La Matematica e la sua Didattica, ISSN 3035-2940, Volume 33, n. 2, 2025, 161–177
https://doi.org/10.60923/issn.3035-2940/23700

Processi Semiotici Cognitivi nel Ragionamento Matematico: Il Pensiero di Raymond Duval alla Luce delle Teorie Semiotiche di Charles Sanders Peirce

Cognitive Semiotic Processes in Mathematical Reasoning: Raymond Duval's Thought in Light of Charles Sanders Peirce's Semiotic Theories

Procesos Semióticos Cognitivos en el Razonamiento Matemático: El Pensamiento de Raymond Duval a la Luz de las Teorías Semióticas de Charles Sanders Peirce

Asia Della Bruna
Dipartimento di Filosofia, Università degli Studi di Bologna, Italia

Sunto. *Il confronto tra le teorie di Raymond Duval e Charles Sanders Peirce permette di indagare il ruolo delle rappresentazioni nel ragionamento matematico. La prospettiva peirciana, incentrata sul valore cognitivo dei segni e sul ruolo inferenziale del diagramma, offre una chiave interpretativa capace di superare il dualismo tra oggetto e rappresentazione, nucleo del paradosso cognitivo messo in luce da Duval.*

Parole chiave: rappresentazione, diagramma, registri di rappresentazione, Duval, Peirce.

Abstract. *The comparison between the theories of Raymond Duval and Charles Sanders Peirce offers a way to investigate the role of representations in mathematical reasoning. Peirce's perspective, centered on the cognitive function of signs and the inferential power of diagrams, provides an interpretative key to overcoming the object–representation dualism, which lies at the heart of Duval's cognitive paradox.*

Keywords: representation, diagram, semiotic representation registers, Duval, Peirce.

Resumen. *La comparación entre las teorías de Raymond Duval y Charles Sanders Peirce permite explorar el papel de las representaciones en el razonamiento matemático. La perspectiva peirceana, centrada en la función cognitiva de los signos y en el valor inferencial del diagrama, ofrece una clave interpretativa para superar el dualismo entre objeto y representación, núcleo del paradigma cognitivo señalado por Duval.*

Palabras clave: representación, diagrama, registros de representación semiótica, Duval, Peirce.

1. Premessa

L’apprendimento e la costruzione della conoscenza iniziano attraverso l’imitazione e l’interazione corporea con l’ambiente circostante. Il linguaggio svolge infatti un ruolo marginale nelle prime fasi dello sviluppo: il contatto con il mondo avviene attraverso il corpo e la manipolazione degli oggetti, in un rapporto diretto, sensoriale e concreto (Violi, 2012; Duval, 2009). Un analogo approccio esperienziale caratterizza anche le scienze empiriche, dove l’accesso all’oggetto di studio permette al ricercatore di condurre osservazioni ed esperimenti basati su un'interazione tangibile con il fenomeno analizzato.

Questa modalità di accesso diretto non è applicabile in matematica, disciplina in cui gli oggetti di studio non possiedono un referente empirico. L’indagine matematica si fonda infatti su rappresentazioni, che costituiscono l’unico canale cognitivo per accedere a tali oggetti e per operare su di essi.

Nella letteratura di ricerca in Didattica della Matematica, diversi approcci teorici sono stati sviluppati per analizzare i processi semiotico-cognitivi coinvolti nel ragionamento matematico. In questo contributo si propone un percorso teorico che prende forma nel confronto tra il pensiero di Raymond Duval e quello di Charles S. Peirce, autori dei quadri concettuali più frequentemente richiamati in questo campo di studi. Il contributo di Duval è discusso a partire dalla sua teoria dei registri di rappresentazione, secondo cui la comprensione matematica richiede la capacità di operare tra diversi sistemi semiotici, evitando la sovrapposizione tra oggetto e rappresentazione. A questa prospettiva si affianca l’analisi del pensiero di Peirce, in particolare della sua teoria dei segni e del ruolo centrale del diagramma come strumento inferenziale nella pratica matematica.

Il contributo di questo articolo consiste nel mostrare come la prospettiva diagrammatica peirciana permetta di reinterpretare il paradosso cognitivo individuato da Duval non come un dualismo irrisolto tra oggetto e rappresentazione, ma come una dinamica inferenziale interna alle rappresentazioni stesse. Tale prospettiva consente di mettere in luce affinità teoriche e potenzialità integrative tra i due modelli, chiarendo il ruolo operativo delle trasformazioni semiotiche nel ragionamento matematico.

2. L’Approccio di Raymond Duval

L’assenza di un accesso diretto agli oggetti matematici ha generato un ampio dibattito, specialmente nell’ambito della Didattica della Matematica, riguardo alla loro natura e alle modalità attraverso cui possono essere compresi e appresi. La riflessione di Raymond Duval, che si inserisce in questo contesto, propone una teoria dal forte impatto didattico-pedagogico. il suo approccio consente di individuare in modo efficace i principali ostacoli di natura semiotico-cognitiva che gli studenti incontrano nel loro percorso di apprendimento matematico. Come osserva lo stesso Duval, «non abbiamo alcun accesso percettivo o strumentale agli oggetti matematici […]. L’unico modo per accedervi è utilizzare segni» (Duval, 2000, p. 61; trad. mia).

In uno scritto successivo, Duval affronta questa problematica evidenziando come la difficoltà nel cogliere la natura degli oggetti matematici sia amplificata anche dalla tendenza, nel contesto educativo, a confondere e sovrapporre diversi tipi di oggetti: i) l’oggetto come cosa, cioè ciò che esiste nel mondo reale; ii) l’oggetto intenzionale, cioè ciò che un individuo percepisce soggettivamente; iii) l’oggetto fenomenologico, cioè l’oggetto che appare alla coscienza del soggetto in base alla propria esperienza e percezione; iv) infine l’oggetto di conoscenza, cioè l’invariante di conoscenza che trascende l’individualità (Duval, 2009).

All’interno degli oggetti di conoscenza, Duval distingue fra oggetti sperimentali, legati a invarianti di tipo causale relative a fenomeni osservabili, e oggetti matematici, che si caratterizzano proprio per l’assenza di un referente empirico diretto e per la loro dipendenza da rappresentazioni semiotiche (Duval, 2009; 2009–2010). Questa distinzione offre un quadro epistemologico che permette di rileggere analisi già presenti nei lavori degli anni Novanta (Duval, 1993, 1995, 2000), nei quali l’accesso cognitivo agli oggetti matematici è descritto come strutturalmente mediato da sistemi di rappresentazione. Nei termini di Duval, non vi è attività noetica in matematica senza processi semiotici: il pensiero matematico e la manipolazione delle rappresentazioni sono indissociabili.

La comprensione del pensiero matematico implica dunque la produzione e la trasformazione di rappresentazioni all’interno di sistemi semiotici diversi. Tali rappresentazioni possono appartenere allo stesso tipo — come diverse versioni di una stessa equazione (ad esempio, $2x - y = 3$ e $y = 2x - 3$) — oppure a tipi differenti, come la forma algebrica e quella grafica di una medesima funzione. Ogni sistema semiotico possiede potenzialità e limiti specifici, per cui non tutte le rappresentazioni sono in grado di rendere visibili le stesse proprietà dell’oggetto matematico. Quest’ultimo, tuttavia, resta invariato attraverso le diverse forme rappresentative: è proprio questa invarianza concettuale che gli studenti devono imparare a cogliere, evitando la confusione tra l’oggetto matematico e le sue rappresentazioni semiotiche.

Da qui deriva quello che Duval definisce il “paradosso cognitivo della matematica”: da un lato le rappresentazioni sono imprescindibili per l’attività matematica, perché costituiscono l’unico accesso possibile agli oggetti; dall’altro lato esiste il rischio che esse vengano erroneamente identificate con gli oggetti cui si riferiscono. La specificità della conoscenza matematica consiste proprio in questa «esigenza contrastante» tra necessità delle rappresentazioni e necessità di non confonderle con ciò che rappresentano (Duval, 2000, p. 61). Superare tale ostacolo richiede la capacità di gestire e coordinare diversi registri di rappresentazione, riconoscendo l’invarianza concettuale che si mantiene al di là delle singole forme rappresentative.

L'approccio semiotico di Duval ruota attorno ai concetti di sistema semiotico e di registro di rappresentazione semiotica. Un sistema semiotico è composto da segni in rapporto opposizionale e da regole interne che ne determinano le possibilità operative (Duval, 2006a). Un registro di rappresentazione è quel tipo particolare di sistema semiotico che permette le tre attività cognitive fondamentali legate alla semiosi: (i) produrre una traccia percepibile come rappresentazione di qualcosa in un sistema determinato; (ii) trasformare le rappresentazioni seguendo esclusivamente le regole proprie del sistema; (iii) permettere l'elaborazione di nuove conoscenze rispetto alle rappresentazioni iniziali (Duval, 1993, 2017). In questo quadro, «solo le rappresentazioni semiotiche consentono di svolgere alcune funzioni cognitive essenziali, come quella di elaborazione» (Duval, 1993, p. 39; trad. mia).

Duval distingue quindi tra produzione di rappresentazioni, trasformazione interna allo stesso registro (trattamento) e passaggio tra registri diversi (conversione). Il trattamento è definito come «la trasformazione di una rappresentazione considerata come dato iniziale in una rappresentazione ritenuta terminale rispetto a una domanda, un problema o un bisogno […]; una trasformazione interna a un registro di rappresentazione» (Duval, 1995, p. 39; trad. mia).

La conversione consiste invece nella trasformazione di una rappresentazione da un registro a un altro, mantenendo, in tutto o in parte, il contenuto iniziale (Duval, 1993). È in queste trasformazioni che si gioca, per l'autore, il primato cognitivo delle rappresentazioni: «Ciò che conta, nelle rappresentazioni semiotiche, è innanzitutto il loro potenziale intrinseco di essere trasformate in altre rappresentazioni semiotiche nuove ed equivalenti» (Duval, 2017, p. 21, trad. mia).

Duval insiste nel distinguere la conversione da operazioni affini come l'interpretazione e la codifica. L'interpretazione comporta un cambiamento di quadro teorico mantenendo lo stesso registro, mentre la codifica è una trascrizione regolata da corrispondenze esplicite fra sistemi semiotici (Duval, 1993) La conversione, al contrario, «è irriducibile a queste, perché, da una parte, non si basa su alcuna analogia, come nel caso dell'interpretazione, e, dall'altra, non può essere ottenuta tramite l'applicazione di regole di codifica» (Duval, 1993, p. 43; trad. mia).

Queste distinzioni emergono con particolare evidenza nella transizione fra algebra e geometria: uno studente può essere in grado di costruire correttamente la curva corrispondente a una funzione nel piano cartesiano, ma non saper risalire alla sua espressione algebrica, o viceversa. In questi casi, il problema non riguarda solo la padronanza procedurale, ma la capacità di riconoscere uno stesso oggetto matematico attraverso registri diversi (algebrico, grafico, verbale). La vera padronanza si raggiunge quando si è capaci di coordinare tali registri, cogliendo l'invarianza concettuale che li attraversa.

Il contributo di Duval consente dunque di collegare teorie semiotiche e processi cognitivi, mostrando come la comprensione matematica dipenda essenzialmente dalla possibilità di operare trasformazioni tra rappresentazioni. L'assunzione del pensiero peirciano da parte di Duval emerge già in *Sémiosis et pensée humaine* (1995), dove l'autore richiama la tripartizione icona–indice–simbolo come strumento per distinguere differenti funzioni rappresentative. A partire da questo riferimento, Duval sottolinea come la classificazione peirciana metta in luce la varietà dei fenomeni semiotici, pur senza affrontare in dettaglio le relazioni operative tra sistemi semiotici distinti:

> Peirce è il primo ad avere riconosciuto l'importanza di questo fenomeno, distinguendo tre tipi di segni: le icone, i simboli e gli indici […]. Questa prima classificazione […] ha contribuito alla fondazione della semiotica. Ma lascia in ombra ciò che fa la fecondità e la complessità di questa varietà: le possibili relazioni tra differenti sistemi semiotici e la possibilità di convertire una rappresentazione formata in un sistema in una rappresentazione di un altro sistema. (Duval 1995, pp. 19–20; trad. mia)

Questa lettura,[1] focalizzata sulla tripartizione dei segni come schema tipologico utile a distinguere funzioni rappresentative differenti, si mantiene anche nelle opere più recenti. Duval dichiara infatti che le proprie riflessioni si fondano sugli insegnamenti di Saussure per quanto riguarda la struttura opposizionale dei sistemi semiotici, su Frege per la sostituibilità dei segni e la produzione di nuove inferenze, e su Peirce, richiamato nuovamente soltanto per la classificazione delle tipologie di rappresentazioni (Duval, 2017).

Il riferimento di Duval a Peirce va dunque inteso come un utilizzo mirato di alcuni elementi della sua semiotica, che si integrano nella teoria dei registri senza implicare l'adozione dell'intero impianto peirciano. Nel presente contributo non si intende ricostruire in modo esaustivo il pensiero di Duval, ma concentrarsi sugli elementi che convergono nella formulazione del paradosso cognitivo e che risultano essenziali per il confronto con Peirce. Come si vedrà,

---

[1] È possibile indagare sulle fonti attraverso le quali Duval ricostruisce il pensiero di Peirce, osservando che egli fa esclusivo riferimento ai *Collected Papers* (CP, Peirce 1931–1958). Sebbene questa raccolta costituisca una fonte rilevante, presenta limitazioni significative: gli scritti non sono ordinati cronologicamente, alcuni testi centrali del pensiero peirciano risultano del tutto assenti e altri compaiono solo in forma frammentaria. Tali caratteristiche rendono difficile accedere alla struttura complessiva della teoria dei segni, in particolare alla classificazione ampliata che, nella fase più matura del pensiero peirciano, articola i segni in più dimensioni e ne analizza i parametri interni (relazione con l'oggetto, tipo di interpretante, modalità di manifestazione), offrendo così una visione molto più ricca dei segni complessi (Bellucci, 2023) e del loro comportamento inferenziale. L'unico riferimento diretto a Peirce nei lavori di Duval, presente sia in *Basic Issues for Research in Mathematics Education* (2000, p. 58) sia in *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics* (2006b, p. 109), riguarda il passo CP 2.228, un testo risalente al 1896. Esso è quindi anteriore agli sviluppi teorici che, negli anni successivi, portano Peirce a elaborare una classificazione molto più articolata dei segni, fondata su criteri multipli e non riducibile alla sola tripartizione icona–indice–simbolo.

la prospettiva diagrammatica peirciana permette di reinterpretare tale paradosso non come un dualismo irrisolto tra oggetto e rappresentazione, ma come una dinamica inferenziale interna alle rappresentazioni stesse.

3. Il Contributo di Charles Sanders Peirce

Le idee di Charles Sanders Peirce (1839–1914) offrono una chiave di lettura semiotica e cognitiva particolarmente feconda per analizzare il ruolo delle rappresentazioni nel pensiero matematico. Tuttavia, la ricezione del suo pensiero è stata complicata dalla modalità con cui i suoi scritti sono stati pubblicati e organizzati: molte opere sono rimaste inedite e i Collected Papers of Charles Sanders Peirce (1931–1958), pur avendo avuto un ruolo decisivo nella diffusione del suo lavoro, presentano limiti evidenti dal punto di vista cronologico e sistematico.

Su questo sfondo, la ricostruzione della grammatica speculativa proposta da Bellucci (2018) e gli studi di Stjernfelt (2007; 2011; 2022), Atkins e Hull (2017) e Moore (2014) offrono oggi un quadro coerente e aggiornato della semiotica peirciana, chiarendo in particolare i nessi tra classificazione dei segni, struttura dell'inferenza e ruolo dei diagrammi.

La logica di Charles Sanders Peirce si struttura in tre ambiti fondamentali: la grammatica speculativa (semiotica), la logica critica (studio del ragionamento) e la metodeutica (o retorica speculativa). All'interno della grammatica speculativa, Peirce propone la sua celebre classificazione dei segni in icone, indici e simboli, fornendo una definizione semiotica dei principali oggetti logici, come la proposizione, e ampliando il campo della logica per includere elementi tradizionalmente esclusi (come gli atti linguistici).

Secondo Peirce, la logica coincide con la semiotica: nella sua fase iniziale, egli interpreta le premesse di un argomento come segni della conclusione, definendo la logica come la scienza degli argomenti e la semiotica come quella dei segni, stabilendo così un'equivalenza tra le due discipline. In una fase più matura del suo pensiero, a partire dal 1894, Peirce riformula questa concezione, considerando l'argomento come un insieme di proposizioni, le quali sono esse stesse segni. La proposizione, intesa come segno per eccellenza, assumerà infatti una posizione centrale nella grammatica speculativa.

In On a New List of Categories (1867) propone una prima articolazione della teoria dei segni distinguendo tre tipi fondamentali: icone, indici e simboli. Le icone rappresentano il loro oggetto in virtù di una qualità condivisa:

> Le rappresentazioni la cui relazione con i loro oggetti consiste semplicemente nel fatto che rappresentazioni e oggetti hanno in comune qualche qualità, e queste rappresentazioni possono essere chiamate somiglianze. (CP 1.558; trad. it. in *Opere*, p. 68)

Gli indici, invece, instaurano con l'oggetto una relazione di effettiva contiguità:

> Le rappresentazioni la cui relazione con i loro oggetti consiste in una corrispondenza di fatto, e queste rappresentazioni possono essere chiamate indici o segni. (CP 1.558; trad. it. in *Opere*, p. 68)

Infine, i simboli sono rappresentazioni la cui relazione con l'oggetto si fonda su un carattere imputato, connotando e denotando allo stesso tempo:

> Le rappresentazioni che hanno per base della relazione con i loro oggetti un carattere imputato, rappresentazioni che sono segni generali, e possono essere dette simboli. (CP 1.558; trad. it. in *Opere*, p. 68)

I simboli si suddividono ulteriormente in termini, proposizioni e argomenti:

> 1) simboli che direttamente si riferiscono […] alle loro basi o qualità imputate […] sono termini;
> 2) simboli che si riferiscono ai loro oggetti definendoli mediante uno o più termini […] sono proposizioni;
> 3) simboli che determinano i loro interpretanti e costringono le menti cui si rivolgono ad ammettere certe premesse […] sono argomenti. (CP 1.559; trad. it. in *Opere*, p. 69)

È importante sottolineare che il simbolo non si definisce primariamente come segno convenzionale, ma come segno generale: denota un oggetto generale, attraverso la connotazione di un certo carattere. La convenzionalità riguarda solo una parte dei simboli (per esempio le parole), ma Peirce distingue esplicitamente tra simboli naturali (come i concetti) e simboli convenzionali. Il punto decisivo è che il simbolo è di per sé un tipo generale, che esiste attraverso le sue repliche.

> Un simbolo […] non può indicare nessuna cosa particolare, bensì denota un genere di cose, e non solo, ma è esso stesso un genere e non una cosa singola. […] La parola vive nella mente di coloro che la usano. (EP 2, pp. 9–10; trad. mia)

In questa prospettiva, il simbolo è generale in sé stesso: non è un esistente, ma ciò che regola gli esistenti.

Questa prima articolazione della semiotica — icone, indici, simboli — appartiene alla fase iniziale del pensiero peirciano. Pur non corrispondendo ancora alla complessità della teoria matura, resta essenziale per cogliere la struttura elementare dei segni e fornisce il punto di partenza per comprendere la relazione tra segni e inferenza. In effetti, Peirce intende ogni forma di ragionamento — abduzione, deduzione, induzione — come una trasformazione segnica: un argomento è un insieme ordinato di segni in cui le premesse determinano un interpretante (la conclusione). La logica diventa così una teoria dei segni in azione, e la struttura inferenziale dipende da come i segni vengono costruiti, combinati e trasformati.

Nel decennio 1885–1895, la teoria dei segni di Peirce si articola principalmente attorno alla distinzione tra icone, indici e simboli e alla differenziazione tra termini, proposizioni e argomenti. Questo schema, tuttavia, si rivela presto insufficiente: alcuni segni — come pronomi o fotografie — mostrano comportamenti non riconducibili a una classificazione rigida, rivelando la necessità di un quadro più flessibile.

Nella *Minute Logic* del 1902, Peirce introduce una riforma decisiva: le tricotomie non sono più divisioni dirette delle classi di segni, ma parametri che permettono di classificarli. La semiotica diventa così una teoria combinatoria dei parametri-segno, più che un sistema di etichette (Bellucci 2018).

Una seconda riforma, presentata nel *Syllabus* del 1903, chiarisce la distinzione tra generalità e occorrenza attraverso i concetti di qualisegno, sinsegno e legisegno. Peirce definisce infatti:

> Un qualisegno è una qualità che è Segno […]
> Un sinsegno è una cosa o un evento effettivamente esistente che è un segno […]
> Un legisegno è una legge che è un segno […]. Ogni legisegno significa quando è applicato in una sua occorrenza, che può essere detta una sua Replica. (CP 2.246; trad. it. in *Opere*, p. 153)

Questa distinzione permette di comprendere che la presenza di repliche non è una prerogativa esclusiva dei simboli, ma riguarda il rapporto tra type e token, cioè tra generalità e occorrenze. Tale chiarimento riordina definitivamente i problemi posti dagli indici e dai simboli nelle fasi precedenti del pensiero peirceiano. In questo contesto matura anche la definizione relazionale di segno proposta nella *Minute Logic*:

> Un Segno è qualsiasi cosa riferita a una Seconda cosa, il suo Oggetto, rispetto a una Qualità, in modo tale da portare una Terza cosa, il suo Interpretante, in rapporto con lo stesso oggetto […] ad infinitum. (CP 2.92; trad. it. in *Opere*, p. 123)

La semiosi è dunque una relazione triadica irriducibile e dinamica, in cui segno, oggetto e interpretante non sono entità stabili ma posizioni in una struttura relazionale, riorganizzabili attraverso il processo interpretativo (Paolucci 2010). La semiosi peirciana non descrive quindi una relazione statica tra segno e oggetto, ma una logica delle relazioni in cui ogni interpretante può a sua volta funzionare come segno in una catena potenzialmente illimitata di determinazioni.

Le precisazioni introdotte da Peirce all'inizio del Novecento consentono di delineare la struttura matura della sua teoria dei segni: una teoria fondata su relazioni triadiche, sulla distinzione tra generalità e occorrenze e su criteri classificatori che specificano i modi in cui un segno può rappresentare il proprio oggetto. Questo assetto concettuale chiarisce il legame tra semiotica e attività di pensiero e permette di comprendere come, per Peirce, il ragionamento consista in operazioni condotte su rappresentazioni. È a partire da queste basi che diventa possibile analizzare la natura della matematica e il ruolo che essa attribuisce alle forme rappresentative nella costruzione delle inferenze.

Sul piano epistemologico, Peirce riformula anche la definizione di matematica. Riprendendo la formula del padre Benjamin — la matematica come scienza che trae conclusioni necessarie — egli ne modifica l'accento: la matematica diventa una "scienza condizionale o ipotetica", che non si occupa di come le cose sono realmente, ma di come potrebbero essere supposte:

> Scienza Condizionale o Ipotetica della Matematica Pura, il cui unico scopo è scoprire non come le cose siano realmente, ma come potrebbero essere supposte, se non nel nostro universo, allora in qualche altro. (EP 2, p. 144; trad. mia)

La matematica è quindi definita dal metodo ipotetico-deduttivo, non dal riferimento a un oggetto empirico. Di conseguenza, Peirce può parlare della matematica come scienza delle icone:

> La matematica è puramente ipotetica, tutte le sue affermazioni sono nella forma "se–allora"; […]. Ciò la rende una scienza delle icone, in quanto tutta questa inferenza riguarda strutture iconiche. Le icone non possono ingannare e farti credere in qualcosa di illogico (sebbene, ovviamente, in qualcosa di irreale), perché rappresentano sempre qualcosa di logicamente possibile […]. La matematica è, per così dire, una mappatura del campo delle possibilità formali iconiche. (Stjernfelt, 2007, pp. 81–82; trad. mia, da NEM IV 242–243)

Le icone trasmettono proprietà e sono rappresentative di tutti gli oggetti che condividono tali proprietà, senza impegnarsi sulla loro esistenza. Per questo sono strumenti privilegiati del pensiero matematico: la matematica esplora possibilità attraverso strutture iconiche, senza richiedere un referente empirico.

In questa prospettiva, Peirce definisce la matematica anche come "arte della generalizzazione esatta" e "arte che traccia le conseguenze delle ipotesi" (Atkins & Hull, 2017, p. 160). Il lavoro del matematico consiste nel manipolare stati ipotetici rappresentabili: il ragionamento può essere condotto senza alcun riferimento a fatti esterni, purché le condizioni di esistenza degli oggetti ipotetici siano chiaramente specificate.

Questo non significa che la matematica sia meno "osservativa" delle altre scienze: essa osserva strutture formali rese percepibili dai diagrammi, strumenti che permettono di esplorare relazioni tra oggetti ipotetici (Bellucci, 2025). Tale ruolo osservativo è reso possibile proprio dalla natura ipotetica della matematica, che fonda il carattere diagrammatico del ragionamento peirciano.

All'interno del metodo scientifico, Peirce distingue tre forme di inferenza: abduzione, deduzione e induzione. L'abduzione rappresenta il punto di partenza del ragionamento, dove si formulano ipotesi esplicative, pur senza alcuna garanzia di verità. A questa fase segue la deduzione, che esplora le implicazioni necessarie delle ipotesi, derivando conclusioni logiche che, pur non aggiungendo nuove conoscenze empiriche, chiariscono le relazioni implicite nelle premesse. Infine, l'induzione verifica la validità delle conclusioni dedotte attraverso il confronto con i dati osservati, completando il ciclo inferenziale (Hoffmann, 2003, 2010).

> L'abduzione è il processo di formazione di un'ipotesi esplicativa. È l'unica operazione logica che introduce un'idea nuova. […]

> La deduzione evolve semplicemente le conseguenze necessarie di un'ipotesi pura […]
> L'induzione consiste nel partire da una teoria, dedurre da essa previsioni sui fenomeni e osservare quei fenomeni per vedere quanto queste previsioni coincidano con la teoria. (EP 2, p. 216; trad. mia)

La deduzione si distingue per il suo carattere di necessità: se le premesse sono vere e la regola inferenziale è valida, la conclusione segue inevitabilmente. È per questo che, per Peirce, il ragionamento matematico è in primo luogo un ragionamento deduttivo, costruito a partire da ipotesi e sviluppato attraverso conseguenze necessarie.

Nella prospettiva peirciana, la deduzione si fonda a sua volta sull'uso di diagrammi. Peirce sostiene infatti che ogni inferenza necessaria consiste nel costruire una rappresentazione iconica di una situazione generale, nell'osservarne le relazioni e nel trarre conclusioni che emergono da tale osservazione strutturale. Il diagramma non è quindi un ausilio psicologico, ma la condizione di possibilità della deduzione.

Nella tassonomia matura dei segni, i diagrammi costituiscono una sottoclasse delle icone. Essi sono "icone scheletriche", che analizzano l'oggetto nelle sue componenti e rendono percepibili le "relazioni razionali" tra esse — spaziali, logiche, quantitative o di altro tipo (Stjernfelt 2011): rappresentano forme di relazione. In tal modo, costituiscono il principale mediatore epistemico del pensiero sintetico, lo strumento che permette di produrre nuove informazioni sull'oggetto rappresentato.

Per chiarire il funzionamento cognitivo dei diagrammi, è decisivo ricorrere al concetto — elaborato nella letteratura contemporanea (Stjernfelt 2007, 2011) — di iconicità operativa. Un'icona è definibile operativa, quando, attraverso la manipolazione delle sue parti, consente di far emergere informazioni nuove (e tuttavia necessarie) sul proprio oggetto. L'iconicità, qui, non dipende da una somiglianza percettiva, ma dalla possibilità di trattare il segno come un modello manipolabile dal quale ricavare conseguenze deduttive. Per Peirce, ciò non è un fatto psicologico, ma trascendentale: i diagrammi non facilitano la deduzione, la rendono possibile. Un passaggio di Peirce riassume efficacemente questo ruolo:

> «Il diagramma è l'interpretante di un simbolo in cui la significazione del simbolo diventa una parte dell'oggetto dell'icona» (SW, p. 173; trad. mia).

Prendiamo come esempio il concetto di triangolo, cioè il concetto di una figura piana con tre lati e tre angoli. Tale concetto è, in quanto generale, un simbolo. Affinché però questo concetto diventi oggetto del ragionamento matematico e si possano così dedurre verità riguardanti le sue proprietà, non è sufficiente limitarci a pensare al concetto di triangolo. È necessario invece rappresentarlo in forma iconica.

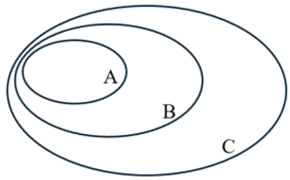
In questo processo, il diagramma svolge il ruolo di interpretante del simbolo attraverso la sua trasformazione in un'icona. In altre parole, il simbolo viene interpretato iconicamente attraverso il diagramma, che conserva la generalità del simbolo ma la rappresenta in un'immagine. La significazione del simbolo diviene così parte della significazione dell'icona, permettendo di trarre informazioni aggiuntive sull'oggetto rappresentato.

L'iconicità operativa riguarda dunque la capacità del diagramma di essere manipolato per far emergere nuove informazioni sul suo oggetto. È questa la dimensione in cui il diagramma diventa il veicolo della deduzione: non rappresenta solo una situazione, ma permette di esplorarla. Un altro esempio è dato dalla rappresentazione della relazione d'inclusione tra insiemi. Le premesse simboliche:

A è contenuto in B

B è contenuto in C

richiedono un passaggio inferenziale per ottenere la conclusione "A è contenuto in C". Un diagramma di insiemi annidati rende invece tale proprietà immediatamente visibile: la relazione appare come parte della struttura iconica, prima ancora che come conclusione dedotta.



In questo senso, la deduzione coincide con l'osservazione delle relazioni interne al diagramma.

Accanto a questa dimensione operativa, Stjernfelt (2011) ha proposto di distinguere una seconda modalità del funzionamento iconico, che chiama iconicità ottimale, che riguarda il grado in cui una rappresentazione rende immediatamente percepibile la struttura che vuole mostrare. È il caso, ad esempio, della differenza tra la rappresentazione grafica e quella algebrica di una funzione: entrambe contengono le stesse informazioni (hanno quindi la stessa iconicità operativa), ma il grafico rende alcune proprietà globali immediatamente visibili, mentre l'espressione algebrica le richiede in forma deduttiva. Allo stesso modo, un'immagine pixelata e la sua codifica digitale sono equivalenti in termini informativi, ma non in termini percettivi.

Queste due dimensioni non sono categorie peirciane, ma strumenti ricostruttivi utili per chiarire perché i diagrammi, nella prospettiva di Peirce, non si limitino a rappresentare: essi rendono possibile la deduzione e allo stesso tempo modellano il modo in cui la struttura può essere percepita. Proprio questa duplice natura — inferenziale e percettiva — costituisce il punto di contatto privilegiato con il problema duvaliano delle trasformazioni tra registri di rappresentazione.

4. Dialogo fra i Due Pensieri

Quanto esposto finora permette di affrontare in modo più mirato un'analisi dialogica tra i due autori. Come discusso in precedenza, per Duval la specificità del pensiero matematico è legata alla necessità di operare con una pluralità di sistemi semiotici, ciascuno dei quali rende visibili solo alcune proprietà dell'oggetto: la comprensione richiede il coordinamento fra registri, affinché l'invariante concettuale possa essere distinto dalle sue rappresentazioni.

Peirce, invece, colloca il ruolo dei segni all'interno di una teoria generale del ragionamento: non solo distingue diverse funzioni rappresentative, ma mostra come ogni inferenza matematica sia resa possibile da una certa forma di iconicità operativa. La rappresentazione non è allora ciò che permette di accedere a un oggetto già costituito, ma ciò attraverso cui l'oggetto stesso viene determinato nel corso della semiosi.

Questa differenza di impostazione epistemologica — l'invariante che precede le rappresentazioni nel modello di Duval e l'oggetto che emerge dalle trasformazioni rappresentative in Peirce — permette di mettere meglio a fuoco la diversa impostazione teorica dei due autori. Entrambi attribuiscono un ruolo centrale ai segni nel pensiero matematico e riconoscono che le trasformazioni rappresentative possiedono una portata cognitiva fondamentale; tuttavia, ciò che in Duval è finalizzato a evitare la sovrapposizione tra oggetto e rappresentazione, in Peirce assume la forma di un meccanismo inferenziale che genera nuove informazioni. In modo analogo, se per Duval la complementarità tra registri permette di individuare un oggetto stabile attraverso prospettive differenti, per Peirce la pluralità rappresentativa apre invece a una riorganizzazione del campo inferenziale e a nuove modalità di osservare la struttura del problema.

Alla luce di questa distanza concettuale, il paradosso cognitivo duvaliano può essere letto in due modi diversi: come tensione epistemica tra l'oggetto matematico e le sue molteplici rappresentazioni, e come dinamica inferenziale interna alle rappresentazioni stesse. È questo secondo livello, reso possibile dal pensiero diagrammatico peirciano, che consente di reinterpretare il paradosso non come un dualismo irrisolto, ma come un problema relativo alle modalità con cui le rappresentazioni strutturano lo spazio delle inferenze.

Nel valutare la tricotomia peirciana, Duval ne sottolinea la "debole capacità discriminante", sostenendo che essa si limita a descrivere ciò che segni e rappresentazioni hanno in comune — il "svolgere funzione di…" — trascurando la specificità del segno come relazione di riferimento e non di causa-effetto. In questo senso, egli giudica il modello di Peirce ancora dipendente da un "primo schema di analisi della conoscenza" e gli attribuisce una priorità cognitiva ed epistemologica dell'oggetto rispetto alle rappresentazioni che possono esserne prodotte. In continuità con la propria concezione, l'oggetto matematico viene così inteso come un invariante che permane dietro una molteplicità di rappresentazioni e che funge da riferimento stabile per il coordinamento dei registri.

> La debole capacità discriminante di questa tricotomia riflette la definizione di segno fornita da Peirce. Essa si limita a considerare la proprietà comune delle rappresentazioni e dei segni ("svolge la funzione di..."), trascurando la proprietà specifica del segno (ovvero il fatto che la sua relazione con l'oggetto sia una relazione di riferimento e non di causa-effetto). In questo senso, si può affermare che il modello di Peirce dipenda ancora dal primo schema di analisi della conoscenza. A conferma di ciò, basta ricordare che il suo modello triadico assume la priorità cognitiva ed epistemologica dell'oggetto rispetto a tutte le rappresentazioni che possono essere prodotte. Questo modello si fonda su un approccio pragmatico alla conoscenza e distingue tre fasi nella sua formazione: "la primità (Firstness), la secondità (Secondness) e la terzità (Thirdness)". Queste fasi rappresentano, rispettivamente, l'interpretazione attraverso un inter oggetto, poi una rappresentazione dell'oggetto, e infine un interprete, che genera una nuova rappresentazione dell'oggetto trasformandola a sua volta in un nuovo oggetto. (Duval 2017, p. 15; trad. mia).

Questa lettura tende così a collocare Peirce su un terreno concettuale vicino a quello stesso di Duval: il rapporto oggetto–rappresentazione rimane centrale, e la dimensione propriamente triadica della semiosi viene in parte letta alla luce di una prospettiva ancora oggetto-centrica.

Se si torna ai testi peirciani, emerge un quadro differente. Peirce rifiuta esplicitamente ogni forma di intuizionismo: «non abbiamo capacità intuitive: ogni cognizione è determinata logicamente da cognizioni precedenti» (CP 5.265; trad. it. in Opere p. 83). La conoscenza non prende mai le mosse da un contatto immediato con un oggetto, ma da una rete pregressa di inferenze e di segni; l'oggetto non è un punto di partenza originario, ma il risultato di una determinazione progressiva all'interno del processo semiotico.

Nel caso della matematica, questo implica che gli oggetti non vengano concepiti come entità reali da rappresentare, ma come stati di cose ipotetici, le cui conseguenze logiche vengono esplorate attraverso sistemi di rappresentazioni. Il dominio della mediazione e dell'interpretazione è dunque il luogo in cui si costituisce il significato; è qui che il segno matematico opera, non come semplice "vestito" di un oggetto predefinito, ma come elemento di un sistema inferenziale che genera nuove connessioni.

In questo senso, la priorità epistemologica non spetta all'oggetto, ma al processo inferenziale: ciò che conta non è raggiungere un referente autonomo, bensì stabilire regolarità e relazioni all'interno di una pratica di ragionamento. L'interpretazione di Duval, centrata sulla priorità dell'oggetto, mette così in secondo piano questo spostamento di accento: in Peirce, ciò che assume rilievo primario non è l'oggetto in sé, ma il processo inferenziale che lo determina progressivamente.

Alla luce di questa differenza, il paradosso cognitivo di Duval può essere ricollocato. Nella sua formulazione originaria, esso nasce dal fatto che, da un lato, le rappresentazioni sono indispensabili per accedere agli oggetti matematici; dall’altro, vi è il rischio di confondere le rappresentazioni con gli oggetti, che devono invece essere pensati come invarianti indipendenti rispetto ai segni che li presentano. La soluzione proposta da Duval consiste nel sottolineare la parzialità di ciascuna rappresentazione e nel fare del coordinamento tra registri la condizione per una comprensione più completa dell’oggetto: è attraverso la convergenza di più sistemi semiotici che si può stabilizzare l’invariante e separarlo dal segno.

Se però si assume la prospettiva peirciana, il problema cambia forma. In una matematica intesa come scienza ipotetica, la conoscenza non mira a “raggiungere” un oggetto autonomo, bensì a sviluppare sistemi di relazioni: dato uno stato di cose ipotetico, ciò che interessa è che cosa ne consegue, quali proprietà ulteriori possono essere inferite, quali connessioni si rendono visibili. L’oggetto matematico emerge dunque dal lavoro sulle rappresentazioni, non lo precede.

In questo quadro, il coordinamento fra registri non è più soltanto il mezzo per riconoscere un medesimo oggetto sotto forme diverse, ma diventa una modalità di costruzione inferenziale: ricostruire una rappresentazione in un altro sistema significa riorganizzare il campo delle relazioni accessibili. Il nuovo diagramma non si limita a “dire la stessa cosa” in un’altra forma, ma mette in evidenza strutture e proprietà che nel primo restavano implicite.

L’esempio della funzione è eloquente: seguendo Duval, si può dire che l’espressione algebrica e il grafico cartesiano rappresentano lo stesso oggetto concettuale e che lo studente deve imparare a coordinare i registri per coglierne l’invarianza; seguendo Peirce, le due rappresentazioni possono essere descritte come diagrammi che condividono una forma relazionale e che permettono di avanzare inferenzialmente nel processo conoscitivo, ciascuna mettendo in luce aspetti diversi della relazione funzionale. Dal punto di vista di Duval, l’attenzione è rivolta alla difficoltà cognitiva di riconoscere “lo stesso” oggetto funzione attraverso registri distinti; dal punto di vista di Peirce, lo stesso esempio mette in luce la diversa potenza inferenziale dei due diagrammi, evidenziando come il passaggio dall’uno all’altro modifichi il tipo di ragionamento reso disponibile allo studente.

Questa riformulazione trova un fondamento nella teoria matura dei segni peirciani. Nella prospettiva di Peirce, icona, indice e simbolo non sono classi rigide ma parametri secondo cui ogni segno può essere analizzato: una stessa rappresentazione comprende aspetti iconici, indicali e simbolici, che non operano allo stesso livello né nello stesso momento, ma possono essere messi in rilievo in fasi diverse del ragionamento. Questa caratterizzazione è innanzitutto teorica, ma chiarisce perché un diagramma possa funzionare inferenzialmente: nella manipolazione diagrammatica questi aspetti vengono modulati, e ciò permette di rendere visibili relazioni che nella rappresentazione precedente restavano implicite. L’articolazione parametrica del segno non introduce dunque sistemi eterogenei privi di comunicazione, ma offre la cornice concettuale che rende intelligibile la continuità tra trasformazioni rappresentative diverse e la possibilità di riorganizzarle mettendo in evidenza differenti relazioni strutturali.

5. Conclusioni

Per concludere, è utile richiamare un caso didattico in cui le questioni teoriche discusse emergono con particolare chiarezza. Un ambito in cui ciò accade è quello dei grafici cartesiani, già affrontati in precedenza ma qui ripresi per mettere a fuoco, in modo conclusivo, la portata del problema.

Il contributo di Michale May, *Graphs as Images vs. Graphs as Diagrams: A Problem at the Intersection of Semiotics and Didactics* (Hull, K. A., Atkins, R. K, 2017), consente un approccio particolarmente utile per approfondire l'analisi. È possibile esplorare il modo in cui gli studenti affrontano lo studio introducendo il concetto di "approccio superficiale" (inteso come un approccio che rimane sulla superficie della comprensione). Questo tipo di apprendimento si basa principalmente sulla memorizzazione di grafici e schemi, scollegati dai modelli concettuali implicati. In questo modo, gli studenti tendono a concentrarsi sulle caratteristiche visive dei grafici, trattandoli come semplici immagini anziché come strutture relazionali. Tale atteggiamento può causare gravi difficoltà nella comprensione dei modelli che i grafici rappresentano.

Il concetto di graph as picture è stato introdotto da Claude Janvier e John Clement negli anni '80, identificandolo come un errore di comprensione comune tra gli studenti delle scuole secondarie nelle discipline scientifiche e matematiche. Questa dinamica emerge quando gli studenti cercano di associare le caratteristiche visive di una situazione, descritta in un problema, alle forme del grafico corrispondente da costruire, senza però considerare le relazioni concettuali e i vincoli simbolici presupposti. In termini peirciani, si tratta di una sovraestensione dell'aspetto iconico-percettivo e di quello indicale — che ancora il grafico alla situazione concreta — a scapito della componente simbolica che regola la sintassi cartesiana. Il risultato è che il grafico perde la sua funzione inferenziale: una rappresentazione costruita come immagine non consente di derivare nuove informazioni in modo controllato.

Il quadro peirciano permette di comprendere più precisamente perché ciò accade. Un diagramma è un segno complesso, nel quale aspetti iconici, indicali e simbolici convivono senza operare sullo stesso piano né nello stesso momento. È grazie a questa articolazione parametrica che la rappresentazione può rendere visibili certe relazioni, manipolarle e farne emergere di nuove. Ciò che deve essere preservato non è la forma della collina descritta nel problema, ma la struttura delle relazioni tra tempo e velocità, resa possibile dalle convenzioni del sistema cartesiano. L'errore del grafico come immagine mostra dunque l'incapacità di attivare correttamente il potenziale inferenziale del diagramma.

In questo quadro, il coordinamento tra registri — centrale per Duval — può essere reinterpretato come una forma di riorganizzazione inferenziale: il passaggio da un registro all'altro non serve unicamente a riconoscere un medesimo oggetto stabile, ma a mettere in luce aspetti differenti di una stessa struttura relazionale e ad ampliare lo spazio delle inferenze possibili.

Da un punto di vista didattico, ciò suggerisce che il lavoro sulle rappresentazioni non debba limitarsi alla loro moltiplicazione o alla loro corretta lettura, ma debba mirare a rendere esplicita la funzione inferenziale di ciascun registro. Comprendere come e perché una rappresentazione permette certe operazioni — e non altre — è un elemento essenziale per sviluppare una padronanza flessibile dei segni matematici. L'integrazione tra Duval e Peirce permette così di spostare l'attenzione dall'accesso all'oggetto alla costruzione di reti di relazioni, offrendo una prospettiva dinamica che sostiene pratiche didattiche più sensibili alla funzione inferenziale delle rappresentazioni.

Riferimenti

Bellucci, F. (2018). Peirce's speculative grammar: Logic as semiotics. Routledge.

Bellucci, F. (2023). On mixed signs. *Versus*, 137(2), 357–372.

Bellucci, F. (2025). *A scale of quantity: Kant and Peirce on mathematical reasoning* [in press].

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–16).

Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. L*a matematica e la sua didattica*, 20(4), 585–619.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2009). "Objet": un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). PUG.

Duval, R. (2009–2010). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6(11–12), 127–131.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer.

Hoffmann, M. H. G. (2003). Peirce's diagrammatic reasoning as a solution of the learning paradox. In G. Debrock (Ed.), Process pragmatism: Essays on a quiet philosophical revolution (pp. 121–143). Rodopi.

Hoffmann, M. H. G. (2010). Theoric transformations and a new classification of abductive inferences. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 46(4), 570–590.

Hull, K. A., & Atkins, R. K. (Eds.). (2017). *Peirce on perception and reasoning: From icons to logic*. Routledge.

Moore, M. E. (Ed.). (2014). *Philosophy of mathematics: Selected writings.* Charles S. Peirce. Indiana University Press.

Paolucci, C. (2010). *Strutturalismo e interpretazione*, Milano, Bompiani.

Peirce, C. S. (1931–1958). *The collected papers of Charles Sanders Peirce* (C. Hartshorne, P. Weiss & A. W. Burks, Eds.; Vols. 1-8). Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce: Selected philosophical writings*, volume 2 (1893–1913) (Peirce Edition Project, Ed.). Indiana University Press. (citato come EP 2)

Peirce, C. S. (2003). *Opere* (M. Bonfantini, Ed.). Bompiani. (citato come Opere)

Peirce, C. S. (2020). *Selected writings on semiotics*, 1894–1912 (F. Bellucci, Ed.). De Gruyter.

Stjernfelt, F. (2007). *Diagrammatology: An investigation on the borderlines of phenomenology, ontology, and semiotics*. Springer.

Stjernfelt, F. (2011). On operational and optimal iconicity in Peirce's diagrammatology. *Semiotica,* 186, 1–25. https://doi.org/10.1515/semi.2011.005

Stjernfelt, F. (2022). *Sheets, diagrams, and realism in Peirce*. De Gruyter.

Violi, P. (2012). Nuove forme di narratività. In A. M. Lorusso, C. Paolucci, & P. Violi (Eds.), *Narratività. Problemi, analisi, prospettive* (pp. 105–132). BUP.