e preferenze (Philipp, 2007, p. 259)" (Cabassut et al., 2012, p. 175, traduzione degli autori). Da questo emerge che i *belief* sono inglobati nelle concezioni, secondo il punto di vista di Philipp, assunto anche da Cabassut et al. e nel presente lavoro. Questa prospettiva sulla relazione tra *belief* e concezioni non è in contraddizione con la definizione di concezione di Balacheff e Gaudin (2010), in quanto anche i *belief* possono essere intesi come stati di equilibrio, non esclusivamente di natura cognitiva, ma anche affettiva, frutto di un ciclo di azione/reazione tra un soggetto e un ambiente sotto vincoli restrittivi.

3.2. Individuazione delle Categorie Deduttive delle Concezioni sulla Dimostrazione

Per l'individuazione delle categorie deduttive non facciamo riferimento esclusivo alle ricerche sulle concezioni già presenti in letteratura e già menzionate nella sezione 2, anche perché spesso tali ricerche non hanno avuto un obiettivo classificatorio e quindi non forniscono delle categorie utili alla nostra indagine, ma anche alle numerose ricerche che si focalizzano sulle funzioni attribuite alla dimostrazione, sull'approccio alla dimostrazione in aula nonché sui diversi schemi dimostrativi.

3.2.1. Fonti per Categorie di Concezioni già Emerse dalle Ricerche d'Aula in Didattica della Matematica

Di seguito vengono riportati gli elementi individuati nelle fonti tratte dalle ricerche d'aula in Didattica della Matematica (Alibert, 1988; Balacheff, 1988; Coe & Ruthven, 1994; Dettori & Morselli, 2010; de Villiers, 1990; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000), da cui sono tratti degli elementi per la determinazione delle categorie deduttive. Di seguito, gli elementi utili alla determinazione delle categorie per via deduttiva sono evidenziati in corsivo.

De Villiers (1990) individua quelle che egli definisce le cinque funzioni più importanti della dimostrazione: *verifica* (riguarda la verità di un'affermazione ed è inerente alla validazione e al convincimento), *spiegazione* (fornisce informazioni sul perché un'affermazione è vera), *sistematizzazione* (riguarda l'organizzazione di vari risultati in un sistema deduttivo di assiomi, concetti principali e teoremi), *scoperta* (concerne la scoperta o l'invenzione di nuovi risultati), *comunicazione* (riguarda la trasmissione di conoscenza matematica). De Villiers afferma che a queste funzioni si potrebbero aggiungere la funzione *estetica* oppure quella di *autorealizzazione* nel caso in cui la dimostrazione sia vista come strumento per misurare l'ingegno del matematico. Anche se de Villiers non indaga esplicitamente le concezioni degli studenti, le diverse funzioni attribuite alla dimostrazione sono ritenute utili alla classificazione delle concezioni in quanto è plausibile pensare che, se si ritiene che la dimostrazione svolga una certa funzione, questa funzione sia una categoria che concorre alla costituzione della concezione che si ha della dimostrazione stessa.

Alibert (1988) distingue tra 'prove per convincere' e 'prove per mostrare': le prime rientrano nella visione della prova come *verifica/convincimento*, mentre le seconde nella visione della prova come *spiegazione*, sulla base della classificazione fornita da de Villiers (1990).

Coe e Ruthven (1994) mettono in luce le strategie dimostrative acquisite da studenti inglesi formati nell'ambito di un curriculum di Matematica 'post-Cockcroft'.[5] Dal loro lavoro si evince che pochi studenti ravvisano la necessità di spiegare regole e schemi o di inserirli in un sistema matematico più ampio. Secondo questo studio, la maggior parte delle strategie di dimostrazione dei soggetti coinvolti è di tipo empirico e la preoccupazione principale degli studenti è di convalidare regole e modelli rispetto ad alcuni esempi. Anche questi due autori indagano nel proprio lavoro tre funzioni della dimostrazione, rifacendosi al lavoro di Bell (1976): *verifica* o *giustificazione*, *illuminazione* e *sistematizzazione*. Anche queste categorie si possono ricondurre alla classificazione di de Villiers (1990), in quanto si sovrappongono ad alcune delle funzioni della dimostrazione già individuate da quest'ultimo.

Un'altra indagine di rilievo è quella di Healy e Hoyles (2000) che hanno analizzato le concezioni di studenti nella fascia d'età 14-15 anni sulla dimostrazione in Algebra. Individuano tre forme di dimostrazione: empirica, formale (algebrica) e narrativa. Dal loro studio emerge che c'è una differenza nella valutazione da parte degli studenti delle dimostrazioni che loro ritengono siano valutate in maniera positiva da un docente e quelle che loro reputano le migliori per sé stessi. Le prime sono quelle formali, cioè scritte in linguaggio algebrico, mentre le seconde sono quelle in forma narrativa e legate all'esperienza empirica, in particolare alla verifica su alcuni esempi, in linea con quanto individuato da Coe e Ruthven (1994). Infine, le ricercatrici codificano le descrizioni scritte dagli studenti sugli scopi della dimostrazione in tre categorie, seguendo e semplificando quelle esposte da de Villiers (1990): *verità*, *spiegazione* e *scoperta*.

Balacheff (1988) distingue le produzioni di dimostrazioni di quattordicenni tra *pragmatic proofs* e *intellectual proofs*. La prima tipologia di dimostrazione fa riferimento a un'azione efficiente fondata sulla manipolazione di oggetti concreti, mentre la seconda si basa sulla verbalizzazione di proprietà e sulle

[5] Si fa riferimento al Cockcroft Report, risalente al 1982, che è il rapporto della Commissione d'Inchiesta sull'insegnamento della Matematica nelle scuole primarie e secondarie in Inghilterra e Galles, presieduta da Sir W. H. Cockcroft.

relazioni tra esse.[6] Inoltre, Balacheff (1988) identifica quattro tipologie di approccio alla prova: *naïve empiricism,* secondo il quale la validità generale di un enunciato è dedotta dall'osservazione di alcuni singoli casi; *crucial experiment*, la cui origine potrebbe essere vista nella consapevolezza dell'insufficienza di una mera verifica basata su alcuni esempi che, però, si trova ancora all'interno di un limite cognitivo e di linguaggio che non consente allo studente di andare oltre; *generic example*, che è la generalizzazione di un esempio, sulla base di operazioni su un oggetto considerato come rappresentante di una classe; *thought experiment*, che è il risultato di un processo di decontestualizzazione, depersonalizzazione e detemporalizzazione a partire dall'esempio generico, in cui sono stati eliminati i riferimenti al particolare). Notiamo come soprattutto la tipologia del *naïve empiricism* sia stata riscontrata molto di frequente nelle ricerche citate in precedenza, come per esempio quella di Coe e Ruthven (1994) e in quella di Healy e Hoyles (2000). Anche nel caso di Balacheff, pur non trattandosi di una ricerca mirante ad individuare esplicitamente le concezioni degli studenti, gli approcci alla prova emersi forniscono degli strumenti operativi utili per indagare il modo di vedere la dimostrazione, in quanto il tipo di approccio alla prova è indice di una concezione implicita, più o meno distante dall'idea di dimostrazione in Matematica.

È rilevante in questo contesto anche il ben noto studio di Harel e Sowder (1998), il quale si focalizza sullo sviluppo della comprensione, della produzione e della valutazione delle dimostrazioni da parte degli studenti universitari. I due autori danno priorità alla dimostrazione come strumento di convinzione e derivano un sistema di categorie, dette 'schemi di dimostrazione', utili per classificare i comportamenti argomentativi degli individui. Harel e Sowder (1998) distinguono in prima istanza tra *schemi di prova di convinzione esterna* (suddivisi a loro volta in *schema di prova autoritario, schema di prova rituale* e *schema di prova simbolico)*, *schemi di prova empirici* (suddivisi in *schema di prova induttivo* e *schema di prova percettivo*) e *schemi di prova analitici* (suddivisi in *schema di prova trasformazionale*, a sua volta suddiviso in schema di prova internalizzato, interiorizzato e restrittivo, e *schema di prova assiomatico,* a sua volta suddiviso in schema di prova intuitivo-assiomatico, schema di prova strutturale e schema di prova assiomatizzante). Tali categorie rappresentano elementi utili alla determinazione di categorie tratte dalla letteratura, in quanto, come anche nel caso delle funzioni della dimostrazione, anche uno schema di prova che un soggetto adotta nella produzione di dimostrazioni è un elemento che incide sulla sua concezione di quest'ultima. Nella classificazione proposta da Harel e Sowder diventa anche chiaro come i *belief* possono rientrare in quelli relativi alle *conception*. Questo è particolarmente evidente nella caratterizzazione degli schemi di prova di

[6] Per una trattazione più approfondita delle tipologie di dimostrazione rimandiamo al paragrafo *5.2.* della quinta sezione, dedicata alla schematizzazione del sistema di categorie.

convinzione esterna, che fanno riferimento ad aspetti del pensiero umano che non riguardano la pura cognizione.

Infine, citiamo lo studio di Dettori e Morselli (2010) sui *belief* di insegnanti in formazione riguardo alla dimostrazione, dal quale emerge un aspetto 'funzionale' della dimostrazione, già rilevato da Polya (1967), ovvero quello della dimostrazione come *accorgimento mnemotecnico*, nel senso che conoscere i passaggi dimostrativi aiuta a ricordare meglio ciò che si vuole dimostrare e apprendere.

3.2.2. Fonti per Categorie di Concezioni già Emerse dalle Indagini Teoriche di Natura Epistemologica sulle Funzioni della Dimostrazione in Matematica

Nella determinazione di questo tipo di categorie, abbiamo considerato anche la classificazione delle funzioni della dimostrazione secondo Lolli (2005), che in questo contesto assume la prospettiva dell'epistemologo della Matematica.

Evidenziamo che, a differenza di quelle esaminate in precedenza, le funzioni messe in evidenza da Lolli non sono state dedotte sperimentalmente e non rientrano nella letteratura in Didattica della Matematica. Tuttavia, esse possono risultare utili ai fini della presente ricerca, in quanto è possibile che gli studenti di Matematica universitari facciano riferimento anche a funzioni della dimostrazione che non sono emerse dagli studi esaminati in precedenza, molti dei quali relativi a studenti più giovani. Riportiamo di seguito le funzioni individuate da Lolli (2005), mettendo in evidenza che alcune di esse si sovrappongono con quelle evidenziate da de Villiers (1990); in particolare *fornire spiegazioni*, *spiegare mediante riconduzione agli assiomi*, *spiegare mediante generalità*, *spiegare mediante sussunzione*, *spiegare mediante la semantica* e *spiegare 'perché non'* rientrano nella categoria *Spiegazione* (De Villiers, 1990); *stabilire collegamenti* rientra nella categoria *Sistematizzazione* (De Villiers, 1990); *provare la correttezza* rientra nella categoria *Verifica* (De Villiers, 1990); *scoprire controesempi* rientra nella categoria *Scoperta* (De Villiers, 1990); le funzioni individuate da Lolli (2005) che non si sovrappongono con quelle evidenziate da de Villiers (1990) sono: *evitare i calcoli*; *predire i risultati*; *controllare lo strumento*; *aumentare l'affidabilità*; *fare economia*; *suggerire generalizzazioni; trasportare risultati*; *fare due passi invece di infiniti*; *definire la semantica*; *risolvere problemi*; *esplicitare il contenuto costruttivo*; *estrarre algoritmi*; *fare umorismo*; *semplificare la vita*; *risparmiare risorse*; *sprecare risorse*; *creare concetti*; *inventare forme di ragionamento*; *resuscitare*; *refutare*; *suggerire teoremi*; *suggerire assiomi*; *suggerire le ipotesi giuste*; *vedere i risultati*; *sostituire l'intuizione*; *permettere l'intuizione*; *vedere quel che non c'è*; *raffinare l'intuizione*; *confermare l'intuizione*; *definire l'intuizione*.

Tutte le funzioni di Lolli (2005) appena riportate, contrassegnate con nomi che consideriamo autoesplicativi, sono rilevanti ai fini di questo studio, il cui obiettivo è individuare tutte le categorie che emergono dai dati raccolti, riconoscendo eventuali categorie già presenti in letteratura, e individuandone delle nuove.

3.2.3. Fonti per Categorie di Concezioni Tratte da Indagini Storico-Epistemologiche che Mirano all'Individuazione di Possibili Ostacoli Epistemologici

L'epistemologo della scienza Bachelard (1938) afferma che le cause della stagnazione, o addirittura regresso, dell'evoluzione del pensiero scientifico in alcuni momenti della sua storia, sono da ricercarsi nelle difficoltà intrinseche del processo conoscitivo. Egli chiama la resistenza psicologica all'atto del conoscere in tali contesti *ostacolo epistemologico*.

Brousseau (1989), mutuando l'idea di ostacolo epistemologico da Bachelard, introduce questo concetto nell'ambito della Didattica della Matematica, attribuendogli il significato di conoscenza, invece che di mancanza di conoscenza, che, da un certo punto in poi dell'evoluzione della comprensione di un concetto, porta a generare contraddizioni e risposte false o inadeguate.

Come è ben noto dalla ricerca (p.e. Brousseau, 1989; D'Amore et al., 2006) gli ostacoli epistemologici evidenziati nel percorso dello sviluppo della disciplina si riscontrano spesso anche nelle concezioni degli studenti. L'individuazione degli ostacoli epistemologici è dunque utile per la presente ricerca perché categorie di concezioni ad essi collegate potrebbero emergere nelle concezioni degli studenti coinvolti nell'indagine. Tuttavia, l'analisi dell'evoluzione storico epistemologica è utile non solo nell'individuazione di eventuali ostacoli epistemologici, ma serve anche per l'identificazione di eventuali concezioni basate su di essi. Per individuare possibili ostacoli epistemologici sulla dimostrazione, facciamo riferimento a Asenova (2019). L'autrice, prendendo spunto da Barbin (1994/1988), evidenzia tre importanti ostacoli epistemologici in questo ambito, basati sulle seguenti convinzioni:

- la convinzione che il concetto di dimostrazione in Geometria Euclidea possa essere utilizzato per spiegare il ragionamento matematico; questa convinzione viene fatta risalire all'influenza del pensiero parmenideo, secondo cui la 'via della verità', cioè il processo dimostrativo basato sul ragionamento logico, è l'unica via che può convincere, in quanto è l'unica che conduce alla verità;
- la convinzione che la contraddizione in Matematica abbia il ruolo di convincere e che dimostrare significhi convincere qualcuno della verità di un enunciato, piuttosto che di stabilire la coerenza in un sistema assiomatico, cioè la validità dell'enunciato in esso; questa convinzione viene fatta risalire all'influenza delle innovazioni del XVII secolo che hanno portato alla nascita di numerosi metodi matematici, caratterizzati da una grande forza esplicativa, ma ancora privi di una dimostrazione di validità, come per esempio il metodo degli indivisibili; il culmine della cristallizzazione di tale

convinzione si trova nell’opera *Discorso sul Metodo* di Descartes (2002/1637);

- la convinzione che la Matematica non sia un discorso in sé ma uno che tratta di qualcosa che esiste davvero e che dimostrare significhi provare la verità di un’affermazione e non la sua validità in un metalinguaggio, così come la supposizione dell’unitarietà tra linguaggio naturale e linguaggio matematico, con la conseguente mancanza di consapevolezza della complessa relazione tra essi; questa convinzione è legata all’emergere dei moderni sistemi assiomatici, in cui viene esclusa qualsiasi evidenza non puramente logica.

Il superamento dei primi due ostacoli richiede l’accesso a una specifica cultura di pensiero matematico che fonda le sue radici nella tradizione della Grecia Antica. Il superamento del terzo necessita di una trasposizione specifica che dipende dalle peculiarità del linguaggio naturale di riferimento. L’individuazione di questi ostacoli epistemologici ha consentito di categorizzare molte delle categorie di concezioni emerse dai dati, come verrà mostrato nella parte dedicata alla discussione dei risultati.

4. Metodologia Generale della Ricerca

4.1. Caratterizzazione Generale della Raccolta Dati

I soggetti coinvolti nella ricerca sono studenti del primo e del terzo anno della laurea triennale e studenti della laurea magistrale del corso di laurea in Matematica di un’università italiana. Il campione è stato così scelto per comprendere come cambia la concezione sulla dimostrazione da parte degli studenti universitari durante il corso di studi in Matematica. Nessuno dei soggetti coinvolti ha seguito un corso di Logica e nessuno degli studenti della laurea triennale ha seguito un corso di Didattica o di Fondamenti della Matematica. I dati sono stati raccolti nel mese di maggio, a conclusione dell’anno di studi, quindi le concezioni emerse dagli studenti del primo anno della laurea triennale non sono unicamente frutto dei loro precedenti studi scolastici, ma hanno risentito dell’influenza dei primi corsi frequentati.

I dati per la ricerca qui esposta sono stati raccolti nel 2019 sotto forma di *TEP* da parte del secondo autore dell’articolo e sono stati inquadrati teoricamente e analizzati nell’ambito della tesi magistrale del primo autore. I *TEP* sono produzioni nelle quali lo studente si libera da condizionamenti linguistici e usa espressioni il più possibile spontanee, volendosi esprimere in modo a parer suo comprensibile per il destinatario e con linguaggio personale (D’Amore & Maier, 2002).

La raccolta dati è avvenuta durante le ore di lezione degli studenti, con l’autorizzazione dei docenti dei corsi. Specifichiamo che chi ha raccolto i dati non era docente dei corsi frequentati dagli studenti coinvolti. Gli studenti sono stati informati che la raccolta dati fa parte di una ricerca nell'ambito della Didattica della Matematica.

In totale hanno partecipato 71 studenti e studentesse: 47 del primo anno di laurea triennale; 16 del terzo anno della laurea triennale; 8 della laurea magistrale. Specifichiamo che uno dei 71 *TEP* non è risultato utile ai fini di questa ricerca, dato che non rispondeva alla domanda della consegna del *TEP*, volta a far emergere le concezioni sulla dimostrazione. Si tratta di quello di uno studente del primo anno della laurea triennale.

Per la realizzazione del *TEP* è stato stimato un tempo di svolgimento di circa 20 minuti che si è rivelato sufficiente per tutti gli studenti coinvolti nell'indagine.

4.2. Testo della Richiesta del TEP

Riportiamo di seguito il testo della richiesta del *TEP*, rivolta agli studenti.

> *Giada, una studentessa di quarta superiore che l'anno prossimo vorrebbe iscriversi a Matematica, ti chiede di spiegarle che cos'è una dimostrazione e a che cosa serve in Matematica.*
>
> *Finora lei ne ha viste davvero poche a scuola e non è riuscita a farsi un'idea al riguardo, ma ha sentito dire che nel corso di laurea in Matematica le dimostrazioni si usano tantissimo.*
>
> *Potresti aiutarla con una spiegazione?*
>
> *Sentiti libero/a di usare il metodo e il linguaggio che preferisci e che ti sembrano i più efficaci per aiutarla a capire.*
>
> *Puoi consegnare il tuo foglio in maniera anonima, senza scrivere il tuo nome; è sufficiente che tu scriva se sei maschio o femmina.*
>
> *Grazie per la collaborazione, anche a nome di Giada.*

I soggetti coinvolti nella ricerca, avendo scelto di intraprendere il percorso degli studi universitari in Matematica, si sono trovati pochi anni prima nella stessa situazione in cui ora si ritrova Giada, ma nel frattempo hanno avuto modo di incontrare e studiare una grande quantità di dimostrazioni, già dal primo anno e a maggior ragione fino al corso di laurea magistrale. Chiedere a questi studenti di 'aiutare' Giada nel comprendere meglio che cosa sono e a che cosa servono le dimostrazioni in Matematica, rappresenta una scelta mirata.

Infatti, la scelta del tipo di destinatario (una studentessa più giovane che si trova in una situazione simile a quella da loro vissuta), la scelta di raccogliere i dati per mezzo di una produzione scritta che dà il tempo per riflettere ed eventualmente riformulare la propria risposta, la specificazione nella consegna del fatto che si è liberi di scegliere il metodo e il linguaggio da usare, sono tutti fattori che hanno contribuito a creare delle condizioni favorevoli all'emergere delle concezioni autentiche degli studenti universitari sulla dimostrazione, in linea con le caratteristiche dei *TEP* precedentemente evidenziate.

4.3. Metodi Qualitativi e Quantitativi

L’analisi dei dati è stata condotta ricorrendo in prima istanza a un metodo qualitativo, in particolare definendo delle categorie per via deduttiva (chiamate di seguito ‘categorie deduttive’), cioè tratte a-priori dalla letteratura, e per via induttiva (chiamate di seguito ‘categorie induttive’), cioè definite a partire dai dati raccolti, in accordo con il metodo di *Qualitative Content Analysis* (QCA, Mayring, 2015).

La scelta dell’uso di questo metodo è strettamente legata alle due domande di ricerca che sono state formulate. Infatti, dato che l’obiettivo è quello di studiare le concezioni degli studenti sulla dimostrazione, è significativa un’analisi che ne studi e interpreti le caratteristiche e dunque le qualità che emergono dal testo, piuttosto che le quantità.

Secondo Mayring (2015), il sistema di categorie, la cui definizione è riassunta in una agenda di codifica (Mayring, 2000), rappresenta lo strumento centrale della QCA ed esso è stato usato in questo senso nella presente ricerca.

Una volta individuate le categorie, l’analisi dei dati è di tipo quantitativo nell’indagare la frequenza delle diverse categorie.

5. Analisi dei Dati

5.1. Metodo di Analisi dei Dati

Per realizzare l’analisi dei dati sono stati letti tutti i *TEP* prodotti dagli studenti coinvolti, nel seguente ordine: primo anno di laurea triennale, terzo anno di laurea triennale e laurea magistrale. Lo scopo di questa prima lettura è stato quello di individuare la presenza di eventuali categorie definite per via deduttiva, sulla base degli elementi teorici emersi dalle analisi descritte nel paragrafo *3.2.*, cioè attraverso lo studio della letteratura di riferimento.

Sulla base di questa prima lettura, sono state riorganizzate le categorie deduttive, raggruppandole su più livelli, in una struttura gerarchica. In particolare, ne è stata realizzata una schematizzazione sulla base dei termini linguistici che sono stati considerati come indicatori della presenza di tali categorie (in linea con la QCA, Mayring, 2015). La ripartizione su più livelli è stata concepita per far sì che le concezioni degli studenti emerse dai *TEP* potessero rientrare in categorie più ampie, sulla base di determinate caratteristiche in comune.

Si è poi proceduto con una seconda lettura al fine di ricercare parole chiave per la creazione di nuove categorie induttive. La schematizzazione delle categorie deduttive è stata ampliata aggiungendo le nuove categorie induttive, creando un unico schema onnicomprensivo. Lo schema completo delle categorie è disponibile in Bertolini (2024), mentre in questa sede ci si focalizza solo sulle categorie effettivamente riscontrate durante l’analisi.

Grazie al lavoro di intreccio tra letture ripetute e strutturazione progressiva dello schema di categorie descritto in precedenza, è stato possibile isolare gli elementi più significativi dei *TEP* che hanno permesso di ‘ritrovare’ degli elementi riconducibili a delle categorie deduttive e/o di mostrare l’emergenza di nuove categorie induttive. In linea con quanto richiesto dalla metodologia della QCA, è stata elaborata l’agenda di codifica (Mayring, 2000), nella quale sono riportate le categorie, la loro definizione, degli esempi per ciascuna di esse, nonché le regole di codifica seguite. Un estratto di tale agenda di codifica è riportato a titolo esemplificativo nell’appendice.

Nei paragrafi successivi presentiamo in maniera dettagliata le modalità con cui sono state individuate e denominate le categorie induttive emerse (paragrafo *5.2.*) nonché un’analisi dettagliata di tre *TEP* per esemplificare l’emergere di queste categorie (paragrafo *5.3.*).

5.2. Categorie Induttive

Per completezza, riportiamo nel seguito la schematizzazione dettagliata ed esclusiva delle categorie induttive, ovvero contenente solamente le nuove categorie definite a partire dai *TEP* raccolti per questa ricerca.[7] Abbiamo stabilito di definire delle nuove categorie per via induttiva anche nel caso in cui esse siano state riscontrate solamente in un testo. Una tale categorizzazione è utile a classificare e a caratterizzare in maniera accurata e completa le concezioni degli studenti.

Le categorie sono state organizzate su più livelli: uno rappresentato dai punti e l’altro dai trattini nell’elenco puntato. Abbiamo inserito un primo livello (quello rappresentato dai punti), perché abbiamo osservato che alcune categorie induttive rientrano in categorie deduttive relative alle funzioni della dimostrazione, in particolare *Verifica*, *Spiegazione* e *Scoperta* (De Villiers, 1990), e ne rappresentano una particolare nuova specificazione.

Nell’analisi, la sigla LT1 indica che si tratta del *TEP* di uno studente o di una studentessa del primo anno della laurea triennale; LT3 indica che si tratta di uno studente o di una studentessa del terzo anno, mentre LM indica uno studente o una studentessa della laurea magistrale.

CATEGORIE RELATIVE ALLE FUNZIONI DELLA DIMOSTRAZIONE

- *Verifica*
  - *Dimostrazione come garanzia di rigore*. La Matematica è vista come il fondamento delle altre scienze; perciò, è importante che essa goda di un elevato rigore, garantito dalla dimostrazione. Esempio: *Proprio perché la Matematica è un importante appoggio per molte altre scienze è necessario che tali fondamenta siano solide. Per questo motivo sono*

[7] Dal link Tabella completa delle categorie è possibile accedere a una tabella riassuntiva completa delle categorie riscontrate nei *TEP*, con riferimenti espliciti a esempi riscontrati nei *TEP*.

importanti le dimostrazioni (LT1, M).

- *Spiegazione*
  - *Dietro le quinte*. Fuor di metafora, la dimostrazione è tutto ciò che si cela dietro ad un'affermazione matematica. Esempio: *La dimostrazione è il dietro le quinte di uno spettacolo* (LT1, F).
  - *Didattica*. La dimostrazione ha una funzione didattica, in particolare quella di far capire agli studenti il 'metodo matematico'. Esempi: *Si tratta di strumenti fondamentali non solo per capire come si è potuti giungere a un determinato risultato ma anche per comprendere a fondo il metodo di ragionamento dell'ambito di studio* (LT1, F); [Le dimostrazioni] *sono inoltre utili dal punto di vista didattico per farci capire come si è arrivati a una certa verità che ci sembra magari scontata ma che così scontata non è* (LT3, M).
- *Dimostrazione come strumento di scelta*. La dimostrazione è vista come uno strumento di selezione di verità matematiche. Consente di distinguere 'ciò che è', ovvero un risultato dimostrato, da ciò che potrebbe essere, ovvero una congettura. Esempi: *Chiunque potrebbe inventarsi una formula […] ma solo se può dimostrare che questa è matematicamente corretta può usarla* (LT1, F); *In Matematica, se non esistessero le dimostrazioni, ognuno potrebbe dire la sua, creare teoremi, definizioni* (LT1, F).
- *Scoperta*
  - *Dimostrazione come mezzo per aprire gli occhi*. La Matematica senza dimostrazione sarebbe come percorrere un sentiero con gli occhi bendati, rischiando di inciampare. Esempio: *Se non sei a conoscenza della dimostrazione che ci sta dietro è come se stessi percorrendo un sentiero con gli occhi bendati* (LT1, M).
- *Concretizzazione*. La dimostrazione ha la funzione di concretizzare un'idea, rappresentata da una congettura. Esempio: *Il teorema è l'idea e la dimostrazione è la concretezza dell'idea* (LT1, F).
- *Ossatura della Matematica*. Le dimostrazioni consentono di costruire la Matematica; ne sono le basi solide, ne costituiscono 'l'ossatura'. Non si fa riferimento all'organizzazione in un sistema deduttivo di assiomi, bensì al fatto che la dimostrazione è l'essenza della Matematica e consente di costruirne le fondamenta. Esempi: *Le dimostrazioni sono alla base della Matematica, senza di esse non sarebbe la stessa* (LT1, F); *Le dimostrazioni, in poche parole, danno una base solida su cui poggiare le proprie nozioni* (LT3, F; per maggiori dettagli si veda il paragrafo *5.3.*).

CATEGORIE RELATIVE ALLA STRUTTURA LOGICA DELLA DIMOSTRAZIONE

- *Ricetta*. La dimostrazione è quel procedimento (ricetta) che a partire dalle ipotesi (ingredienti) consente di arrivare ad affermare la tesi (torta). Esempio: *Una dimostrazione potrebbe essere paragonata, anche se in modo semplificato, ad una ricetta* (LT1, F; per maggiori dettagli si veda il paragrafo *5.3.*).

- *Catena di implicazioni*. La dimostrazione è una catena di implicazioni logiche del tipo 'se…allora…', le quali, partendo dalle ipotesi, conducono alla tesi. Esempio: *Teoremi, corollari, lemmi forniscono ipotesi e tesi e nella dimostrazione vengono usate le prime per arrivare al risultato, tramite una serie di passaggi logici e l'uso di risultati già presenti e dimostrati all'interno dell'ambiente matematico* (LM, M; per maggiori dettagli si veda il paragrafo *5.3.*).
- *Linguaggio matematico*. La dimostrazione rigorosa è caratterizzata da un certo formalismo, in particolare è scritta in linguaggio matematico che è diverso dal linguaggio naturale. Esempio: *mettendo insieme linguaggio naturale (l'italiano di tutti i giorni), linguaggio matematico e altri elementi, come gesti, disegni, ecc.…* (LM, M; per maggiori dettagli si veda il paragrafo *5.3.*).

CATEGORIE EPISTEMICHE

- *Creatività*. Per essere in grado di condurre una dimostrazione, è necessario essere creativi, avere intuizione e avere capacità di *problem solving*. Esempio: *In sostanza, le dimostrazioni richiedono anche inventiva e creatività per riuscire ad ottenere il risultato sperato* (LT1, F; per maggiori dettagli si veda il paragrafo *5.3.*).
- *Apprendimento non mnemonico della dimostrazione*. Questa categoria riguarda l'apprendimento della dimostrazione, la quale non deve essere appresa a memoria, bensì (ri)creata facendo leva sulla comprensione, in modo che con il passare del tempo risulti sempre meno complicato studiare nuove dimostrazioni. Esempio: *Ricordati che una dimostrazione non si impara a memoria, ma bisogna imparare a farla* (LT1, F).
- *Passaggi logici a volte banali*. Durante lo studio o la produzione di una dimostrazione può capitare di percepire alcuni passaggi logici come banali e quindi di pensare che non sia necessario compierli. Esempio: *Le dimostrazioni possono essere più o meno difficili e a volte sembrano superflue (a tutti capita di leggere un'affermazione e dire 'ovvio'!), ma anche in quei casi bisogna dimostrare* (LT3, F; per maggiori dettagli si veda il paragrafo *5.3.*).
- *Giudicare con criticità*. Tutte le volte che ci si imbatte in una dimostrazione, è bene giudicarla con spirito critico, ponendosi domande; questo può contribuire a sviluppare la capacità di dimostrare e ad arricchire la propria conoscenza. Esempio: *Giudicare con criticità ciò che ha dimostrato il professore* (LT1, M).
- *Processo che richiede tempo*. La realizzazione e lo studio di una dimostrazione richiedono tempo, il quale tuttavia diminuisce a mano a mano che si procede e si diventa più esperti. Esempio: *Ci misi un sacco di tempo a capire a fondo la prima dimostrazione* (LT1, F).

- *Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*. La dimostrazione è vista come quello strumento che consente allo studente di risolvere gli esercizi proposti dall'insegnante e quindi di soddisfare le sue aspettative. Esempio: *Ci sono quelle* [dimostrazioni] *che forniscono un vero e proprio iter che ci permette di risolvere la maggior parte degli esercizi* (LT1, F, si veda il paragrafo *5.3.*).

5.3. Analisi dei TEP

Di seguito presentiamo, a titolo esemplificativo, le analisi di tre *TEP* ritenuti particolarmente significativi per esemplificare l'emergere degli indicatori di alcune categorie induttive. Alcune di queste categorie si ritrovano in più di un *TEP*. Abbiamo messo in luce anche le categorie deduttive rilevate in queste stesse produzioni scritte, in modo da esemplificare come si sono estrapolate tutte le componenti delle concezioni sulla dimostrazione in casi specifici. Tali componenti emergono come tratti distintivi dello stato di equilibrio prodotto dal soggetto coinvolto nella ricerca, ottenuto tramite la stesura del *TEP*, in risposta alla perturbazione causata dalla sua consegna.

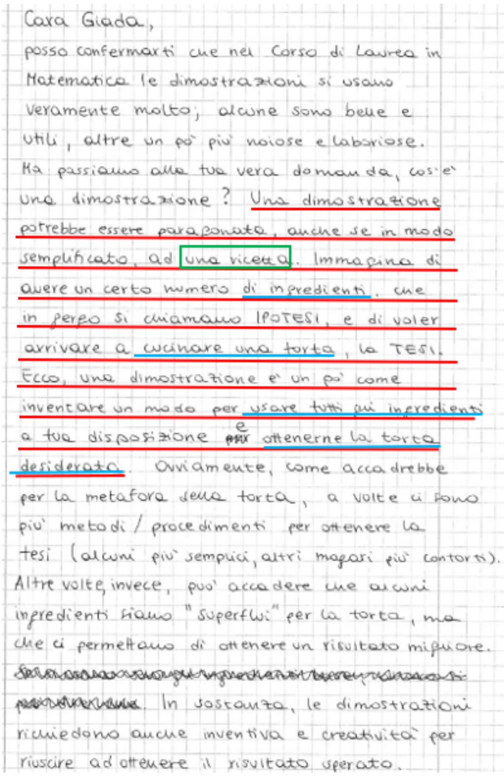
Per ciascun dei tre *TEP* vengono riportati dei frammenti ritenuti rilevanti per l'individuazione delle categorie di concezioni (sottolineati in rosso), evidenziando in tonalità di blu i termini usati per formulare la regola di codifica e in verde l'eventuale termine che ha dato origine alla definizione della categoria. Per ciascuno dei tre *TEP* vengono prima presentate le eventuali categorie induttive emerse e successivamente quelle deduttive.

I tre *TEP* da cui sono tratti i frammenti esaminati sono di una studentessa del primo anno della laurea triennale, di una studentessa del terzo anno della laurea magistrale e di uno studente della laurea magistrale. Mentre per i frammenti del primo *TEP* vengono mostrati, a titolo esemplificativo, i protocolli con la relativa trascrizione, per il secondo e terzo *TEP* si riportano, per motivi di spazio, solo le trascrizioni dei passaggi significativi.

TEP del primo anno della Laurea Triennale (LT1)

Figura 1

Frammento di protocollo in cui emerge la categoria induttiva "Ricetta", in cui sono messi in evidenza: la parte del TEP ritenuto rilevante per la definizione della categoria (sottolineato in rosso); i termini che sono stati usati per la codifica (sottolineati in azzurro); il termine che ha dato origine al nome della categoria (inquadrato in verde)


Cara Giada,
posso confermarti che nel Corso di Laurea in Matematica le dimostrazioni si usano veramente molto, alcune sono belle e utili, altre un po' più noiose e laboriose. Ma passiamo alla tua vera domanda, cos'e' una dimostrazione? Una dimostrazione potrebbe essere paragonata, anche se in modo semplificato, ad una ricetta. Immagina di avere un certo numero di ingredienti, che in gergo si chiamano IPOTESI, e di voler arrivare a cucinare una torta, la TESI. Ecco, una dimostrazione e' un po' come inventare un modo per usare tutti gli ingredienti a tua disposizione e ottenerne la torta desiderata. Ovviamente, come accadrebbe per la metafora della torta, a volte ci sono più metodi / procedimenti per ottenere la tesi (alcuni più semplici, altri magari più contorti). Altre volte, invece, può accadere che alcuni ingredienti siano "superflui" per la torta, ma che ci permettano di ottenere un risultato migliore. In sostanza, le dimostrazioni richiedono anche inventiva e creatività per riuscire ad ottenere il risultato sperato.

[*Una dimostrazione potrebbe essere paragonata, anche se in modo semplificato, ad una ricetta. Immagina di avere un certo numero di ingredienti, che in gergo si chiamano IPOTESI, e di voler arrivare a cucinare una torta, la TESI. Ecco, una dimostrazione è un po' come inventare un modo per usare tutti gli ingredienti a tua disposizione e ottenerne la torta desiderata. Ovviamente, come accadrebbe per la metafora della torta, a volte ci sono più metodi/procedimenti per ottenere la tesi (alcuni più semplici, altri magari più contorti). Altre volte, invece, può accadere che alcuni ingredienti siano 'superflui' per la torta, ma che ci permettano di ottenere un risultato migliore.*]

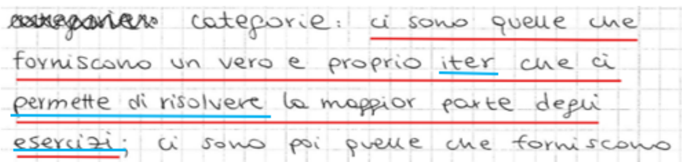
Dalle parole della studentessa (Fig. 1) emerge una concezione legata alla struttura e modalità di composizione degli elementi della dimostrazione. La studentessa ritiene che la dimostrazione sia una ricetta, ovvero quell'insieme di passaggi che consentono, a partire dagli ingredienti (ipotesi), di ottenere la torta (tesi).

Un aspetto su cui porre l'attenzione riguarda le parole *un modo per usare TUTTI gli ingredienti*: la studentessa, già al primo anno della laurea triennale, ha compreso l'importanza di usare tutte le ipotesi di un enunciato per ricavare la tesi. Gli enunciati dei teoremi, infatti, elencano tutte e sole le ipotesi che sono necessarie per ricavare la tesi, mentre ipotesi in più potrebbero portare a un risultato più circoscritto, proprio come dice anche la studentessa, *può accadere che alcuni ingredienti siano superflui per la torta, ma che ci permettano di ottenere un risultato migliore.* La studentessa, inoltre, dichiara che possono esistere più strategie di dimostrazione per ottenere la tesi a partire dalle stesse ipotesi: *a volte ci sono più metodi/procedimenti per ottenere la tesi (alcuni più semplici, altri magari più contorti).* Questa idea è probabilmente anche legata alle diverse tipologie di dimostrazione, ad esempio dimostrazioni effettuate per via diretta o indiretta.

Richiamandosi al termine usato nel *TEP*, abbiamo scelto di etichettare questa nuova categoria induttiva con *Ricetta*.

Figura 2

Frammento di protocollo in cui emerge la categoria induttiva "Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente", in cui sono messi in evidenza: la parte del TEP ritenuto rilevante per la definizione della categoria (sottolineato in rosso); i termini che sono stati usati per la codifica (sottolineati in azzurro)

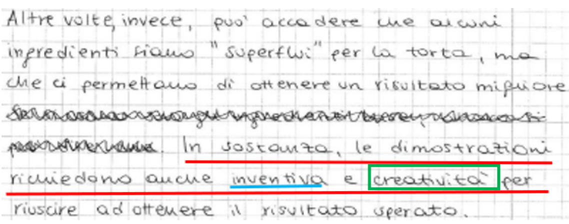

categorie: ci sono quelle che forniscono un vero e proprio iter che ci permette di risolvere la maggior parte degli esercizi; ci sono poi quelle che forniscono

[*Ci sono quelle* [dimostrazioni] *che forniscono un vero e proprio iter che ci permette di risolvere la maggior parte degli esercizi.*]

L'idea che pare emergere dal *TEP* in Fig. 2 è che la dimostrazione è quello strumento che consente di risolvere la maggior parte degli esercizi, proponendo un vero e proprio *iter* che potrebbe essere quello fornito in aula dal docente. La dimostrazione, in questo caso, è vista come l'applicazione di uno schema preciso, in modo da raggiungere il risultato atteso dal docente. La produzione scritta di questa studentessa ci ha permesso dunque di definire un'altra categoria induttiva: *Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*.

Figura 3

Frammento di protocollo in cui emerge la categoria "Creatività", in cui sono messi in evidenza: la parte del TEP ritenuto rilevante per la definizione della categoria (sottolineato in rosso); i termini che sono stati usati per la codifica (sottolineati in azzurro)


Altre volte, invece, può accadere che alcuni ingredienti siano "superflui" per la torta, ma che ci permettano di ottenere un risultato migliore. In sostanza, le dimostrazioni richiedono anche inventiva e creatività per riuscire ad ottenere il risultato sperato.

[*In sostanza, le dimostrazioni richiedono anche inventiva e creatività per riuscire ad ottenere il risultato sperato.*]

Secondo questa studentessa, per dimostrare è necessario essere creativi, avere l'intuizione e capacità di *problem solving*. Dalla concezione espressa in queste parole abbiamo definito la categoria induttiva *Creatività* che rientra tra le categorie epistemiche, perché legata a ciò che secondo lo studente è necessario sapere o saper fare per dimostrare.

In questo testo sono state individuate tre categorie induttive, mentre non sono state riscontrate categorie deduttive, ovvero già note in letteratura. È possibile notare come la studentessa abbia fatto ricorso a tre diverse categorie di concezione di dimostrazione per risolvere il problema che le era stato posto, cioè quello di spiegare a una studentessa più giovane che cosa sia una dimostrazione. La prima categoria (*Ricetta*) è di tipo metaforico e ha la funzione di rendere il contenuto accessibile al destinatario; la seconda categoria (*Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*), ha una funzione 'pragmatica', che mira a rendere il destinatario consapevole dell'utilità delle dimostrazioni come strumenti per soddisfare le richieste dei docenti; infine, l'ultima categoria (*Creatività*), ha la funzione di rendere il destinatario del testo consapevole del fatto che produrre una dimostrazione non è un semplice esercizio, ma un atto creativo. Tutte e tre queste concezioni svolgono dunque un ruolo specifico nel riequilibrio del sistema studente-*milieu*, perturbato dalla presa in carico della consegna del *TEP*.

TEP del terzo anno della Laurea Triennale (LT3)

Riportiamo di seguito la trascrizione del frammento del *TEP* ritenuto significativo (in corsivo), in cui sono evidenziati in tonalità di blu i termini che sono stati utili per formulare le regole di codifica (azzurro per la prima categoria, di tipo induttivo; blu scuro per la seconda, di tipo deduttivo), per poi presentare le categorie che sono state ricavate dall'analisi del frammento.

> *[...] La dimostrazione è fatta solo per proposizioni o teoremi, non per le definizioni: infatti, le definizioni danno i nomi alle cose (ci dicono che se una struttura matematica è fatta in un certo modo o ha certe caratteristiche, possiamo darle un nome specifico, per semplificarci la vita) mentre i teoremi ci dicono che al verificarsi di determinate situazioni (ipotesi) ci devono essere delle specifiche conseguenze. Quindi le dimostrazioni, in poche parole, danno una base solida su cui poggiare le proprie nozioni; a volte sono anche utili per capire cosa dice il teorema. [...]*

La studentessa vede la dimostrazione come strumento per costruire la Matematica, la sua ossatura, le sue basi. Si potrebbe sottolineare il legame tra questa concezione e quella che rientra nella categoria induttiva *Dimostrazione come garanzia di rigore*; tuttavia, il ruolo della dimostrazione nella concezione della studentessa è legato unicamente alla struttura della Matematica in sé. Manca la visione della Matematica come base delle altre scienze e l'idea, secondo la quale la dimostrazione consente alla Matematica di rivestire questo ruolo, grazie al suo rigore.

L'analisi di questo passaggio ha portato perciò alla creazione di una nuova categoria induttiva: *Ossatura della Matematica*. Rientra tra le categorie sulle funzioni della dimostrazione e viene codificata a partire da termini come *base solida* o *poggiare[su]*, nonché da frasi come *al verificarsi di determinate situazioni (ipotesi) ci devono essere delle specifiche conseguenze* (sottolineati in azzurro), che mettono in evidenza come le dimostrazioni creano i legami tra i risultati in matematica, producendo quella che abbiamo chiamato la sua ‘ossatura’.

> *[…] Le dimostrazioni possono essere più o meno difficili e a volte sembrano superflue (a tutti capita di leggere un’affermazione e dire ‘ovvio’!), ma anche in quei casi bisogna dimostrare (‘non si sa mai’; una cosa può sembrare ovvia, ma perché funziona? Sei in grado di farmi vedere in modo certo che le cose siano come dice il teorema?) […].*

Da questo frammento di *TEP* diventa evidente che la studentessa ritiene che, nonostante alcune affermazioni possano sembrare ovvie e alcuni passaggi siano percepiti come superflui, sia necessario dimostrare sempre tutto, perché solo tramite la dimostrazione si può essere certi che le cose vadano secondo l’enunciato del teorema. Questo passaggio, e in particolare il riferimento all’apparente banalità di alcune dimostrazioni, ha portato alla definizione di una nuova categoria induttiva. Essa rientra tra le categorie epistemiche, perché riguarda un aspetto dell’apprendimento della dimostrazione da parte del soggetto, ed è stata etichettata con l’espressione *Passaggi logici a volte banali*, codificata tramite riferimenti ai termini sottolineati in azzurro.

Per quanto concerne le categorie deduttive, in questo *TEP* ritroviamo la categoria *Provare la correttezza* (Lolli, 2005). Infatti, la studentessa afferma che una dimostrazione serve per essere sicuri al 100% che un’affermazione matematica (quindi un teorema, una proposizione) è corretta. Risulta chiaro che tale categoria rientra in quella più ampia, etichettata con il termine *Verifica* (De Villiers, 1990), secondo la schematizzazione del sistema di categorie a cui ci stiamo riferendo (Bertolini, 2024).

Si osserva che dalle parole *Sei in grado di farmi vedere in modo certo che le cose siano come dice il teorema?* Si deduce la concezione della studentessa, secondo la quale la dimostrazione consente di ‘vedere’ i risultati. Tale concezione rientra nella categoria deduttiva *Vedere i risultati* (Lolli, 2005), codificata tramite i termini sottolineati in blu scuro nell’estratto del *TEP*. Essa riguarda una funzione della dimostrazione e rientra anch’essa nella categoria più ampia *Verifica.*

Con *a volte sono anche utili per capire meglio cosa dice il teorema* si ritrova invece la categoria deduttiva *Spiegazione* (De Villiers, 1990). Secondo questa concezione, la dimostrazione ha la funzione di spiegare il significato del teorema in questione.

In questo testo sono state individuate due categorie induttive e tre categorie deduttive. Anche in questo caso, le categorie induttive sembrano avere la funzione di rendere il contenuto (meta)matematico accessibile al destinatario, mentre quelle deduttive forniscono informazioni sulle funzioni della dimostrazione che la studentessa ritiene importanti nella dimostrazione.

TEP della Laurea Magistrale (LM)

Anche in questo caso, riportiamo prima i frammenti del *TEP* ritenuti significativi per la definizione di una o più categorie (in corsivo), in cui sono evidenziati in tonalità di blu i termini che sono stati usati per formulare la regola di codifica, per poi presentare le categorie stesse e mettere in evidenza il ruolo che esse sembrano svolgere nel *TEP*.

> *[…] Mettendo insieme linguaggio naturale (l'italiano di tutti i giorni), linguaggio matematico e altri elementi, come gesti, disegni, ecc. […]*

Da queste parole emerge una concezione sull'uso del linguaggio matematico nelle dimostrazioni e in Matematica in generale, secondo cui il linguaggio matematico si distingue dal linguaggio naturale che nell'esperienza dello studente in questione è la lingua italiana. Grazie a ciò è stato possibile definire la categoria induttiva *Linguaggio matematico* che caratterizza una concezione che si focalizza in maniera esplicita sull'uso del linguaggio matematico e sul suo ruolo nelle dimostrazioni, piuttosto che ricorrere implicitamente a esso in contesti considerati più formali, come nel caso degli studenti coinvolti nella ricerca di Healy e Hoyles (2000).

> *[…] Teoremi, corollari, lemmi forniscono ipotesi e tesi e nella dimostrazione vengono usate le prime per arrivare al risultato, tramite una serie di passaggi logici e l'uso di risultati già presenti e dimostrati all'interno dell'ambiente matematico. […]*

Dalle parole di questo estratto del *TEP* emerge la concezione secondo la quale una dimostrazione, a partire dalle ipotesi, porta al risultato attraverso una serie di passaggi logici. Tale concezione fa parte della categoria *Catena di implicazioni* che riguarda la struttura logica della dimostrazione e che è già stata definita in precedenza.

> *[…] Una tesi potrebbe essere valida per un numero finito di casi empirici oppure ci si può convincere della sua validità con la semplice lettura del testo ('è ovvio che sia vero', 'ho trovato esempi per cui vale quindi vale sempre' sono frasi che si sentono), ma senza dimostrare formalmente e quindi generalizzare la tesi non possiamo usare quel risultato o porlo nel mondo dei risultati matematici validi […]*

Da questo estratto, in particolare dalla frase riportata *è ovvio che sia vero*, abbiamo ricavato una concezione già incontrata nel precedente *TEP* che rientra nella categoria *Passaggi logici a volte banali*. Lo studente, infatti, fa intendere che ci si potrebbe convincere erroneamente della verità di una tesi per il semplice fatto che esistono casi per i quali essa vale; egli afferma che, in realtà, un risultato può essere considerato valido e può essere usato solo se lo si è dimostrato formalmente.

Per quanto riguarda le categorie deduttive, ci focalizziamo sul seguente frammento del *TEP*:

> *[…] La dimostrazione non solo deve convincere, deve anche formalizzare un'idea, un risultato, sistemare una conoscenza all'interno di un ambito scientifico ben preciso. […]*

Con *La dimostrazione non solo deve convincere* emerge la concezione dello studente, secondo la quale la dimostrazione ha la funzione di convincere. Essa fa dunque parte della categoria *Prove per convincere* (Alibert, 1988), la quale a sua volta rientra nella categoria più ampia *Verifica* (De Villiers, 1990) che riguarda una delle funzioni della dimostrazione.

Dalle affermazioni deve anche formalizzare un'idea, un risultato, sistemare una conoscenza all'interno di un ambito scientifico ben preciso e l'uso di risultati già presenti e dimostrati all'interno dell'ambiente matematico si deduce la concezione di dimostrazione che rientra nella categoria *Sistematizzazione* (De Villiers, 1990), un'altra categoria relativa alle funzioni della dimostrazione. Lo studente, infatti, con tali affermazioni rivela di vedere la dimostrazione come uno strumento che consente di organizzare i risultati matematici in un sistema deduttivo, all'interno del quale si ricorre ad altri risultati già noti e dimostrati in precedenza.

Inoltre, tornando al frammento usato per definire le categorie induttive, nelle parole ma senza dimostrare formalmente e quindi generalizzare la tesi non possiamo usare quel risultato o porlo nel mondo dei risultati matematici validi, è possibile ritrovare la categoria deduttiva *Suggerire generalizzazioni* (Lolli, 2005). Questa rientra nella categoria *Esplicitazione*, secondo cui la dimostrazione è quello strumento che consente di rendere esplicito e vero in generale un risultato matematico, e riguarda una delle funzioni della dimostrazione. Secondo l'idea dello studente, la dimostrazione consente di fornire quella generalizzazione necessaria a far sì che il risultato sia valido. I risultati matematici sono validi per tutti i casi che soddisfano le ipotesi del teorema e non solo per alcuni esempi specifici.

Si osserva che lo studente, affermando che *Una tesi potrebbe essere valida per un numero finito di casi empirici* e *dimostrare formalmente e quindi generalizzare*, mette in contrapposizione tra loro due delle quattro tipologie di approccio alla prova, identificate da Balacheff (1988). Queste rientrano tra le categorie epistemiche, perché riguardano l'approccio all'apprendimento da parte del soggetto, e in questo caso specifico sono il *naïve empiricism*, in riferimento ai casi empirici, e il *generic example*, in riferimento alla generalizzazione. Lo studente si pone in modo critico rispetto all'approccio del *naïve empiricism*; infatti, egli afferma che mostrare che un enunciato è vero per alcuni casi non è una dimostrazione matematica.

Nel *TEP* di questo studente sono state individuate tre categorie induttive e tre categorie deduttive. A differenza dei due *TEP* esaminati in precedenza, le categorie induttive usate da questo studente non sembrano avere la funzione di rendere il contenuto (meta)matematico più accessibile al destinatario, ma forniscono comunque indicazioni utili, agli occhi dello studente che scrive, a individuare una dimostrazione e comprendere il significato che essa ha nella produzione della conoscenza matematica. Le categorie deduttive, invece, sembrano avere anche qui il ruolo di evidenziare le funzioni che l'autore del *TEP* ritiene importanti per la dimostrazione.

6. Risultati

Passiamo ora alla discussione dell'analisi dei dati in riferimento alle domande di ricerca che, per comodità del lettore, riportiamo qui di seguito:

- DR1: Quali concezioni sulla dimostrazione manifestano gli studenti di un corso di laurea in Matematica?
- DR2: Quale influenza ha il percorso di studi universitari in Matematica sulle concezioni sulla dimostrazione?

6.1. Risposta alla DR1

Dall'analisi dei dati raccolti è emerso che dalle 71 produzioni scritte totali sono state ricavate 195 concezioni sulla dimostrazione, raggruppate in 42 categorie sia deduttive sia induttive, individuate e schematizzate in un unico schema e riassunte in un'agenda di codifica riportata in appendice (Tabella 2).

Di seguito riportiamo una tabella riassuntiva che riporta il numero di volte che ciascuna delle categorie individuate compare nei *TEP* analizzati, per poi procedere con la discussione dei risultati e la risposta alle domande di ricerca. Specifichiamo che ogni concezione o sotto-concezione, facendo riferimento all'organizzazione esposta nel paragrafo *5.2.*, ha lo stesso peso nell'analisi. Infatti, il focus qui non è sulla struttura gerarchica delle categorie, che è stata necessaria per individuare le relazioni tra le concezioni già presenti in letteratura, evitando di considerare come diverse delle categorie che in realtà sono identiche, ma che non è determinante per l'individuazione delle diverse categorie di concezioni riscontrate nei dati.

Tabella 1

Rappresentazione riassuntiva delle categorie individuate e del numero di occorrenze di ciascuna di esse nei 71 TEP analizzati sul totale di 195 concezioni emerse (130 dagli studenti del primo anno della laurea triennale, 41 dagli studenti del terzo anno della laurea triennale e 24 dagli studenti della laurea magistrale); i nomi delle categorie induttive sono sottolineati

Categorie	*Numero di volte che la categoria appare nei TEP degli studenti del I anno della laurea triennale*	*Numero di volte che la categoria appare nei TEP degli studenti del III anno della laurea triennale*	*Numero di volte che la categoria appare nei TEP degli studenti della laurea magistrale*
Accorgimento mnemotecnico (Dettori & Morselli, 2010)	1	/	/
Aumentare l'affidabilità (Lolli, 2005)	1	/	/
Confermare l'intuizione (Lolli, 2005)	/	/	1
Esplicitare il contenuto costruttivo (Lolli, 2005)	/	1	/
Generic example (Balacheff, 1988)	/	/	2
Illuminazione (Coe & Ruthven, 1994)	1	/	/
Inventare forme di ragionamento (Lolli, 2005)	1	1	/
Provare la correttezza (Lolli, 2005)	2	1	1
Prove per convincere (Alibert, 1988)	/	/	1
Raffinare l'intuizione (Lolli, 2005)	1	2	/
Risolvere problemi (Lolli, 2005)	1	1	/
Schema di prova simbolico (Harel & Sowder, 1998)	3	/	/
Scoperta (De Villiers, 1990)	1	/	/

Scoprire controesempi (Lolli, 2005)	2	/	/
Semplificare la vita (Lolli, 2005)	1	/	/
Sistematizzazione (De Villiers, 1990)	8	2	2
Spiegare ‘perché non’ (Lolli, 2005)	2	/	/
Spiegare mediante generalità (Lolli, 2005)	2	1	/
Spiegazione (De Villiers, 1990)	18	7	/
Stabilire collegamenti (Lolli, 2005)	/	1	1
Suggerire generalizzazioni (Lolli, 2005)	1	/	1
Suggerire le ipotesi giuste (Lolli, 2005)	/	1	/
Suggerire teoremi (Lolli, 2005)	4	/	/
Vedere i risultati (Lolli, 2005)	1	3	/
Verifica o giustificazione (Coe & Ruthven, 1994)	3	/	/
Verifica/Convincimento (De Villiers, 1990)	19	6	5
Apprendimento non mnemonico della dimostrazione	4	1	/
Catena di implicazioni	7	3	3
Concretizzazione	1	/	/
Creatività	3	1	1
Didattica	2	1	/
Dietro le quinte	3	/	/
Dimostrazione come garanzia di rigore	3	/	2
Dimostrazione come mezzo per aprire gli occhi	2	/	/

Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente	5	/	/
Dimostrazione come strumento di scelta	9	3	/
Giudicare con criticità	1	/	/
Linguaggio matematico	5	/	1
Ossatura della Matematica	3	2	1
Passaggi logici a volte banali	4	2	2
Processo che richiede tempo	3	1	/
Ricetta	2	/	/

Le due categorie riscontrate con maggiore frequenza tra le produzioni scritte degli studenti coinvolti sono state, prima tra tutte, quella etichettata con *Verifica/Convincimento* e subito a seguire quella di *Spiegazione*, la prima con una frequenza di 30 su 195, la seconda di 25 su 195.[8] Si tratta in entrambi i casi di categorie deduttive, in particolare tratte dai lavori di de Villiers (1990). Questo risultato conferma che si tratta di concezioni diffuse tra gli studenti, anche a livello universitario.

Ripercorrendo la storia della dimostrazione, è possibile evidenziare che la concezione sulla dimostrazione come strumento per verificare/convincere può essere fatta risalire al pensiero di Parmenide, secondo cui l'unica via affidabile e convincente di acquisizione di conoscenza, nonché la sola a condurre alla verità, è quella basata sul ragionamento logico, su cui si basa il processo dimostrativo. Le concezioni che rientrano in questa categoria così frequente, rispecchiano, dunque, una delle prime concezioni nella storia della Matematica sull'idea di dimostrazione. Inoltre, per la maggior parte degli studenti che attribuiscono alla dimostrazione il ruolo di verificare e convincere, dimostrare significa convincere qualcuno della verità di un enunciato, piuttosto che della sua validità, legata alla non-contraddittorietà del sistema assiomatico in cui esso si dovrebbe inserire. Questo è il secondo ostacolo epistemologico legato al concetto di dimostrazione. Tuttavia, questo non vale per tutti i partecipanti alla sperimentazione. Infatti, a titolo di esempio, in due *TEP* si legge: *Una dimostrazione è un procedimento che permette di poter considerare valida*

[8] Osserviamo che con *Verifica/Convincimento* si intende la categoria deduttiva definita da de Villiers (1990), secondo cui la dimostrazione serve a convincere della verità di un risultato matematico, e si distingue dalla categoria *Verifica o giustificazione* definita da Coe e Ruthven (1994), secondo cui invece la dimostrazione è una pura giustificazione di un'affermazione matematica senza lo scopo di convincere. Entrambe rientrano nella categoria più ampia *Verifica*, secondo la schematizzazione del sistema di categorie (Bertolini, 2024).

un'affermazione (LT1, F) o ancora *Una dimostrazione […] stabilisce la validità di tutte le formule o proprietà che prendiamo per note* (LM, M); in questi casi si parla infatti di validità e non di verità.

Notiamo che, soprattutto nel secondo caso, il concetto di validità sembra abbastanza vicino a quello con cui esso è usato nella logica moderna ed esplicitato in riferimento al secondo ostacolo epistemologico, mentre nel primo caso non è chiaro se questo termine è usato con la stessa accezione oppure con un significato più legato al contesto quotidiano, in cui 'valido' sta per 'utile' o 'adatto all'uso'.

Le concezioni che rientrano nella categoria *Spiegazione*, seconda per frequenza in questa ricerca, sono legate a un altro momento storico nell'evoluzione del pensiero matematico, come esposto nel paragrafo *3.2.3.*, ovvero l'ingresso in campo di grandi scoperte e innovazioni in ambito scientifico, a partire dal secolo XVII. In questo contesto hanno fornito importanti contributi in ambito matematico Galilei, Newton, Descartes, Cavalieri e altri, i quali idearono dei metodi operativi e delle dimostrazioni costruttive, volte soprattutto ad arrivare a un determinato risultato spiegando anche come lo si raggiunge; tale spinta innovatrice trovò poi il suo apice nell'opera *Discorso sul metodo* di Descartes (2002/1637). In linea con questo pensiero, a partire dalle concezioni rientranti nella categoria *Spiegazione* possiamo affermare che la dimostrazione è vista come quello strumento che consente di spiegare il ragionamento matematico che porta all'affermazione di un risultato matematico. In due *TEP* si legge, ad esempio, che *Una dimostrazione è una spiegazione in termini matematici del significato di un teorema o una proposizione* (LT1, F) o anche che *Una dimostrazione è una spiegazione formale e rigorosa* (LT1, M). Abbiamo potuto osservare che in questa categoria rientrano solo concezioni di studenti della laurea triennale e non della laurea magistrale. Questo aspetto è approfondito più avanti nella trattazione, in particolare nella risposta alla seconda domanda di ricerca.

Il periodo di innovazioni e scoperte in ambito scientifico menzionato poc'anzi, ha portato a una prima crisi, in particolare inducendo i matematici dell'epoca ad esprimere alcune critiche al modo di condurre le dimostrazioni degli antichi greci. Uno dei 'difetti', elencati da Arnauld e Nicole (1850/1662), è il fatto di aver voluto dimostrare cose che non avevano bisogno di prova. Legate a tale questione, sono state individuate otto concezioni su 195 che ricadono nella categoria induttiva <u>Passaggi logici a volte banali</u>. Osserviamo, però, che tali concezioni sono in contrapposizione con la critica mossa agli antichi greci. Dai *TEP* raccolti, infatti, si deduce l'idea che, nonostante l'apparente banalità di alcune affermazioni, è sempre necessario e importante dimostrare la legittimità di ogni passaggio. Si legge, infatti che *Dare la giustificazione a quasi tutti i teoremi o frasi mi sembrava abbastanza superfluo, ma con il tempo ne ho capito l'importanza* (LT3, M) o ancora *Le dimostrazioni possono essere più o meno difficili e a volte sembrano superflue (a tutti capita* *di leggere un'affermazione e dire 'ovvio'!), ma anche in quei casi bisogna dimostrare* (LT3, F). Notiamo che, mentre nel primo caso questa convinzione sembra supportata anche da una convinzione (*belief*) della studentessa, nel secondo caso questo non è chiaro e potrebbe essere riconducibile ad aspetti legati al contratto didattico. Queste concezioni sembrano tuttavia essere basate più su un'idea della Matematica come corpus logico-deduttivo che come strumento di costruzione di conoscenza.

Un'altra categoria deduttiva ritrovata in molti testi è quella identificata con *Sistematizzazione* (De Villiers, 1990); essa è presente 12 volte su 195. Anche in questo caso si può evidenziare un legame tra le concezioni degli studenti e l'evoluzione verificatasi nel corso della storia della Matematica. In particolare, nel periodo storico in cui sono stati redatti gli *Elementi* di Euclide, sembra essere stata fondamentale la dimostrazione, in particolare nella sua forma indiretta. L'idea secondo la quale la dimostrazione è lo strumento che permette di sistematizzare i risultati in un sistema deduttivo di assiomi, definizioni e teoremi, emerge anche da alcuni *TEP* analizzati in questa ricerca; in uno dei testi, infatti, uno studente afferma: *La dimostrazione utilizza o assiomi o proposizioni più elaborate che si danno già per dimostrate* (LT1, M), mentre un'altra studentessa scrive: *Talvolta si ricorre ad alcuni teoremi per verificarne altri e questa catena di verifiche mostra come sia fondamentale aver già verificato i passaggi precedenti* (LT1, F).

Due concezioni emerse dall'analisi dei *TEP* rientrano nella categoria *Spiegare 'perché non'*, che è strettamente collegata alla più ampiamente nota tipologia di dimostrazione indiretta, ovvero la dimostrazione per assurdo. In questo caso è naturale il riferimento storico alla *reductio ad absurdum* di Zenone. Per esempio, due studentesse del primo anno della laurea triennale scrivono quanto segue: *Quelle* [le dimostrazioni] *'per assurdo' in cui parti negando la tua ipotesi iniziale e mostri che si arriva a qualcosa di impossibile o contraddittorio* (LT1, F) e *Ragionando per assurdo, suppongo che la tesi non sia vera e per dimostrare che il teorema è giusto devo ottenere nel procedimento un'incongruenza logica* (LT1, F). Nonostante la prima studentessa sembri confondere tra loro i termini tesi e ipotesi, il suo ragionamento è coerente con la categoria in questione. Si trova quindi un'ulteriore corrispondenza tra le concezioni degli studenti sulla dimostrazione e la sua evoluzione nel corso della storia.

Dall'analisi dei dati raccolti risulta che sei concezioni su 195 sulla dimostrazione rientrano nella categoria induttiva <u>*Linguaggio matematico*</u> e questo collega nuovamente la discussione a uno dei tre più importanti *ostacoli epistemologici* evidenziati nel paragrafo *3.2.3.*: la mancata consapevolezza riguardo al legame tra il linguaggio naturale e il linguaggio matematico. Uno studente della laurea magistrale, scrivendo che *Mettendo insieme linguaggio naturale (l'italiano di tutti i giorni), linguaggio matematico e altri elementi* (LM, M), espone l'idea, secondo la quale in una dimostrazione si usano sia il linguaggio naturale sia il linguaggio matematico. Anche uno studente del primo anno della laurea triennale, scrivendo *Uso costante del linguaggio matematico per esprimere teoremi e dimostrazioni. Le parole vengono usate comunque, a volte, ma molto più di rado* (LT1, M), evidenzia che secondo questo studente, in una dimostrazione sono coinvolti entrambi questi linguaggi, anche se quello naturale in misura inferiore. Da queste concezioni emerge la consapevolezza che si tratta di due linguaggi differenti. Tuttavia, in nessuno di questi *TEP* si fa riferimento esplicito al rapporto tra tali linguaggi, a cui abbiamo fatto cenno nel paragrafo *3.2.3.*, e al ruolo del linguaggio naturale nel far emergere quello matematico in maniera significativa (D'Amore & Santi, 2018), mentre si fa riferimento a una loro generica commistione. È importante notare che in questo caso il riferimento ai linguaggi è esplicito, mentre nel caso degli studenti che hanno partecipato alle ricerche di Healy e Hoyles (2000) e Stylianou et al. (2015), il ricorso ai differenti linguaggi è implicito e dettato dal contesto.

Da questo studio è risultata abbastanza frequente (13 casi su 195) anche la categoria induttiva <u>*Catena di implicazioni*</u> che raccoglie concezioni legate alla struttura logica della dimostrazione. Questo aspetto è a sua volta direttamente collegato all'apprendimento di quest'ultima; infatti, quando si studia una dimostrazione si tende a decomporla nei 'mattoncini' che la costituiscono e che rappresentano i passaggi logici intermedi, mettendo in luce la sua struttura consequenziale e deduttiva.

Dall'analisi dei dati è emerso che cinque concezioni su 195 rientrano nella categoria induttiva <u>*Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*</u>. Si è deciso di etichettare questa categoria come categoria epistemica perché essa riguarda le modalità con cui gli studenti si approcciano alla dimostrazione, anche se tali modalità non si riferiscono agli aspetti cognitivi ma ad aspetti legati al contratto didattico (Brousseau, 1986).

In particolare, secondo questa concezione, la dimostrazione è lo strumento che permette allo studente di soddisfare le aspettative del proprio insegnante, in quanto rappresenta quel procedimento, quell'*iter*, che porta alla risoluzione di esercizi, magari dati per compito. Nei *TEP* si legge, infatti che [La dimostrazione serve] *per affrontare gli esercizi, i problemi che ci vengono proposti* (LT1, F) o ancora [Le dimostrazioni] *sono utili per svolgere gli esercizi. Forniscono una scaletta su come svolgere l'esercizio* (LT1, F). Può essere che tale procedimento sia proprio quello esposto in aula dal docente e che lo studente si senta in dovere di seguirlo fedelmente. Anche se queste concezioni riguardano aspetti per così dire 'metadidattici', essi influiscono sul modo in cui lo studente approccia la dimostrazione e quindi anche sul modo in cui la concepisce; per questo motivo esse sono considerate concezioni epistemiche.

Abbiamo potuto osservare che dodici concezioni su 195 rientrano nella categoria <u>*Dimostrazione come strumento di scelta*</u>, secondo la quale la dimostrazione permette di distinguere un risultato matematico da una congettura che, se dimostrata, potrebbe diventare a sua volta un risultato matematico, ma che fino ad allora non è tale. In molti casi è emerso che la dimostrazione è quello strumento che fa sì che una determinata affermazione matematica, una volta dimostrata, possa effettivamente essere 'presa sul serio'. Si legge, ad esempio, che *In poche parole tutti possono scrivere un teorema ma se non lo riescono a dimostrare, in alcuni casi, non verrà considerato* (LT1, F)[9] o anche che *In Matematica ogni affermazione va giustificata per poter essere presa sul serio* (LT1, M). Lo sviluppo di concezioni appartenenti a questa categoria potrebbe essere legato al modo stesso in cui le dimostrazioni vengono esposte, o ancora di più richieste, dai docenti in aula. Spesso, infatti, capita che, nel momento in cui uno studente riporta un enunciato matematico, l'insegnante chieda di dimostrarlo e di provare che 'le cose stanno effettivamente così'. Anche queste concezioni sono, dunque, legate al contratto didattico, in quanto lo studente non vede l'importanza della dimostrazione per sé, bensì come strumento per soddisfare le aspettative del docente che ha posto particolare attenzione sul fatto che la dimostrazione permette di selezionare le affermazioni che possono essere considerate risultati matematici effettivi.

6.2. Risposta alla DR2

Di seguito riportiamo i risultati relativi alla distribuzione delle concezioni degli studenti sulla dimostrazione in base all'anno di frequenza del corso di laurea. Questa analisi, condotta in una prospettiva longitudinale, è stata realizzata principalmente con lo scopo di fornire una risposta alla seconda domanda di ricerca (DR2) che per maggiore chiarezza riportiamo di seguito:

> DR2: Quale influenza ha il percorso di studi universitari in Matematica sulle concezioni sulla dimostrazione?

Abbiamo potuto osservare un cambiamento delle concezioni sulla dimostrazione soprattutto tra gli studenti della laurea triennale e quelli della laurea magistrale. Infatti, le concezioni di studenti sia del primo anno sia del terzo anno della laurea triennale rientrano in modo vario in tutte le categorie individuate con questa ricerca e coprono dunque una vasta gamma di categorie. Le concezioni degli studenti della laurea magistrale, invece, sono più simili tra loro e sono distribuite su un numero inferiore di categorie. Questo può essere in parte dovuto al minor numero di studenti della laurea magistrale ma, come vedremo in seguito, appare chiaramente legato al percorso seguito.

Abbiamo osservato una lieve differenza anche tra le concezioni degli studenti del primo anno della laurea triennale e quelle degli studenti del terzo anno della laurea triennale. È emerso, infatti, che dagli studenti del primo anno della laurea triennale si sono ricavate concezioni in alcuni casi originali rispetto a quanto noto in letteratura ed espresse attraverso metafore. Si pensi, ad

[9] Notiamo che la studentessa usa in maniera impropria il termine 'teorema', in quanto un enunciato è un teorema se e solo se è stato dimostrato, e che molto probabilmente usa questo termine per riferirsi all'enunciato.

esempio, alla metafora della dimostrazione come ricetta o come modo per rivelare il ‘dietro le quinte di uno spettacolo’, oppure ancora come mezzo ‘per aprire gli occhi’. L’uso di metafore nelle concezioni degli studenti sembra dunque diminuire con l’avanzamento degli studi matematici e questa può essere considerata una prima componente di evoluzione delle concezioni in questo senso, anche se supportata da pochi dati.

Dall’analisi dei dati abbiamo invece riscontrato un’evoluzione significativa delle concezioni sulla dimostrazione nel passaggio dalla laurea triennale alla laurea magistrale. Da alcune delle concezioni degli studenti della laurea triennale è emerso che la dimostrazione è vista come quello strumento che consente di ottenere i risultati attesi dal docente e, ancora, come quel mezzo che fa sì che una determinata affermazione matematica, una volta dimostrata, possa effettivamente essere presa sul serio. Concezioni di questo tipo sono probabilmente dovute al contratto didattico e in questo caso lo studente apprende la dimostrazione per soddisfare le aspettative dell’insegnante più che per una esigenza personale.

Nel passaggio alla laurea magistrale si è osservato un significativo cambiamento nelle concezioni degli studenti in questo senso. La categoria più frequente è quella di *Verifica/Convincimento*. Su 130 concezioni degli studenti del primo anno di laurea triennale 19 rientrano in tale categoria, degli studenti del terzo anno della laurea triennale ne rientrano 6 su 41 e degli studenti della laurea magistrale ne rientrano 5 sul totale di 24. Gli studenti della laurea magistrale tendono a vedere la dimostrazione come mezzo di verifica e convincimento piuttosto che come strumento di spiegazione. Nella categoria *Spiegazione* non si trova infatti nemmeno un’affermazione di studenti della laurea magistrale che abbia condotto all’individuazione di tale concezione, mentre nella categoria più ampia *Verifica*, secondo la schematizzazione del sistema di categorie (Bertolini, 2024), rientrano nove concezioni su 195. La maggior parte di queste ultime ricade nella sottocategoria *Verifica/Convincimento*, una in *Provare la correttezza*, una in *Prove per convincere* e un paio nella categoria induttiva <u>*Dimostrazione come garanzia di rigore*</u>. Le altre due principali categorie, nelle quali rientrano concezioni sulla dimostrazione di studenti della laurea magistrale, sono *Sistematizzazione* e <u>*Catena di implicazioni*</u>. Si ritrovano anche affermazioni sulla generalità della dimostrazione, in particolare sul fatto che un determinato risultato valga in generale e non solo per alcuni casi specifici, e anche sul fatto che essa possa suggerire generalizzazioni. Da queste considerazioni emerge che questi studenti vedono la dimostrazione come strumento che consente, attraverso passaggi logici, di convincere e di convincersi della validità di un’affermazione all’interno di un sistema deduttivo.

Possiamo dunque affermare che c’è un’evoluzione delle concezioni nel passaggio dalla laurea triennale alla laurea magistrale. Per gli studenti della laurea magistrale, infatti, la dimostrazione assume un significato intrinseco, in quanto essa non è più percepita come qualcosa che viene imposto dall'esterno. Ci si allontana dalle regole del contratto didattico e la dimostrazione viene maggiormente vista come uno strumento di acquisizione di conoscenza.

In questo senso, la presente ricerca conferma quanto ci si potrebbe aspettare; infatti, gli studenti universitari dei primi anni risentono ancora dell'influenza delle modalità di insegnamento-apprendimento tipico della scuola secondaria, attribuendo alla dimostrazione un ruolo legato al contratto didattico. Durante il corso degli studi universitari, gli studenti hanno la possibilità di approfondire il modo con cui la disciplina si sviluppa e assumere sempre più la prospettiva del matematico che vede la dimostrazione come strumento per sé, per acquisire ulteriore conoscenza, e dunque come vero e proprio strumento di lavoro. Questo fatto può essere anche dovuto al crescente livello di socializzazione (Schoenfeld, 1992) nel contesto culturale in cui sono immersi gli studenti per un lungo periodo: quattro o cinque anni, se lo studente frequenta rispettivamente il primo o il secondo anno della laurea magistrale. Si evince quindi che, rispetto a quanto già noto in letteratura da studi condotti su studenti più giovani, in particolare su studenti della scuola secondaria di secondo grado, la presente ricerca ha consentito di ottenere informazioni su una prospettiva longitudinale più ampia.

7. Discussione

Riassumendo, in risposta alla prima domanda di ricerca, tra tutti gli studenti coinvolti sono state individuate 195 concezioni che sono state suddivise su 42 categorie, 16 induttive e 26 deduttive. La categoria con la maggior frequenza è stata quella sulla funzione della dimostrazione come verifica o convincimento, nella quale sono rientrate 30 concezioni in totale. La seconda categoria per frequenza è stata quella sulla funzione della dimostrazione come spiegazione.

Si sono ritrovate in diversi *TEP* anche categorie definite a partire dai dati, a conferma del fatto che sono concezioni condivise tra più soggetti. Tra le categorie induttive la più frequente è stata quella sulla struttura logica della dimostrazione, secondo la quale quest'ultima è una sequenza di passaggi logici che a partire dalle ipotesi permette di ottenere la tesi. Un dato interessante è che la seconda categoria induttiva per frequenza è quella in cui rientrano le concezioni sul fatto che la dimostrazione è lo strumento che consente di rendere una congettura un vero e proprio risultato matematico, in modo che sia riconosciuto come tale; dall'analisi è emerso che tali concezioni potrebbero essere conseguenza del contratto didattico.

In riferimento alla risposta alla seconda domanda di ricerca, possiamo riassumere che abbiamo effettivamente riscontrato un'evoluzione nelle categorie di concezioni degli studenti dei corsi universitari in Matematica della stessa istituzione universitaria, in particolare nel passaggio dalla laurea triennale alla laurea magistrale, confermando quanto ci si potrebbe aspettare. Da alcuni

TEP della laurea triennale sono emerse concezioni, molto probabilmente dovute alle conseguenze del contratto didattico secondo le quali la dimostrazione è vista come strumento per soddisfare le aspettative del docente. Gli studenti della laurea magistrale si discostano invece da questa visione e sviluppano concezioni sulla dimostrazione come strumento che assume un significato personale, più vicine alla prospettiva del matematico che usa la dimostrazione come strumento di lavoro, per acquisire nuova conoscenza. Inoltre, il ricorso a metafore nella formulazione delle concezioni sembra essere caratteristica all'inizio del corso di studi, mentre scompare quasi del tutto con l'avanzamento del percorso.

Dall'analisi dei dati abbiamo potuto constatare che nelle concezioni degli studenti coinvolti si riscontrano diversi elementi emersi dall'analisi dell'evoluzione storico-epistemologica del concetto di dimostrazione. In alcuni casi queste concezioni possono essere considerate in termini di ostacoli epistemologici, in altri casi non necessariamente. In ogni caso, l'analisi storico-epistemologica è stata molto utile per mettere in evidenza le basi epistemologiche su cui si potrebbero fondare molte concezioni, ma anche per guidare la discussione dei risultati delle analisi dei dati. Tale aspetto costituisce un risultato rilevante di questo studio, non contemplato finora in letteratura.

La scelta di raccogliere i dati da analizzare sotto forma di *TEP* è stata efficace, in quanto ha indotto gli studenti a sentirsi liberi di esprimersi spontaneamente, facendo così emergere più chiaramente le loro concezioni. L'uso di metafore, soprattutto da parte degli studenti della laurea triennale, sembra confermare questo aspetto. Si pensi, ad esempio, alla descrizione della dimostrazione come una ricetta, come il dietro le quinte di uno spettacolo, come mezzo per aprire gli occhi, come struttura (ossatura) della Matematica e altre ancora, che testimoniano il ricorso a un linguaggio spontaneo e non usuale in testi destinati al docente. Naturalmente, non in tutti i casi è possibile avere la certezza che la produzione scritta degli studenti sia effettivamente un *TEP*, nel senso che lo studente lo abbia scritto affrancandosi da condizionamenti di natura didattica e in alcuni casi questi aspetti potrebbero aver influito sulle risposte. Tuttavia, è possibile affermare che non sono state riscontrate delle evidenze in questo senso, mentre le numerose metafore presenti nei testi degli studenti della laurea triennale, alcuni più o meno espliciti riferimenti ad aspetti legati al contratto didattico nei testi, nonché la grande varietà di categorie individuate sembrano testimoniare a favore dell'ipotesi che le produzioni scritte esaminate si possano considerare dei *TEP*, almeno nella stragrande maggioranza dei casi.

Inoltre, la scelta di ricorrere ai *TEP* ha permesso di mostrare come i soggetti partecipanti tendono a ricorrere a categorie più personali e poco o per nulla documentate in bibliografia, nel momento in cui sono confrontati con una richiesta di spiegazione destinata a una persona che non possiede ancora gli strumenti linguistici e concettuali per comprendere ciò che loro considerano sia una dimostrazione in matematica, con la funzione di rendere il contenuto affrontato accessibile al destinatario. La richiesta del *TEP* ha rappresentato un vero e proprio problema che i soggetti partecipanti hanno cercato di risolvere attraverso la stesura dei *TEP* stessi, al fine di ristabilire l'equilibrio del sistema studente-*milieu* che tale richiesta ha turbato. Per questo motivo, riferendosi alla definizione fornita da Balacheff e Gaudin (2010), i *TEP* stessi, rappresentati dalle concezioni in essi emerse, sono classificabili come concezioni. Lo sforzo fatto dai soggetti partecipanti nell'individuare una strategia risolutiva adatta per ristabilire l'equilibrio del sistema soggetto-*milieu*, diventa evidente dal fatto che molte delle categorie induttive si basano su delle metafore o su rappresentazioni mentali personali, fornendo una rappresentazione genuina delle immagini mentali che la persona che ha prodotto il *TEP* associa al concetto di dimostrazione. Le categorie deduttive, soprattutto quelle basate sulle funzioni della dimostrazione (De Villiers, 1990), sembrano invece essere usate in molti casi con una funzione diversa, legata più all'intenzione di evidenziare gli elementi più significativi del processo di socializzazione nel contesto culturale, secondo Schoenfeld (1992), di un percorso di studi in Matematica. Questa tipologia di categorie risulta molto utile per comprendere quali funzioni della dimostrazione sono state recepite e percepite come importanti da parte degli studenti nel loro percorso universitario. Di conseguenza, la mancanza di ricezione del ruolo di altre funzioni della dimostrazione (p.e. *Estetica*, di *Comunicazione* e di *Autorealizzazione*, de Villiers, 1990), può essere un segnale importante da tenere in conto nella riflessione sulla formazione dei futuri matematici e in particolare dei futuri docenti di matematica.

La frequenza e varietà nella scelta delle descrizioni metaforiche ci ha permesso di definire nuove categorie sulle concezioni sulla dimostrazione che arricchiscono la letteratura di ricerca in Didattica della Matematica su questo argomento e contribuiscono alla costruzione di una mappatura più esaustiva delle possibili concezioni. Infatti, un risultato 'secondario' della presente ricerca, in quanto esso non ricadeva tra gli obiettivi esplicitati nelle domande di ricerca, è la produzione di una struttura delle possibili concezioni che mette in evidenza categorie e sottocategorie sia tratte dalla letteratura sia individuate a partire dai dati. Tale struttura, presentata nella sua forma integrale in Bertolini (2024), può essere uno strumento metodologico utile per 'navigare' le ricerche sull'argomento e per classificare le concezioni degli studenti in futuri studi, come sollecitato da Ouvrier-Buffet (2023). Inoltre, in riferimento a quanto noto in letteratura dalla ricerca di Jones (1998), è possibile notare che proprio grazie al ricorso ai *TEP* è stato possibile individuare aspetti originali e inediti di concetti e termini che contribuiscono a formare l'idea che lo studente si fa del concetto di dimostrazione. Infatti, i termini usati dai partecipanti nello studio di Jones (1998) appartengono tutti al linguaggio accademicamente accettabile (p. e. tesi, ipotesi, esempio, controesempio, contraddizione, teorema, lemma etc.), mentre sono del tutto assenti elementi che esprimano le immagini mentali che gli studenti attivano quando pensano alla dimostrazione, ma che probabilmente ritengono non adatti a un contesto istituzionalizzato, come è quello di un corso universitario. Anche in riferimento alla classificazione degli schemi di prova noti in letteratura (Harel e Sowder, 1998), la presente ricerca può fornire degli esempi inediti di concezioni di soggetti che sembrano aderire a un dato schema di prova. A tale proposito sarebbe tuttavia necessario analizzare i risultati in una prospettiva classificatoria differente, che esula dallo scopo della presente ricerca.

8. Conclusioni

Nella parte introduttiva di questo articolo abbiamo messo in luce il fatto che in letteratura sono presenti numerosi lavori che hanno come soggetti studenti della scuola secondaria di secondo grado oppure insegnanti e docenti in formazione, mentre molto più rare sono le ricerche svolte coinvolgendo studenti universitari di un corso di laurea in Matematica. La presente ricerca ha consentito di mettere in evidenza un'ampia gamma di concezioni che questo tipo di studenti usa nel momento in cui si sente autorizzato a ricorrere a modalità di spiegazione e forme linguistiche che ritiene più opportuni, facendo emergere tali concezioni come autentici strumenti di 'rimessa in equilibrio' del sistema soggetto-*milieu* in risposta alla perturbazione prodotta dalla consegna del *TEP*.

La presente ricerca ha tuttavia anche alcune limitazioni che riteniamo importante evidenziare soprattutto in riferimento a tre aspetti. Una prima limitazione riguarda il fatto che non trattandosi degli stessi studenti seguiti negli anni, non è stato possibile fare affermazioni sull'evoluzione delle concezioni personali di ciascuno studente. Una ricerca longitudinale che consenta di studiare il fenomeno in questo senso potrebbe fornire informazioni utili per comprendere l'evoluzione delle concezioni degli studenti più in profondità, ma richiederebbe un arco temporale di almeno cinque anni. Essa potrebbe essere strutturata in maniera tale da coinvolgere delle osservazioni di attività svolte in risposta a task appositamente predisposti, il che consentirebbe di ricorrere anche al modello cK¢ (Balacheff, 2013), rendendo l'indagine sulle concezioni più operativa e utile per tracciare anche i processi in tali setting. Una seconda limitazione riguarda il fatto che la ricerca non ha tenuto conto del curriculum di studio seguito dagli studenti, soprattutto per quanto riguarda gli studenti della laurea magistrale. Per esempio, non si è potuto distinguere tra studenti della laurea magistrale che hanno seguito un corso di Didattica della Matematica e studenti che non l'hanno fatto, ma esso potrebbe aver influito sul loro modo di vedere la dimostrazione. Tuttavia, anche in questo caso è importante sottolineare che il focus della presente ricerca non è sulle concezioni individuali del singolo studente, ma sulle tipologie di concezioni degli studenti che seguono un percorso di formazione altamente specializzato in Matematica.

Infine, la terza limitazione riguarda il campione ridotto di partecipanti che provengono tutti dalla stessa università italiana; questo potrebbe aver fatto sì che alcune categorie si presentassero con un numero di occorrenze limitato.

Un possibile spunto per future ricerche sull’argomento discende direttamente dalla prima limitazione delineata in precedenza. Riteniamo che sarebbe interessante condurre in futuro una ricerca simile a quella esposta in questo studio, quindi sulle concezioni degli studenti di un corso di laurea in Matematica, che consenta di seguire gli stessi studenti nel corso degli anni, intervistandoli all’inizio, in alcuni momenti intermedi e alla fine del loro percorso di studi universitari. Questo consentirebbe di analizzare l’evoluzione delle concezioni sulla dimostrazione con una prospettiva verticale e darebbe la possibilità di tenere conto anche del percorso universitario individuale di ogni singolo studente, superando contemporaneamente la seconda limitazione evidenziata in precedenza.

Un’altra direzione per sviluppi di ricerca futuri è quella di partecipare alla progettazione e/o implementazione del questionario proposto da Ouvrier-Buffet (2023), innescando collaborazioni in Europa sulle concezioni degli studenti sulla dimostrazione, in particolare nel passaggio dall’istruzione secondaria a quella terziaria e approfondendo qui le caratteristiche nazionali italiane in riferimento a quelle degli altri Paesi partecipanti. Eventuali future ricerche, come quelle descritte in precedenza, incrementerebbero anche il campione da cui sono tratti i dati, consentendo di rendere i risultati anche statisticamente più significativi.

Ringraziamenti

Un sentito grazie a tutti gli studenti delle lauree triennale e magistrale dell’Università di Modena che hanno partecipato a questo studio e ai loro docenti che hanno consentito che i dati fossero raccolti durante le loro ore di lezione.

Si ringraziano i referee e l’editor incaricato dell’articolo per averci dato l’occasione di approfondire alcuni aspetti del quadro teorico e per i suggerimenti utili a migliorare la presentazione della ricerca.

Riferimenti

Abelson, R. (1979). Differences between belief systems and knowledge systems. *Cognitive Science, 3*(4), 355–366. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0304_4

Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics, 8*(2), 31–35.

Antonini, S. (2019). Intuitive acceptance of proof by contradiction. *ZDM—Mathematics Education, 51*(5), 793–806. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01066-4

Arnauld, A., & Nicole, P. (1850). *Logic, or the art of thinking: being the Port-Royal Logic.* (T. S. Baynes, Trans.) Sutherland and Knox. (Original work published 1662).

Asenova, M. (2019). Epistemological obstacles in the evolution of the concept of proof in the path of ancient Greek tradition. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)* (pp. 120–127). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'espirit scientifique*. Vrin.

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 284–298). NCTM.

Balacheff, N. (2013). cK¢, A Model to Reason on Learners' Conceptions. In M. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.). (2013). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2–15). University of Illinois at Chicago.

Balacheff, N., & Gaudin N. (2010). Modeling students' conceptions: The case of function. *Research in Collegiate Mathematics Education,* 16, 183–211.

Barbin, E. (1994). La dimostrazione in Matematica: significati epistemologici e questioni didattiche. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 17B*(3), 209–249. [Original work: Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin APMEP, 366*, 591–620].

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics, 7*(1–2), 23–40. https://doi.org/10.1007/BF00144356

Bertolini, T. (2024). *Un'Analisi delle Concezioni sulla Dimostrazione di Studenti di un Corso di Laurea in Matematica* [Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia]. MoReThesis.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz, & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits* (pp. 41–63). Les Editions Agence d'Arc Inc.

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., & Morselli, F. (2012). Conceptions of Proof - In Research and Teaching. In Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.), *New ICMI Study Series* (Vol. 15, pp. 169–190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_20

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal, 20*(1), 41–53. https://doi.org/10.1080/0141192940200105

D'Amore B., Radford L., & Bagni G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 29B*(1), 11–40.

D'Amore, B., & Santi, G. (2018). Natural language and "mathematics languages": Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La Matematica e la sua Didattica*, *26*(1), 57–82.

D’Amore, B., & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La Matematica e la sua Didattica, 16*(2), 144–189.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell’idea di “misconcezione”. *La Matematica e la sua Didattica, 19*(2), 139–163.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*(24), 17–24.

Descartes, R. (2002). *Discorso sul Metodo. Testo francese a fronte*. L. U. Ulivi (a cura di). Bompiani. (Lavoro originale pubblicato nel 1637).

Dettori, G., & Morselli, F. (2010). Un’attività narrativa per far emergere i beliefs sulla dimostrazione. *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 33B*(4), 434–456.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education* (pp. 39–57). Kluwer.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 137–161. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubisnky (Eds.), *Issues in mathematics education. Research in collegiate mathematics education III* (Vol. 7, pp. 234–283). American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396–428. https://doi.org/10.2307/749651

Heinze, A., Reiss, K., & Rudoph, F. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. ZDM–*Zentrablatt für Didaktik der Mathematik, 37*(3), 212–220. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0011-7

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students’ approaches to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7–16.

Jones, K. (1998). Mathematics graduates’ conceptions of mathematical proof. In *Pre-Proceedings of ICMI Study Conference on the teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 161–164). NIE

Lolli, G. (2005). *QED. Fenomenologia della dimostrazione*. Bollati Boringhieri.

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum: Qualitative Social Research, 1*(2), Art. 20, 1–10.

Mayring, P. (2015*). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures*. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds*.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education – Examples of Methodology and Methods* (pp. 365–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

MIUR - Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i Licei (Allegato B)*. MIUR.

Ouvrier-Buffet, C. (2023). Exploring students’ conceptions of proof in high-school and university: A proposal for collaborations in Europe. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp.

240–247). Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Eötvös Loránd University of Budapest.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). NCTM/Information Age Publishing. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_20

Polya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica.* Feltrinelli Editore.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334–370). Macmillan.

Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *New ICMI Study Series* (Vol. 15, pp. 391–420). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6

Stewart, S., & Thomas, M. O. (2019). *Student perspectives on proof in linear algebra. ZDM—Mathematics Education, 51*(7), 1069–1082. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01087-z

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(1), 91–134. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0

Thurston, W. P. (2006). On Proof and Progress in Mathematics. In R. Hersh (Ed.), *Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp. 37–55). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-29831-2_3

Appendice

A titolo esemplificativo riportiamo nel seguito un estratto dell’agenda di codifica (Tabella 2), nella quale sono inserite alcune delle concezioni più significative tra tutte le 195 concezioni ricavate dai 70 *TEP* (ricordiamo che i *TEP* erano in totale 71, ma uno non è risultato utile ai fini della ricerca). Sottolineiamo inoltre che in ciascun *TEP* di solito è stata riscontrata più di una singola concezione sulla dimostrazione.

La tabella è organizzata come segue: nella prima colonna a sinistra sono riportati nomi delle categorie sia induttive sia deduttive riscontrare nei *TEP* e la frequenza di ciascuna di esse, ovvero il numero di volte che tale categoria è stata individuata; nella seconda colonna è contenuta la definizione esplicita della specifica categoria; nella terza colonna sono inseriti alcuni esempi tratti dai testi che sono stati classificati come appartenenti a tale categoria. Ogni affermazione è seguita dalle sigle LT1, LT3 oppure LM (a seconda che si tratti di uno studente o una studentessa del primo anno della laurea triennale, del terzo anno della laurea triennale o della laurea magistrale rispettivamente), M (se si tratta di uno studente) oppure F (se si tratta di una studentessa); nessuna sigla sul genere se questo non è specificato. Mettiamo tuttavia in evidenza che il dato relativo al genere non è stato rilevante ai fini della ricerca. Infine, nella quarta colonna sono riassunte le regole di codifica.

Tabella 2
Estratto dell’agenda di codifica delle concezioni sulla dimostrazione degli studenti coinvolti nella ricerca

Categoria *Frequenza*	*Definizione*	*Esempi tratti dai testi*	*Regole di codifica*
Accorgimento mnemotecnico (Dettori & Morselli, 2010) 1	*Dimostrazione come strumento di memorizzazione di risultati e relazioni tra essi.*	*Una dimostrazione dovrebbe in sostanza aiutarti a capire il ‘retroscena’ di un enunciato e a ricordarlo più facilmente una volta studiata* (LT1, F).	*Si fa esplicitamente riferimento ad aspetti legati alla memorizzazione della dimostrazione come supporto all’apprendimento.*
Apprendimento non mnemonico della dimostrazione 5	*Dimostrazione come uno strumento di lavoro che va compreso e non appreso a memoria.*	*Un matematico non deve saperle* [le dimostrazioni] *a memoria, ma deve saperle fare* (LT1, F); *Ti consiglio di non impararle* [le dimostrazioni] *a memoria, rischieresti di dimenticare anche un piccolo dettaglio che invece si potrebbe rivelare fondamentale* (LT3, F).	*Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva, p.e. quella dell’accorgimento mnemonico, e si nega esplicitamente l’utilità della memorizzazione per un apprendimento efficace e autentico.*

<u>Catena di implicazioni</u> 13	*Dimostrazione come uno strumento logico deduttivo che, attraverso dei passaggi logici, conduce da una o più affermazioni, dette ipotesi, a un'affermazione finale, detta tesi.*	*In generale una dimostrazione è dunque una catena di implicazioni logiche del tipo se allora che partendo dall'ipotesi arrivano alla tesi* (LT1, M); *Una dimostrazione può essere vista come una successione ordinata di operazioni logico-matematiche* (LT3, M); *Teoremi, corollari, lemmi forniscono ipotesi e tesi e nella dimostrazione vengono usate le prime per arrivare al risultato, tramite una serie di passaggi logici e l'uso di risultati già presenti e dimostrati all'interno dell'ambiente matematico* (LM, M).	*Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa esplicitamente riferimento a dei passaggi logico-deduttivi come caratterizzanti per la dimostrazione.*
<u>Creatività</u> 5	*Dimostrazione come ciò per cui, se la si vuole condurre, è necessario essere creativi, avere intuizione e capacità di problem solving.*	*Le dimostrazioni richiedono anche inventiva e creatività* (LT1, F); *Ti capiterà di rimanere affascinata dalla creatività di alcuni matematici, che per dimostrare i loro teoremi hanno fatto incredibili ragionamenti* (LT1, F); *Le dimostrazioni di solito risultano più semplici per le persone con maggiore capacità di problem solving* (LT3, M).	*Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento esplicito alla creatività e all'inventiva.*
<u>Didattica</u> 3	*Dimostrazione come strumento che consente di far capire il 'metodo matematico'.*	*Si tratta di strumenti fondamentali non solo per capire come si è potuti giungere a un determinato risultato ma anche per comprendere a fondo il metodo di ragionamento dell'ambito di studio* (LT1, F); *Una dimostrazione dovrebbe insegnarti il metodo per ragionare su qualcosa e renderti autonoma nel caso volessi provarci da sola* (LT1, F).	*Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa esplicitamente riferimento all'utilità didattica della dimostrazione nel mostrare il metodo di ragionamento ritenuto adeguato al contesto di riferimento.*

<u>*Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*</u> 5	*Dimostrazione come strumento che consente di soddisfare le aspettative del docente.*	*Ci sono quelle* [dimostrazioni] *che forniscono un vero e proprio iter che ci permette di risolvere la maggior parte degli esercizi* (LT1, F); [Le dimostrazioni] *sono utili per svolgere gli esercizi. Forniscono una scaletta su come svolgere l'esercizio* (LT1, F).	*Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento alla dimostrazione come iter per risolvere gli esercizi proposti dall'insegnante, soddisfacendone le aspettative.*
<u>*Ossatura della Matematica*</u> 6	*Dimostrazione come strumento che consente di costruire la Matematica; ne costituisce 'l'ossatura', la base solida.*	*Le dimostrazioni sono alla base della Matematica, senza di esse non sarebbe la stessa* (LT1, F); *Le dimostrazioni, in poche parole, danno una base solida su cui poggiare le proprie nozioni* (LT3, F); *Le dimostrazioni sono fondamentali in Matematica* (LT1, F).	*Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento al fatto che le dimostrazioni costituiscono la base della Matematica.*
<u>*Processo che richiede tempo*</u> 4	*Dimostrazione come processo la cui realizzazione e il cui studio necessitano tempo.*	*Con il bisogno di doverci ragionare [sulle dimostrazioni] per molto tempo* (LT1, M); *Fare una dimostrazione richiede conoscenza dell'argomento e tempo a disposizione* (LT3, M).	*Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento esplicito al tempo necessario da dedicare a una dimostrazione.*