

La Storia della Matematica in Classe: Una Proposta Didattica Ispirata a Johannes Kepler

History of Mathematics in the Classroom: A Didactic Proposal Inspired by Johannes Kepler

La Historia de las Matemáticas en el Aula: Una Propuesta Didáctica Inspirada en Johannes Kepler

Maria Giulia Lugaresi¹ e Elena Scalambro²

¹ Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Ferrara, Italia

² Dipartimento di Biotecnologie Molecolari e Scienze per la Salute, Università di Torino, Italia

Sunto. *L'uso di fonti storiche primarie è uno strumento efficace per un insegnamento coinvolgente della matematica. Si propongono qui alcune attività laboratoriali, agevolmente implementabili in classe a livello di scuola secondaria, basate sulle opere di Johannes Kepler. Partendo da passi della Nova stereometria doliorum vinariorum sul calcolo dei volumi e della Strena seu de nive sexangula sulla geometria della neve, il percorso mira a consolidare argomenti matematici specifici, a incoraggiare il pensiero critico degli studenti e a favorire i collegamenti interdisciplinari.*

Parole chiave: J. Kepler, volumi, botti di vino, geometria esagonale, fiocchi di neve.

Abstract. *The adoption of primary historical sources is an effective tool for teaching mathematics in an engaging way. This paper proposes some workshop activities, easily implementable in secondary school classrooms, based on the works of Johannes Kepler. Starting from passages from the Nova stereometria doliorum vinariorum on the calculation of volumes and the Strena seu de nive sexangula on the geometry of snow, the approach aims to consolidate specific mathematical topics, encourage students' critical thinking, and foster interdisciplinary connections.*

Keywords: J. Kepler, volumes, wine barrels, hexagonal geometry, snowflakes.

Resumen. *El uso de fuentes históricas primarias es una herramienta eficaz para una enseñanza atractiva (o motivadora) de las matemáticas. Se proponen aquí algunas actividades de taller, fácilmente implementables en el aula a nivel de enseñanza secundaria, basadas en las obras de Johannes Kepler. Partiendo de pasajes de la Nova stereometria doliorum vinariorum sobre el cálculo de volúmenes y de la Strena seu de nive sexangula sobre la geometría de la nieve, la propuesta tiene como objetivo consolidar temas matemáticos específicos, fomentar el pensamiento crítico de los estudiantes y favorecer las conexiones interdisciplinarias.*

Palabras clave: J. Kepler, volúmenes, barriles de vino, geometría hexagonal, copos de nieve.

1. Introduzione

In questo contributo, incentrato sulla figura di Johannes Kepler (1571-1630), ci proponiamo di descrivere un possibile percorso tematico rivolto a studenti della scuola secondaria, basato su alcune opere matematiche del celebre scienziato tedesco. Le attività, facilmente riproducibili in classe, sono state elaborate a partire dalla lettura di alcuni brani tratti da due opere di Kepler: la *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615), riguardante il calcolo di volumi di particolari solidi di rotazione, e la *Strena seu de nive sexangula* (1611), dedicata alla forma dei fiocchi di neve.

L'uso di fonti originali tratte dalla storia della matematica rappresenta una pratica didattica consolidata e, a nostro avviso, preziosa per l'insegnamento della disciplina. La nostra proposta è concepita anche come possibile strumento per la formazione degli insegnanti e dei futuri insegnanti della scuola secondaria.¹ L'avvicinamento ai testi originali agisce infatti come un mediatore per superare una visione puramente trasmissiva dell'insegnamento, promuovendo uno stile più consapevole e mirato al recupero delle radici cognitive—intese come nuclei di conoscenza intuitiva dotati di potenziale per la successiva formalizzazione (Tall, 1989; Tall & Thomas, 1991)—dei concetti. Tale pratica permette a chi insegna di consolidare la propria preparazione culturale e di acquisire strumenti metodologici concreti per progettare, trasporre e sperimentare in aula percorsi laboratoriali efficaci (Furinghetti, 2007; Tournès, 2022). L'idea di 'laboratorio di matematica' a cui ci rifacciamo è quella presentata in UMI-CIIM (2003), in cui si chiarisce che:

il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche sperimentazioni). (UMI-CIIM, 2003, p. 28)

In un'ottica di insegnamento della matematica sempre più attento alla qualità dei processi di apprendimento e alla loro significatività per gli studenti, integrare la storia della matematica nella pratica didattica appare una prospettiva particolarmente efficace, capace di restituire alla disciplina non solo il suo carattere dinamico, ma anche il suo lato umano (Katz & Tzanakis, 2011; Fauvel

¹ Questo articolo amplia e rielabora un tema che è stato precedentemente presentato in occasione di due eventi scientifici, il Seminario Nazionale dei Licei Matematici (Salerno, 11-13 settembre 2024) e il convegno "Dalla storia della matematica all'aula" (Ferrara, 9 maggio 2025), i cui materiali sono disponibili alla pagina web <https://www.sism.unito.it/it/progetti-e-materiali>. Una versione preliminare e necessariamente più sintetica del presente contributo è stata pubblicata in (Lugaresi & Scalambro, 2025).

& Van Maanen, 2000). In questa dimensione, la storia della matematica non si configura soltanto come uno sfondo narrativo, ma come un vero e proprio strumento epistemologico e didattico. Essa permette di mettere in evidenza la genesi dei concetti, le rotture e le continuità nel loro sviluppo, nonché le condizioni che hanno reso possibile l'emergere di una certa scoperta. Integrata nella progettazione didattica, la storia della matematica costituisce uno strumento didattico in grado di favorire la costruzione di significati, di stimolare il confronto critico e di rendere più accessibili concetti spesso percepiti come astratti e/o decontestualizzati. Mediante l'approccio storico gli studenti si confrontano con problemi autentici e possono costruire progressivamente una comprensione più profonda e consapevole della disciplina. La lettura di testi storici (in lingua originale o in traduzione italiana) permette agli studenti di confrontarsi con forme di pensiero talvolta distanti dal formalismo a cui sono abituati e di esplorare i tentativi più o meno fruttuosi di dimostrazione proposti in epoche storiche spesso molto lontane nel tempo, ma non per questo meno significative o più semplici. Attraverso la lettura e l'interpretazione di tali fonti, gli studenti possono essere coinvolti in un processo di ricostruzione del sapere che mette in luce la natura problematica e situata della conoscenza matematica, favorendo una partecipazione più attiva e consapevole. Questa prospettiva trova un solido fondamento teorico nella teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (2002), che pone al centro dell'analisi il sistema di relazioni tra insegnante, studente e sapere. In tale quadro, l'apprendimento è concepito come il risultato dell'interazione dello studente con una situazione opportunamente progettata, in cui il sapere emerge come risposta a un problema significativo. L'introduzione della dimensione storica, e in particolare delle fonti originali, può contribuire a costruire situazioni a-didattiche (nelle parole di Brousseau) autentiche, nelle quali il sapere matematico non è semplicemente trasmesso, ma progressivamente negoziato e costruito. Gli ostacoli epistemologici (Brousseau, 1983) appaiono come passaggi necessari nello sviluppo della conoscenza, spesso radicati nella storia stessa della matematica.

Riteniamo utile premettere alla nostra esposizione un (breve) paragrafo in cui ripercorreremo le principali vicende biografiche di Kepler, utili per inquadrare il personaggio nel suo tempo. Il lettore sarà guidato alla scoperta di eventi importanti per lo sviluppo della storia della scienza, ma anche di episodi, apparentemente "minori", che sono stati occasione di nuove scoperte matematiche. Questa breve premessa biografica permette di collocare la figura di Kepler nel suo tempo e di cogliere i legami tra le vicende biografiche dell'astronomo tedesco e alcuni eventi particolarmente rilevanti nel periodo storico a cavallo tra XVI e XVII secolo.

2. Johannes Kepler: Una Vita Avventurosa in Giro per l'Europa

Johannes Kepler è ricordato principalmente per le tre leggi sul moto dei pianeti

che ancora oggi portano il suo nome, ma nel corso della sua vita ha avuto modo di avvicinarsi (spesso in maniera casuale e inaspettata) ad altri ambiti di ricerca, giungendo a risultati di un certo interesse scientifico. Queste scoperte si prestano ad essere raccontate e contestualizzate in un percorso didattico interdisciplinare in cui discipline umanistiche come la storia, la filosofia, l'arte e il latino, si intrecciano con materie scientifiche come l'astronomia, le scienze naturali e la matematica, in particolare la geometria.

Nell'avventurosa vita dello scienziato si possono individuare cinque periodi (Caspar, 1962; Lombardi, 2008). Nato nel 1571 nella cittadina di Weil der Stadt, vicino a Stuttgart, nel sud della Germania, quattro anni dopo Kepler si trasferisce con la famiglia a Leonberg e successivamente a Ellmendingen. Avviato agli studi ecclesiastici, nel 1589 viene ammesso allo *Stift*, il monastero di Tubinga, dove si trattiene per quattro anni e mezzo, dedicandosi a studi di filosofia, matematica e teologia. Il suo professore di matematica e astronomia è il copernicano Michael Maestlin (1550-1631), da cui apprende le prime notizie del nuovo sistema astronomico. Nel 1594 si trasferisce alla scuola protestante di Graz per occupare la cattedra di matematica divenuta vacante e qui rimane per i successivi sei anni, guadagnandosi una certa fama come astrologo. Nel 1596 Kepler pubblica la sua prima opera a stampa, il *Mysterium cosmographicum*, in cui elabora il suo modello cosmologico: un sistema solare 'ad incastro' in cui le semisfere che rappresentano le orbite dei pianeti sono alternate a solidi regolari, a ciascuno dei quali risulta tangente all'interno la semisfera relativa ad un pianeta e all'esterno la semisfera relativa al pianeta successivo nell'ordine di distanza dal Sole (Figura 1).

La Terra è un cerchio, misura di tutte le cose. A questo circoscrivi un dodecaedro: il cerchio che lo comprenderà sarà Marte. A Marte circoscrivi un tetraedro: il cerchio che lo comprenderà sarà Giove. A Giove circoscrivi un cubo: il cerchio che lo comprenderà sarà Saturno. Ora, nella Terra inscrivi un icosaedro: il cerchio inscritto in esso sarà Venere. A Venere inscrivi un ottaedro: il cerchio inscritto in esso sarà Mercurio.²

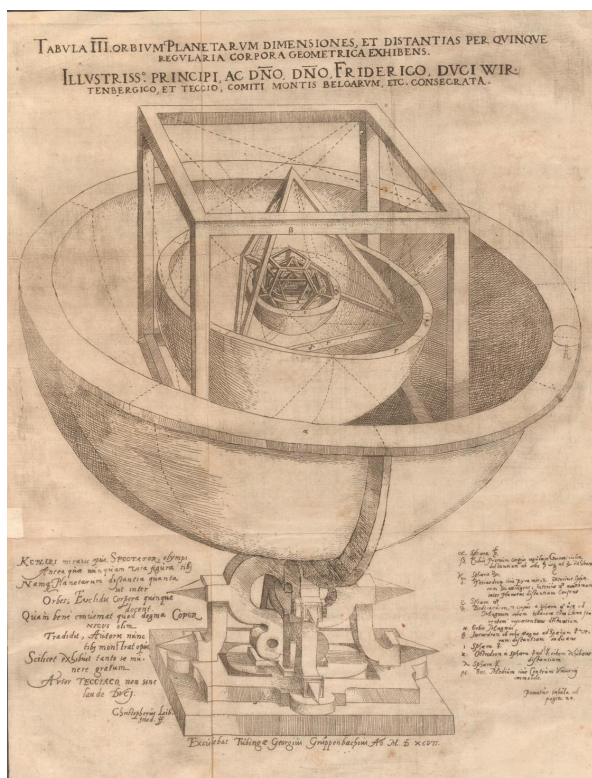
Nel 1597 sposa Barbara Muller, dalla quale avrà cinque figli. Nel 1600, obbligato a lasciare Graz per motivi religiosi, Kepler raggiunge Tycho Brahe (1546-1601) a Praga e nel 1601, alla sua morte, gli subentra nella carica di matematico dell'imperatore Rodolfo II. Il soggiorno nella città boema durerà dodici anni. Nel periodo trascorso a Praga Kepler pubblica alcune delle sue opere astronomiche più importanti, tra cui l'*Astronomia nova* (1609), nella quale sono formulate le prime due leggi planetarie. Nel 1611 dà alle stampe la

² La traduzione in italiano di questo passo è opera delle autrici a partire dal seguente testo originale in latino: *Terra est circulus mensor omnium: Illi circumscribe Dodecaedron: Circulus hoc comprehendens erit Mars. Marti circumscribe Tetraedron: Circulus hoc comprehendens erit Iupiter. Iovi circumscribe Cubum: Circulus hunc comprehendens erit Saturnus. Iam terra inscribe Icosaedron: Illi inscriptus Circulus erit Venus. Veneri inscribe Octaedron: Illi inscriptus Circulus erit Mercurius* (Kepler, 1596, c. 10).

Strena seu de nive sexangula; in quello stesso anno muore la moglie Barbara. In seguito alla cacciata dei luterani dalla città, spinto da difficoltà economiche, nel 1612 Kepler si trasferisce a Linz, con l'incarico di matematico provinciale. L'anno seguente si sposa con Susanna Reuttinger, da cui avrà altri sette figli. Il periodo trascorso nella città austriaca è molto produttivo dal punto di vista scientifico: qui, infatti, pubblica alcuni dei suoi lavori più importanti, tra i quali la *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) e l'*Harmonices mundi* (1619).³ Gli ultimi anni di vita sono particolarmente difficili: a causa delle persecuzioni religiose è costretto a spostarsi frequentemente. Durante uno di questi viaggi Kepler si ammala gravemente e muore a Ratisbona il 15 novembre del 1630.

Figura 1

Il sistema solare «ad incastro» di Kepler (Kepler, 1596, c. 25)



³ All'interno dell'*Harmonices mundi* (1619), che può essere considerato l'ultimo dei libri 'matematici' di Kepler, viene formulata la terza legge planetaria. Uno degli aspetti caratteristici delle sue opere è la continua ricerca di una perfetta armonia che per Kepler governa l'intero universo. Da questo punto di vista il primo e l'ultimo dei suoi libri 'matematici' risultano i più caratteristici: sia il *Mysterium cosmographicum* che l'*Harmonices mundi* testimoniano la costante ricerca di simmetrie da parte del matematico ed astronomo tedesco, confermata dallo studio di solidi e poligoni regolari, combinazioni di essi in modelli, numeri figurati e armonie musicali (Brigaglia, 2016; De Marchi, 2019, pp. 27-28).

3. Un Percorso Interdisciplinare sulla Matematica di Kepler

A partire da alcuni episodi emblematici della biografia di Kepler e in una prospettiva interdisciplinare, ci limitiamo a suggerire alcune riflessioni di più ampio respiro che possono coinvolgere l'insegnante di storia e filosofia.⁴ Queste nostre considerazioni prendono le mosse dalle *Indicazioni Nazionali per i licei 2010*, in cui si sottolineava la necessità per lo studente di acquisire “una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico” (MIUR, 2010, p. 337). Tale prospettiva trova oggi piena continuità e ulteriore conferma nel testo delle nuove *Indicazioni Nazionali*, recentemente pubblicato, in cui si ribadisce l'importanza di “analizzare tappe significative dello sviluppo del pensiero matematico in relazione al contesto storico e culturale” e di “riconoscere alcune connessioni tra matematica, filosofia e pensiero scientifico nella loro evoluzione storica”, promuovendo la consapevolezza del “ruolo della matematica nei diversi ambiti dell'attività umana” (MIM, 2026, p. 34). Un primo possibile collegamento riguarda la questione della riforma protestante e le sue ripercussioni sulle vicende biografiche dell'astronomo tedesco; un secondo spunto può derivare dal tema della rivoluzione astronomica che, a partire dall'opera di Niccolò Copernico (1473-1543) *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) e arrivando alla pubblicazione del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632) di Galileo Galilei (1564-1642), porta a mettere in discussione l'intera concezione cosmologica dell'universo.

Nel seguito di questo lavoro, come anticipato, presentiamo alcuni possibili approfondimenti sulla figura di Kepler, che intendono mettere in luce gli aspetti ‘matematici’ della sua biografia scientifica. Per fare questo prenderemo spunto da due opere meno note di Kepler, la *Nova stereometria doliorum vinariorum* e la *Strena seu de nive sexangula*, entrambe dedicate a questioni di carattere geometrico. Precisiamo che non tutte le attività sono state sperimentate in classe, ma sono concepite per guidare il docente nella scelta consapevole di testi da proporre ai propri studenti.

4. Primo Approfondimento: Botti di Vino e Calcolo di Volumi

Gli interessi geometrici di Kepler emergono, seppur marginalmente, già nella sua prima opera a stampa, il *Mysterium cosmographicum* (1596), e sono stati influenzati dall'attento studio delle opere dei suoi tre ‘maestri greci’: Euclide, Apollonio e, soprattutto, Archimede. L'omaggio al matematico siracusano risulta evidente, a distanza di quasi vent'anni, nella *Nova stereometria doliorum*

⁴ La nostra proposta si presta per essere attuata attraverso specifiche Unità di Apprendimento (UDA) interdisciplinari, concordate in sede di Consiglio di Classe, sia all'interno di contesti particolarmente favorevoli ai percorsi di natura interdisciplinare, come quelli che rientrano nella cornice del Liceo Matematico. Si veda, ad esempio, il convegno “Matematica e Storia nel Liceo Matematico”.

vinariorum (1615), ossia la *Nuova stereometria delle botti da vino*.

La peculiarità e la particolarità dell'opera emergono già dal titolo, su cui è opportuno soffermarsi per fare alcune considerazioni. Suggeriamo di partire da alcune domande stimolo da proporre agli studenti per avvicinarli al tema e per mettere in luce alcune parole chiave: “Che cosa intendiamo con *stereometria*?”, “Rispetto a cosa essa risulta *nuova*?”, “In che modo sono coinvolte le *botti da vino*?”. Per trovare risposta a queste domande, gli studenti, guidati dall'insegnante, possono leggere la prefazione, nella quale Kepler spiega la genesi dell'opera.⁵

Le scoperte scientifiche che Kepler si accinge a presentare al lettore sono state ispirate da un fatto apparentemente casuale, ossia l'acquisto di botti di vino per celebrare il matrimonio con la sua seconda moglie (Susanna), avvenuto il 30 ottobre 1613. Kepler racconta che la vendemmia in Austria in quell'anno era stata molto abbondante (“vindemia copiosa, nec minus generosa”) e i prezzi dell'uva erano molto bassi. Decide quindi di procurarsi una serie di botti con l'intenzione di farle riempire di vino. Osservando il venditore all'opera l'astronomo tedesco rimane colpito dalla semplicità della procedura usata per calcolare la capacità dei recipienti.

Dopo quattro giorni il venditore venne con un'asta di misurazione. Con quella e quella solamente egli indiscriminatamente e indifferentemente esplorò tutti i recipienti di vino trascurando la forma e senza raziocinio o calcolo. (De Marchi, 2019, p. 40)

Mediante un'asta rigida graduata posta all'interno della botte, in diagonale, il venditore riesce a dedurre la capacità.

Infatti, calata trasversalmente la punta di un'asta di bronzo nel foro di riempimento di una botte piena fino alla base [“calcem”] di entrambi i cerchi di legno—che chiamiamo comunemente fondi—dopo che da entrambe le parti apparve uguale la distanza dalla sommità della pancia [“a ventris summo”] fino al punto più basso di ciascuna tavola circolare [“ad utriusque circularis tabulae imum”]: dal segno del numero che era inciso sull'asta nel punto in cui terminava tale lunghezza, egli [il venditore] dichiarò il numero di anfore che la botte poteva contenere; e il prezzo fu calcolato secondo quel numero.

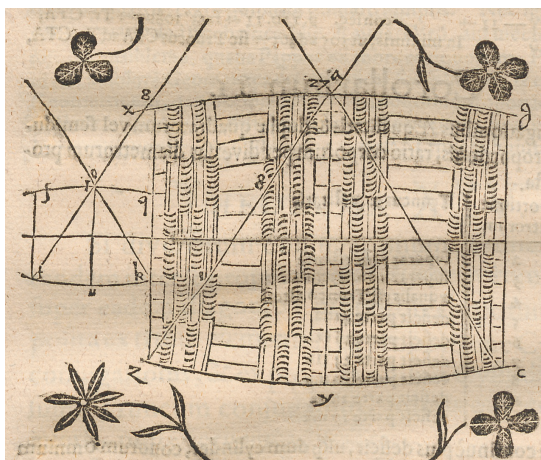
⁵ Per cogliere appieno le peculiarità del linguaggio dell'autore, l'opera può essere letta nella lingua originale (Kepler, 1615). Per le classi in cui non è previsto l'insegnamento del latino, si suggerisce il ricorso alla traduzione ‘ponte’ dall'inglese (Kepler, 2018). In questo secondo caso raccomandiamo al docente di prestare attenzione alle possibili ‘distorsioni’ che possono occorrere a seguito di una doppia traduzione (latino-inglese, inglese-italiano). In questa fase di analisi testuale e di traduzione il docente di matematica può lavorare in stretta collaborazione con il docente di latino (se previsto) o con quello di lingua inglese. Dal punto di vista etimologico-linguistico il docente di matematica può costruire un piccolo glossario in cui riportare non solo la traduzione dal latino all'italiano, ma anche il significato di alcuni termini matematici, oggi raramente utilizzati e dunque poco familiari agli studenti. Le traduzioni in italiano inserite all'interno di questo articolo sono state rielaborate a partire da (Kepler, 2018) e da (De Marchi, 2019).

Cominciai a meravigliarmi che una linea trasversale condotta attraverso il volume [“corpus”] di metà botte potesse essere indizio della capacità; e a dubitare anche dell’attendibilità di questa misurazione, poiché una botte molto corta tra i due fondi, solo con le imboccature [i fondi] un po’ più larghe, e perciò di capacità ridotta, potrebbe avere la medesima lunghezza dal foro di riempimento fino al punto più basso dell’uno o dell’altro cerchio [...]. (De Marchi, 2019, pp. 40-41)

Sulla base della descrizione fornita da Kepler, si comprende che la botte non poggia sulle basi circolari e che il foro di riempimento è collocato nel punto più alto della ‘pancia’ (Figura 2).⁶ Per stimare il volume delle botti di vino il venditore calcola il numero di anfore contenute nel barile utilizzando una semplice misurazione lineare: “la linea obliqua segnata attraverso il volume di metà del recipiente”.

Figura 2

A sinistra lo schema della botte descritta da Kepler (Kepler, 1615, c. 102), a destra alcuni esempi di botti



Stupito dall’immediatezza del metodo, ma dubbioso sull’affidabilità di tale misura, Kepler si propone di dare una giustificazione matematica a tale pratica: “sembrò non essere sconveniente per un nuovo marito esplorare, secondo leggi geometriche [«ad leges Geometricas»], un nuovo fondamento per la certezza matematica di questa misurazione [...]”.

È interessante far osservare agli studenti in che modo da un episodio casuale, come quello capitato a Kepler, possa scaturire la giusta intuizione per una nuova ricerca. Il problema in questo caso è quello della ricerca del barile che, a parità di diagonale, abbia la massima capacità. Il matematico scoprirà che la forma della botte è quella che permette di contenere la maggior quantità di vino.

Per addentrarci in questa ricerca e costruire il nostro percorso tematico sulle

⁶ Il foro praticato in corrispondenza del diametro massimo della botte, che serve per vuotarla o riempirla è detto cocchiere.

orme di Kepler è opportuno fornire qualche ulteriore dettaglio sull'opera. La *Nova Stereometria* è divisa in tre parti: nella prima, dedicata alla “geometria solida dei corpi curvi e regolari” (ossia ai solidi di rotazione), Kepler studia i rapporti tra aree e volumi di figure piane e solide e il volume di vari solidi di rotazione, riprendendo e ampliando alcuni risultati ottenuti da Archimede (III sec. a.C.) ed esposti nel trattato *De conoidibus et sphaeroidibus*.⁷ È esplicito l'omaggio al grande matematico siracusano: nella prima sezione (teoremi 1-17), Kepler riprende risultati di geometria piana e solida dovuti ad Archimede; nella seconda sezione, *Supplemento ad Archimede* (teoremi 18-30), dimostra alcuni teoremi riguardanti solidi di rotazione che applicano metodi dimostrativi diversi rispetto a quelli utilizzati nella stereometria archimedeica ed estende l'analisi ad altri 87 solidi, in aggiunta ai 5 studiati da Archimede, ottenuti mediante la rotazione delle sezioni coniche attorno ad assi di rotazione paralleli o perpendicolari a quello di simmetria. Si chiarisce a questo punto il significato del titolo dell'opera: Kepler si propone di recuperare e di dimostrare con un nuovo approccio alcuni teoremi di geometria solida scoperti da Archimede. Si tratta quindi di una “nuova stereometria”, ossia di una nuova geometria solida. La seconda parte dell'opera riguarda lo studio della forma della botte austriaca. Il calcolo del volume di questo particolare contenitore, infatti, rappresenta un perfetto campo di applicazione dei teoremi di Archimede riguardanti sferoidi e conoidi. Come sarà spiegato in seguito, Kepler inizialmente approssima la botte con un cilindro, osservando però che questa forma non tiene conto della ‘pancia’ della botte. In seconda approssimazione considera due tronchi di cono uguali che combaciano lungo la circonferenza maggiore, ma questa forma crea uno spigolo vivo al centro, mentre le doghe delle botti hanno una curvatura più arrotondata. Kepler immagina quindi un solido a forma di cedro, dal quale vengono eliminate le estremità appuntite, ottenendo la forma ‘tradizionale’ della botte, con curvatura convessa e basi piatte. Nella terza e ultima parte dell'opera spiega come utilizzare i risultati contenuti nelle parti precedenti: non tutti i recipienti, infatti, rispettano gli stessi rapporti che valgono per le botti austriache.

⁷ L'opera *De conoidibus et sphaeroidibus* (*Sui conoidi e gli sferoidi*) riguarda lo studio di tre solidi introdotti da Archimede: il conoide rettangolo (o parabolico, oggi denominato paraboloide di rotazione), il conoide ottusangolo (o iperbolico, oggi denominato iperboloide di rotazione) e lo sferoide (o ellissoide di rotazione), a sua volta distinto in sferoide allungato e sferoide schiacciato, a seconda che la rotazione dell'ellisse abbia luogo rispettivamente intorno all'asse maggiore o all'asse minore. Se l'ellisse generatrice è un cerchio, la rotazione genera la sfera. Il testo di Archimede consiste in un solo libro di 32 proposizioni, la cui prima traduzione latina è quella di (Geschauff, 1544) e, successivamente, è stata pubblicata in (Commandino, 1558). L'edizione completa in traduzione italiana delle *Opere* di Archimede si trova in (Frajese, 1974).

4.1. *Spunti Didattici per la Lettura della Nova Stereometria di Kepler*

Il metodo usato da Kepler, che consiste nell'immaginare che i solidi siano suddivisi in un certo numero di elementi infinitesimali, permette di annoverare la *Nova stereometria* tra i testi che si avvicinano ai metodi del calcolo infinitesimale. Cronologicamente il trattato di Kepler si può vedere come ideale collegamento tra l'opera *Sui conoidi e gli sferoidi* di Archimede (Geschauf, 1544; Commandino, 1558) e la *Geometria degli indivisibili* di Bonaventura Cavalieri (Cavalieri, 1635).⁸ I teoremi della *Nova stereometria* possono rappresentare un'occasione di approfondimento e/o di consolidamento di tematiche riconducibili alle origini del calcolo infinitesimale. Su questi presupposti è stato progettato il seguente percorso tematico, che illustreremo ora più in dettaglio inquadrandolo nel contesto didattico di riferimento. Questa attività è suddivisa in tre parti:

- *Due metodi, uno stesso teorema.* Kepler e Archimede a confronto.
- *Oltre Archimede.* Lo studio di alcuni solidi di rivoluzione in Kepler e Cavalieri.
- *Dalla teoria alla pratica.* Formalizzazione e soluzione di un problema di massimo a partire dallo studio di una botte da vino.

Il fulcro del primo approfondimento è la *Nova stereometria doliorum vinariorum*; sul piano didattico-epistemologico l'obiettivo è quello di riflettere sul concetto di dimostrazione. A partire da un'analisi linguistica e matematica dei testi proposti, l'attività si focalizza sul confronto tra dimostrazioni per stimolare la capacità critica degli studenti. Il paragone tra due o più tecniche dimostrative permette di vedere la matematica come una sorta di 'rete di idee', consente di cogliere la versatilità delle strategie di *problem solving*, collegare rami della matematica apparentemente distanti e superare possibili ostacoli cognitivi, proponendo una via alternativa che può risultare maggiormente inclusiva. In questo contesto, l'idea di proporre un confronto tra dimostrazioni è fortemente legata alla scelta dei teoremi della *Nova stereometria* di Kepler. L'opera del matematico tedesco, come si vedrà meglio nel seguito, consente in maniera piuttosto immediata, grazie agli espliciti riferimenti dell'autore, di creare un 'ponte ideale' con l'opera geometrica di Archimede. In modo altrettanto naturale, i teoremi della *Nova stereometria* possono essere messi a confronto con analoghi risultati presenti nella *Geometria degli indivisibili* di Cavalieri.

L'attività progettata, ma non ancora sperimentata, è rivolta ad una classe

⁸ Nel momento in cui Kepler compone la propria opera ha già avuto modo di leggere il trattato archimedeo su conoidi e sferoidi grazie alle traduzioni latine di (Geschauff, 1544) e (Commandino, 1558). La *Nova Stereometria* kepleriana sarà, a sua volta, fonte di ispirazione per Cavalieri per la stesura della *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Cavalieri, 1635). Per la traduzione italiana dell'opera di Cavalieri si rinvia a (Lombardo Radice, 1966).

quinta di scuola secondaria di secondo grado o, eventualmente, alla conclusione del secondo biennio. In linea con i documenti ministeriali, questa attività offre agli studenti la possibilità di inquadrare la teoria matematica qui presentata nel contesto storico entro cui si è sviluppata, permettendo di “discutere il ruolo della matematica in qualche ambito del sapere, con eventuali riferimenti allo sviluppo storico del pensiero e della società” (MIM, 2026, p. 41). È inoltre un’occasione per approfondire “i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni)” e per “applicare quanto appreso per la soluzione di problemi” (MIUR, 2010, p. 337). Tale attività è inoltre concepita come consolidamento degli obiettivi specifici di apprendimento legati ai principali concetti del calcolo infinitesimale, colti “anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (in particolare il calcolo di aree e volumi)” (MIUR, 2010, p. 341). A tal riguardo, le recenti *Indicazioni Nazionali* per il secondo ciclo pongono l’accento sulla necessità di precisare “l’idea intuitiva di area di una figura e di lunghezza di una curva”, introducendo una definizione di integrale basata sulla “nozione di area del sottografico e sull’approssimazione con funzioni costanti a tratti” (MIM, 2026, p. 39). L’analisi a priori richiede di tenere in considerazione i seguenti aspetti:

- Scelta dei materiali da fornire agli studenti. Il docente seleziona alcuni teoremi che ritiene efficaci per avviare la riflessione sul concetto di dimostrazione e, successivamente, per discutere il procedimento risolutivo proposto dai vari autori (Kepler, Archimede, Cavalieri).
- Possibili strategie risolutive. Lavorando a coppie o a piccoli gruppi, gli studenti analizzano i teoremi di Kepler, Archimede, Cavalieri e i loro diversi procedimenti dimostrativi, provando a riprodurli sul proprio quaderno e/o con l’utilizzo di un software di geometria dinamica (ad esempio *GeoGebra*).
- Possibili difficoltà, nodi concettuali e misconcetti. Tenendo conto del focus sull’utilizzo di fonti primarie, possono emergere difficoltà di carattere linguistico, sia a livello di traduzione della fonte (dal latino oppure dall’inglese), sia di carattere lessicale per la presenza di termini poco familiari agli studenti (ad esempio la parola ‘stereometria’).⁹ A questo scopo si suggerisce di costruire una piccola tabella-glossario in cui riportare il termine nella lingua originale con cui è presentata la fonte (italiano per Archimede e Cavalieri, latino o inglese per Kepler); il termine nella sua traduzione italiana (per Kepler); il suo significato. Un aspetto matematicamente e scientificamente significativo a cui prestare attenzione è il concetto di ‘rivoluzione’ (e, più in generale, l’idea di riscoperta dei

⁹ Sarebbe auspicabile, ma non vincolante la conoscenza del latino per poter lavorare, nel caso dell’opera di Kepler, direttamente sulla fonte originale. Nel caso in cui il latino non fosse materia di indirizzo, si può ricorrere alla traduzione ‘ponte’ offerta da (Kepler, 2018), tenendo conto delle difficoltà, già segnalate all’inizio di questo paragrafo, legate alle possibili modifiche o distorsioni derivanti da una doppia traduzione.

metodi di Archimede) tipico del XVII secolo, nel quale si inseriscono perfettamente le opere di Kepler e di Cavalieri. Un nodo concettuale che emerge dalla lettura delle fonti primarie è legato alle nozioni di ‘indivisibile’ e di ‘infinitesimo’. Il docente dovrebbe porre particolare attenzione a questo aspetto, che permette di riflettere sulle idee alla base della nascita del calcolo infinitesimale.

Per quanto riguarda le metodologie didattiche, si suggerisce di affiancare alla lezione frontale una didattica laboratoriale ispirata al “case-based learning” (Williams, 1992). In linea con i risultati di apprendimento attesi, il docente individua la tipologia di ‘caso’ più adatta: in questo contesto seleziona opportuni teoremi dalle opere di Archimede, Kepler, Cavalieri.

Il docente presenta alla classe la struttura dell’attività e la sua suddivisione, successivamente fornisce agli studenti i materiali per l’analisi e la valutazione (i testi possono essere in formato cartaceo oppure in versione digitale). Gli studenti, a coppie o a piccoli gruppi, analizzano il ‘caso’ proposto e si attivano per rispondere alle richieste del docente, ossia l’analisi e il confronto tra i teoremi di Archimede, Kepler e Cavalieri. Al termine di ogni fase è previsto un momento di riflessione e di presentazione, da parte degli studenti, dell’analisi effettuata. Il docente integra ed eventualmente corregge le risposte facendo emergere analogie e differenze tra le dimostrazioni fornite da Archimede e Kepler e successivamente tra quelle di Kepler e Cavalieri, portando gli studenti a riflettere sui concetti di ‘indivisibile’ e di ‘infinitesimo’. A conclusione il docente sollecita gli studenti in un processo di istituzionalizzazione del sapere, in cui si sintetizzano i punti salienti emersi nel corso delle attività.

Il percorso, se svolto nella sua interezza, richiede un impegno orario di almeno 6 ore in aula, tenendo conto di contestualizzazione storica, analisi linguistica e matematica dei testi, discussioni di classe sui significati emersi e sulle difficoltà incontrate e istituzionalizzazione del sapere costruito, ma può essere ridotto sulla base di specifiche esigenze didattiche, selezionando solo alcune delle attività proposte; viceversa, si presta ad un eventuale ampliamento in termini di orario e di contenuti, se inserito in una classe di Liceo Matematico.

Al termine dell’attività è prevista un’analisi a posteriori, mediante la somministrazione di una prova formativa, volta a verificare il raggiungimento dei risultati di apprendimento attesi (comprensione delle diverse tecniche dimostrative, applicazione dei metodi per la risoluzione di problemi). Si suggerisce di prevedere anche un questionario di gradimento, con cui sondare l’effettiva adeguatezza dei materiali a disposizione, individuare le possibili aree di miglioramento e verificare se gli ostacoli ipotizzati si siano rivelati reali o ne siano emersi altri. In Tabella 1 sono schematizzati i punti chiave di questa attività.

Tabella 1

Schema dell'attività

Titolo dell'attività	<i>Botti di vino e calcolo di volumi nell'opera di Kepler</i>
Ordine di scuola	Scuola secondaria di secondo grado
Classe	Quinta
Metodologie didattiche	Didattica laboratoriale; <i>case-based learning</i> .
Fasi del percorso e possibile suddivisione oraria	Si prevedono 1 o 2 ore di lavoro a casa (in preparazione) + 6 ore in classe, così ripartite: • Ricerca affidata agli studenti come compito a casa. Gli studenti raccolgono autonomamente materiale utile per costruire una biografia scientifica di Kepler allo scopo di arrivare in classe conoscendo già alcuni tratti della biografia del matematico. Il materiale può provenire dal web (fornendo precise indicazioni sui siti da utilizzare) oppure da testi suggeriti dal docente (tempo stimato: 1 o 2 ore) • Introduzione sulla figura di Kepler e breve contestualizzazione storica (1 ora). Il docente raccoglie le informazioni portate dagli studenti e finalizza il tutto con una presentazione della biografia di Kepler ed una breve contestualizzazione storica. • Attività 1. <i>Due metodi, uno stesso teorema</i> (1 ora). Si confrontano i metodi dimostrativi di Archimede e di Kepler per determinare l'area del cerchio. • Attività 2. <i>Oltre Archimede</i> (2 ore). Si introduce la figura di B. Cavalieri e si propone la lettura guidata di alcuni teoremi relativi allo studio di volumi di solidi di rotazione. • Attività 3. <i>Dalla teoria alla pratica</i> (1 ora). Si propone un problema di massimo, prendendo spunto dall'opera di Kepler. • Conclusione (1 ora). Somministrazione di una prova formativa e di un breve questionario di gradimento utile per la raccolta di feedback degli studenti.

4.2. Due Metodi, uno Stesso Teorema

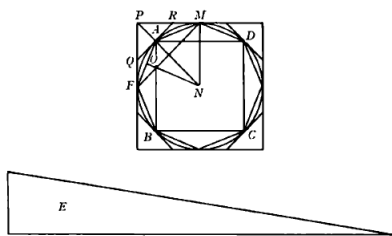
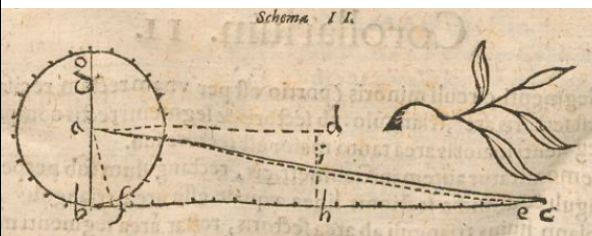
Obiettivo della prima parte è porre in evidenza la diversità tra i metodi dimostrativi di Archimede e Kepler per il calcolo di un'area o di un volume, ossia tra il cosiddetto “metodo di esaustione”, usato dal matematico siracusano, e quello basato sulla divisione di una figura piana o solida in corpuscoli infinitamente piccoli, ma non privi di larghezza o di spessore, adottato dall'astronomo tedesco. Un esempio che ci appare didatticamente efficace è la dimostrazione del teorema relativo all'area del cerchio. A tale scopo suggeriamo di proporre agli studenti le versioni archimedea e kepleriana di tale teorema, con l'intento di analizzare e confrontare le due dimostrazioni.¹⁰ Riportiamo in

¹⁰ Il confronto tra le due diverse dimostrazioni (Archimede e Kepler) consente di collegare due diversi rami della matematica: risolvere un problema geometrico usando l'analisi infinitesimale

Tabella 2, in traduzione italiana, le prime due proposizioni della *Misura del cerchio* di Archimede e il teorema II della *Nova stereometria* di Kepler e le figure corrispondenti.¹¹

Tabella 2

Proposizioni di Archimede e Kepler a confronto

Archimede, <i>Misura del cerchio</i>	Johannes Kepler, <i>Nova stereometria</i>
Proposizione 1. Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [= all'altro cateto] Proposizione 2. Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.	Teorema II. L'area del cerchio confrontata con quella del quadrato ha lo stesso rapporto di 11 a 14.
	

4.3. Oltre Archimede

Anche la seconda parte dell'attività è basata sulla lettura di fonti primarie in traduzione italiana e si propone, a partire da alcune riflessioni di carattere comparativo, di mettere in relazione la *Nova stereometria* di Kepler con la *Geometria degli indivisibili* di Cavalieri (1598-1647).

L'opera del matematico italiano, che segna un momento fondamentale nel lungo percorso di avvicinamento ai metodi infinitesimali, si presta per essere approfondita in un contesto didattico, offrendo agli studenti l'opportunità di scoprire (o riscoprire) alcuni interessanti teoremi di geometria piana e solida. È possibile contestualizzare la figura di Cavalieri e la sua opera matematica partendo dalla lettura della prefazione alla *Geometria degli indivisibili*. È lo stesso Cavalieri a spiegare ai lettori le motivazioni che lo hanno spinto ad elaborare la sua teoria: le parole dell'autore restituiscono una maggiore chiarezza e concretezza alla descrizione. In questo contesto riportiamo, a titolo esemplificativo, un estratto della prefazione, che può fungere da guida per gli

(o viceversa) mostra la coerenza della disciplina.

¹¹ Per Archimede si rinvia a (Frajese, 1974, pp. 225-228). Per Kepler si veda (De Marchi, 2019, p. 47).

studenti nell'approcciarsi alla successiva lettura di alcuni teoremi della geometria cavalieriana.¹²

Meditando un giorno sulla generazione dei solidi, che sono originati da una rivoluzione intorno ad un asse, e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati, mi stupivo moltissimo del fatto che le figure generate tralignassero a tal punto dalla condizione dei propri genitori, da mostrar di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. [...] pervenni finalmente a questa opinione, e precisamente che dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro ma paralleli. In questo modo, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane, quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee. [...] Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure quello di indagare prima i rapporti delle linee in luogo di quello dei piani, e i rapporti dei piani in luogo di quello dei solidi, per procurarmi poi la misura delle figure stesse. [...]

Mi sono invero proposto, o Geometra, in questi sette libri, di trovare la dimensione del maggior numero possibile di figure, tanto piane che solide; di queste alcune erano state studiate da Euclide e Archimede, le altre invece non erano state fino a qui affrontate da nessuno, che io sappia, con l'eccezione del solo Keplero, il quale, trattando della botte austriaca da misurarsi con una canna metrica, dopo aver passato sommariamente in rassegna le cose scoperte da Archimede che gli erano necessarie, giustappose quella parte che denominò *Supplemento alla Stereometria Archimedeae*, nella quale, dopo aver considerato la molteplice rivoluzione attorno ai diversi assi delle sezioni coniche, nonché di loro porzioni, comunicò ai geometri con un elegantissimo bando ottantasette solidi, oltre ai cinque Archimedei (e cioè la sfera, il conoide parabolico, il conoide iperbolico, lo sferoide oblungo e schiacciato).

Cavalieri spiega al lettore come la sua opera si ponga in continuità con quella di Kepler e sulla scia degli studi geometrici di Euclide e Archimede. È soprattutto quest'ultimo ad ispirare le ricerche di Cavalieri. Nell'opera su conoidi e sferoidi il matematico siracusano aveva considerato soltanto i solidi ottenuti dalla rotazione delle figure attorno al loro asse di simmetria ottenendo cinque solidi di rivoluzione: il conoide parabolico, il conoide iperbolico, lo sferoide allungato, lo sferoide schiacciato e la sfera. Il passo ulteriore compiuto da Cavalieri è quello di estendere lo studio dei solidi di rivoluzione, analogamente a quanto fatto da Kepler già vent'anni prima (nel *Supplemento ad Archimede della Nova Stereometria*), considerando figure generate dalla rotazione delle coniche attorno ad un asse in diverse posizioni possibili. Quello che differenzia Cavalieri da Kepler è il metodo utilizzato. L'idea sviluppata da Cavalieri è quella di considerare i solidi come composti da un numero infinito di elementi infinitesimali detti "indivisibili".¹³ Il metodo dimostrativo di

¹² Per la prefazione all'opera di Cavalieri si veda in particolare (Lombardo Radice, 1966, pp. 47-51).

¹³ Cavalieri immagina una figura piana come costituita da linee. Poiché tra due linee se ne può

Cavalieri differisce da quello infinitesimale di Kepler e si basa sul cosiddetto *Principio di Cavalieri*.¹⁴ Tale principio fornisce un modo per confrontare aree di figure piane o volumi di solidi affermando che è possibile dedurre il rapporto tra due aree o due solidi a partire dalle corrispondenti linee o sezioni piane. Cavalieri parla di confrontabilità tra due insiemi di indivisibili. La proporzione sussiste perché si tratta di insiemi infiniti per numero di elementi, ma non per l'estensione (superficie o volume) da essi occupata.¹⁵

sempre tracciare una terza, il numero di queste linee è infinito. Cavalieri non afferma che le linee hanno un'area, ma che l'insieme di tutte le linee è racchiuso entro i confini della figura. Egli confronta il modo in cui le linee cambiano da una figura all'altra. L'estensione totale è finita e determinata dal modo in cui queste linee variano: se in ogni singola altezza la linea della figura A sta alla linea della figura B in un certo rapporto, allora “tutte le linee di A” staranno a “tutte le linee di B” nello stesso rapporto. Per approfondire la teoria cavalieriana degli indivisibili si rinvia a (Giusti, 1980).

¹⁴ Il teorema, oggi noto come “Principio di Cavalieri”, che riconduce il confronto tra due figure a quello dei rispettivi indivisibili, è enunciato nella Proposizione IV del Libro II della *Geometria degli indivisibili*: “Se due figure piane o solide hanno la stessa altezza; se poi, condotte nelle figure piane delle rette parallele e nelle solide dei piani paralleli, si troverà che i segmenti di retta tagliati dalle figure piane (o le superfici piane tagliate dalle solide) sono grandezze proporzionali, le due figure staranno tra loro come uno qualsiasi dei segmenti (o nei solidi una delle superfici) tagliati nella prima al corrispondente segmento tagliato nell'altra” (Giusti, 2007, pp. 18-19).

¹⁵ Cavalieri tenta di applicare la teoria delle proporzioni euclidea, pensata per grandezze finite e omogenee, agli indivisibili. Per maggior chiarezza riportiamo alcune considerazioni di natura epistemologica ricavate da (Lombardo Radice, 1966), che possono essere di aiuto anche per il docente che si appropria alla lettura della *Geometria degli indivisibili*. Nella Proposizione I (Libro II) Cavalieri afferma: “Tutte le linee di transito retto di figure piane quali si vogliano, e tutti i piani di [figure] solide quali si vogliano, sono grandezze che hanno un rapporto tra di loro [confrontabili]”. Lombardo Radice riporta in nota alcune precisazioni. “L'idea che due insiemi infiniti siano confrontabili sembra a noi il grande, ardito passo in avanti compiuto da Cavalieri nel pensiero, oltre che il fondamento ‘tecnico’ della sua nuova Geometria. Il problema del rapporto tra infiniti si pose [...] non appena egli intuì la possibilità di dedurre il rapporto tra due solidi da quello di sezioni piane corrispondenti, sotto opportune ipotesi”. Nell'enunciato Cavalieri dice testualmente “che hanno un rapporto tra di loro”. Dalla dimostrazione risulta però che Cavalieri si riferisce alla definizione euclidea di grandezze che hanno tra di loro “proportione”, e cioè che siano confrontabili (*Elementi*, libro V, def. IV). Cavalieri sosteneva che la proporzione esisteva perché si trattava di insiemi infiniti per numero di elementi (*numero*) ma non per l'estensione, superficie o volume, da essi occupato (*magnitudine*). Si trattava cioè di infiniti relativi (*secundum quid*) e associati a superfici e solidi di area e volume finiti, non di infiniti in senso assoluto (*simpliciter*) e illimitati da ogni parte (*undequaque*). Va precisato – continua Lombardo Radice – che Cavalieri in questo teorema parla della confrontabilità (*proportione*) tra due insiemi di indivisibili, non tra le somme degli elementi dei due insiemi (Lombardo Radice, 1966, p. 201, nota 7). Questo fatto è esplicitato ulteriormente nello Scolio seguente, di cui riportiamo un estratto: “Qualcuno può forse dubitare di questa dimostrazione, non comprendendo bene in qual modo linee, o piani, indefiniti di numero, quali possono essere stimati quelli che da me sono chiamati tutte le linee, oppure tutti i piani, di tali o talaltre figure, possano essere mutuamente confrontati. Per questo motivo mi sembra di dover accennare [al fatto] che, quando considero tutte le linee, oppure tutti i piani di una qualche figura, io non confronto il loro numero, che ignoriamo, ma soltanto la grandezza, che è uguale allo spazio

L'attività successiva è incentrata sull'analisi di alcuni solidi di rivoluzione, studiati da Kepler nel *Supplemento* alla stereometria archimedeica e successivamente ripresi da Cavalieri nella *Geometria degli indivisibili*. Un esempio che ci sembra particolarmente efficace è rappresentato dai solidi generati dalla rotazione di una circonferenza o di una sua parte attorno ad un asse. Proponiamo il seguente brano, in cui Kepler descrive i diversi modi in cui si generano i solidi di rotazione. Egli individua cinque possibili rotazioni, a cui corrispondono altrettante figure solide, che possono essere schematizzate come in Tabella 3.

Sui modi della generazione

Dalla rotazione circolare di queste quattro figure piane [cerchio, parabola, iperbole, ellisse], si creano infinite forme di solidi, le cui superfici non sono rettilinee da entrambi i lati come quelle del cono e del cilindro, sebbene lo siano secondo un grado maggiore o minore.

Le specie di rotazione sono generalmente cinque, ma che in seguito vengono suddivise più minuziosamente quando si giunge a figure più composte. Nello schema allegato queste specie sono espresse in questo modo.

- I. L'asse CB, attorno al quale la figura deve ruotare, sta più lontano dal centro F della figura ED da ruotare di quanto serva per incontrarsi con la figura stessa. Allora la figura DE, ruotata direttamente lungo il cerchio FCG con la sua larghezza in posizione eretta, crea un Anello [annulum] nel quale vi è uno spazio intermedio, il cui centro è A.
- II. Oppure questo asse della generazione, come AB, tocca la figura FD da far ruotare; la tocchi in A e, restando fisso il punto della circonferenza A, l'intero cerchio ruoti attorno a CB: allora si generano figure che potresti chiamare Angoli stretti [Angulos strictos].
- III. Oppure l'asse della generazione taglia la figura da far ruotare fuori dal centro, come se si dovesse far ruotare il segmento maggiore del cerchio MDN attorno alla sezione MN, cosicché il centro F passi per G; si genera allora una figura cava in due punti opposti, precisamente attorno a M e N, che ha la forma del frutto dell'albero del Melo [Mali fructus arborei forma].
- IV. Oppure l'asse della generazione passa per il centro stesso della figura, come se si dovesse far ruotare il semicerchio CDB attorno al diametro fisso CAB; e allora si genera la Sfera o globo perfetto.
- V. O infine, l'asse della generazione taglia la figura da far ruotare entro il centro [ovvero tra il centro e il bordo], come se si dovesse far ruotare il residuo, ossia il segmento minore CDE del cerchio MDN, attorno alla sua sezione CAD: e allora si genera una figura, acuta in due punti opposti, che potresti denominare dalla forma del frutto del Cedro [Citrii mali figura].

occupato dalle linee medesime, essendo congruente ad esso; e poiché quello spazio è racchiuso in confini, pertanto anche la loro grandezza è racchiusa nei medesimi confini, per la qual cosa ad essa può venire fatta un'addizione, o una sottrazione, sebbene ignoriamo il numero di esse; dico che ciò basta affinché siano mutuamente confrontabili, che altrimenti neppure gli spazi stessi delle figure sarebbero confrontabili" (Lombardo Radice, 1966, p. 205).

(Kepler, 1615, c. 37)

Tabella 3

Cinque possibili rotazioni di una circonferenza o di una sua parte e relative figure

- Rotazione attorno ad una retta esterna, parallela all'asse di simmetria. L'asse CB è distante dal centro F della figura ED e non la interseca. Si genera un **anello aperto**, nel quale c'è uno spazio di centro A (Figura I).
- Rotazione attorno ad una retta tangente alla figura e parallela all'asse. L'asse CB tocca la figura FD da ruotare. Si ottiene un **anello chiuso** (Figura II).
- Rotazione attorno ad una retta secante la figura, parallela all'asse. L'asse CB taglia la figura e la divide in due parti diverse:
 - ruotando il segmento circolare maggiore (MDN) si genera un solido a forma di **mela** (Figura III).
 - ruotando il segmento circolare minore (CDB), si genera un solido a forma di **cedro** (Figura V)
- Se l'asse CB passa per il centro, si ruota il semicerchio CDB e si genera la **sfera** (Figura IV).

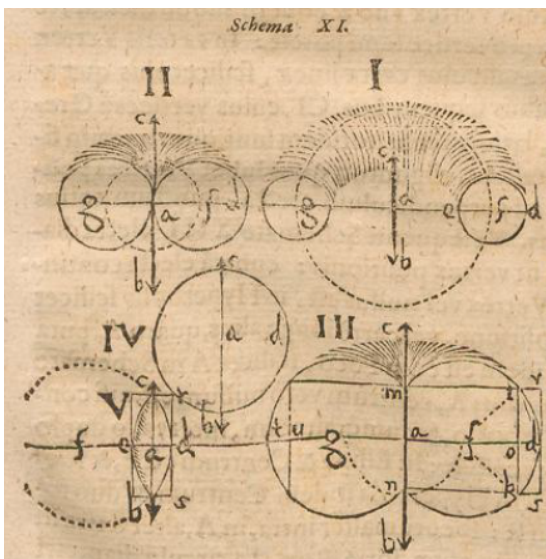


Figura di riferimento per i solidi ottenuti dalla rotazione della circonferenza (Kepler, 1615, c. 37).

Le figure solide ottenute da Kepler possono essere studiate e confrontate con le analoghe descritte da Cavalieri nel libro III della *Geometria degli indivisibili*.¹⁶ Proponiamo al lettore il testo della Proposizione XXXIV, che può essere letta in classe prima di analizzare alcuni dei suoi corollari:

Proposizione XXXIV. Solidi quali si vogliano mutuamente simili, generati dalle figure sopra considerata in questo libro III, rispetto ai riferimenti ivi stesso scelti, delle quali si sia trovato il rapporto di tutti i quadrati, hanno tra di loro un rapporto noto (Lombardo Radice, 1966, p. 385).

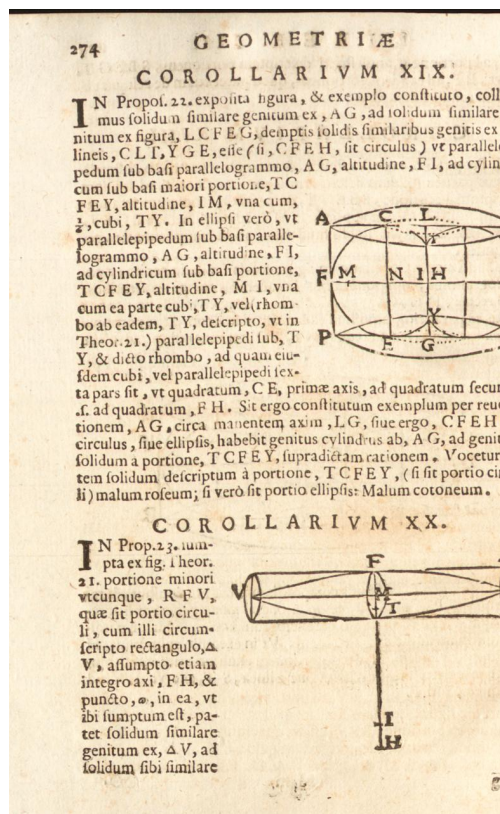
Nei ventinove corollari che seguono la Proposizione XXXIV (Figura 3), Cavalieri propone numerose applicazioni del suo metodo dimostrativo che lui stesso definisce “infinitamente ricco”.¹⁷

¹⁶ Le figure descritte da Kepler si prestano anche per essere visualizzate mediante un software di geometria dinamica come *GeoGebra 3D*. Si veda la risorsa realizzata con *GeoGebra 3D* disponibile al seguente link: <https://www.geogebra.org/classic/br6ddpgu>

¹⁷ [...] *evidentissime apparet hanc demonstrandi methodum, ipsamque demonstrationem,*

Figura 3

Alcuni corollari della proposizione XXXIV tratti da (Cavalieri, 1635, pp. 269 e 274)



Riportiamo a titolo esemplificativo l'enunciato del seguente corollario:

Corollario XIX. Nella prop. XXII, data la figura e costruito l'esempio, abbiamo che un solido simile generato da AG sta ad un solido simile generato dalla figura $LCFEG$, sottratti i solidi simili generati dai trilinei CLT , YGE , come il parallelepipedo avente per base il parallelogramma AG , per altezza FI , sta al solido cilindrico avente per base la porzione maggiore $TCFEY$, per altezza IM , insieme con $1/6$ del cubo di TY : [e ciò] se $CFEH$ è un circolo. [...]. Sia dunque costruito l'esempio per mezzo della rivoluzione di AG attorno all'asse fisso LG ; sia $CFEH$ un circolo, il cilindro generato da AG avrà il rapporto sopra detto al solido generato dalla porzione $TCFEY$. Si chiami frutto di mela il solido descritto dalla porzione $TCFEY$ se essa è una porzione di circolo. (Lombardo Radice, 1966, pp. 403-404)

Seppur con approcci metodologici differenti, sia Kepler che Cavalieri si fanno

infinite (ut ita dicam) locupletem esse (Cavalieri, 1635, p. 257). A proposito di solidi generati dalla rotazione di cerchi, ellissi o sezioni di essi, Cavalieri descrive l'anello circolare o ellittico chiuso o aperto, il frutto di mela, la mela cotogna o il frutto di cedro. Ci riferiamo in questi casi specifici ai corollari XIII, XIV, XIX, XX di (Cavalieri, 1635, pp. 269 e 274). Per la traduzione italiana si rinvia a (Lombardo Radice, 1966).

portavoce dell’eredità di Archimede. Al tempo stesso le loro opere costituiscono due importanti tasselli nel percorso di avvicinamento ai metodi del calcolo infinitesimale, metodi che sarebbero stati sviluppati nella seconda metà del XVII secolo da Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

4.4. Dalla Teoria alla Pratica

A conclusione di questo primo percorso tematico su Kepler proponiamo un semplice esercizio, che prende spunto dalla seconda parte della *Nova stereometria*, quella dedicata alla geometria delle botti da vino: si tratta di formalizzare e risolvere un problema di massimo. L’attività rappresenta una diretta applicazione dello studio dei solidi di rivoluzione e riguarda il problema pratico di determinare la misura della botte da vino, vista come esempio di solido di rivoluzione. Anche in questo caso per introdurre il tema facciamo ricorso alle parole di Kepler:

Vengo ora al mio proposito e introduco varie cose, minimamente toccate da Archimede, sotto il titolo di *Geometria solida della botte austriaca* e le aggiungo al *Supplemento ad Archimede* trattato in precedenza. Queste cose riguardano corpi parallelepipedi inscritti nella stessa sfera e i loro cilindri e coni, ma che sembrano riguardare solo la natura della botte austriaca. Infatti la forma della botte è un cilindro «bulboso» (“ventricosus”) [si veda (Figura 4)], o per meglio dire, la botte è supposta divisa in due cosiddetti tronchi di cono i cui vertici si estendono in direzioni opposte. Si intendono come troncature delimitate da cerchi di legno del barile; la base comune, che determina la separazione dei coni, è il cerchio massimo che attraversa la parte più ampia (“la pancia”) del barile. [...]

Dunque quello che è vero per cilindri e frusti [tronchi] di cono può essere applicato anche alla forma di una botte perché essa differisce di poco da un cilindro e ancora meno da un frusto di cono quando le doghe sono unite insieme, qui supposte essere la linea retta *CRF* e questa linea è alquanto rigonfia verso l’esterno.

Più precisamente la forma di ogni botte è nel mezzo un tronco, o di un cedro dovuto al segmento di un cerchio, o di una prugna dovuta alla parte verticale di un’ellisse o di un fuso parabolico, ma soprattutto iperbolico dopo che i vertici sono stati tagliati frontalmente su entrambi i lati.¹⁸

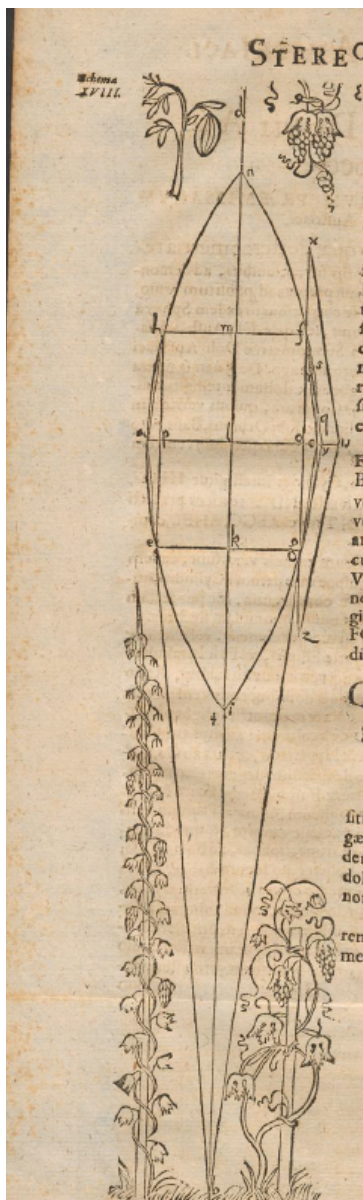
In prima approssimazione Kepler assume che la forma della botte differisca di poco da un cilindro. Il problema è quello della ricerca del barile che, a parità di diagonale, abbia la massima capacità. Considerate le variabili r, l che rappresentano rispettivamente il raggio e l’altezza del cilindro (Figura 4), il volume del cilindro risulta

$$V_{cil} = \pi r^2 l.$$

¹⁸ La traduzione italiana di questo estratto è stata fatta a partire da (Kepler, 1615, cc. 65-66).

Figura 4

Sezione della botte approssimata con quella di un cilindro “bulboso” (Kepler, 1615, c. 66)



Il problema da risolvere è quello di esprimere il volume del cilindro in funzione di μ , la lunghezza misurata dal venditore con l’asta graduata.¹⁹ Gli studenti, guidati dal docente, sono chiamati a formalizzare il problema dal punto di vista

¹⁹ Il venditore misurava il volume della botte inserendo l’asta in diagonale dal foro di cocchiume, posto al centro della pancia, fino al punto più lontano del fondo. Questa misura rappresenta l’ipotenusa μ di un triangolo rettangolo (Figura 5).

matematico. Riportiamo per maggiore chiarezza i passaggi che gli studenti dovrebbero sviluppare per risolvere il quesito richiesto. Per il teorema di Pitagora

$$\mu^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2.$$

Introdotta la variabile ausiliaria

$$s = \frac{l}{d}$$

risulta

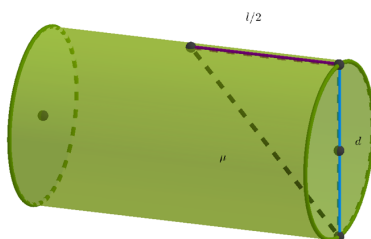
$$\mu^2 = \frac{s^2 d^2}{4} + d^2$$

da cui

$$d = \frac{2\mu}{\sqrt{s^2 + 4}}.$$

Figura 5

Approssimazione della botte con un cilindro



Kepler giunge quindi a determinare il volume V_{cil} in funzione della lunghezza di μ , lunghezza dell'asta graduata,²⁰

$$V_{cil} = 2\pi s\mu^3(s^2 + 4)^{-\frac{3}{2}}.$$

A questo punto si tratta di risolvere un semplice problema di massimo. Si calcola la derivata prima della funzione V_{cil} che risulta

$$V'_{cil} = 2\pi\mu^3 \cdot \frac{(s^2 + 4)^{\frac{1}{2}}(4 - 2s^2)}{(s^2 + 4)^3}.$$

Con semplici passaggi algebrici si trova che la funzione V_{cil} ammette un punto di massimo quando $s = \sqrt{2}$. Andando a sostituire questo valore nell'espressione del volume, si trova infine

²⁰ La formula che è stata ricavata descrive dal punto di vista algebrico il teorema XXVI formulato da Kepler: Nelle botti di forma simile il rapporto delle capacità è il rapporto cubico delle lunghezze che vanno dall'apertura superiore al margine più basso di uno dei fondi di legno (Kepler, 1615, c. 107), ossia $V \propto \mu^3$.

$$V_{cil} = \frac{\pi\mu^3}{3\sqrt{3}}$$

espressione in cui il volume dipende solo da μ .²¹

5. Secondo Approfondimento: La Geometria dei Flocchi di Neve

Lo studio dei flocchi di neve da parte di Kepler può rappresentare, a nostro avviso, un altro spunto interessante per proporre in classe alcune attività laboratoriali – approfittando, ad esempio, di una fredda giornata invernale – che sono articolabili a livello di scuola secondaria sia di primo che di secondo grado. Prima di illustrare alcune implicazioni didattiche, occorre soffermarci brevemente sulle peculiarità del breve trattato *Strena seu de nive sexangula* (1611) che Kepler dedica alla neve. Pur trattandosi di un'opera minore e poco conosciuta, essa racchiude infatti diversi aspetti curiosi e stimolanti anche sotto il profilo didattico. Kepler, che coniuga un'approfondita conoscenza della scienza del suo tempo con un'insaziabile curiosità, resta profondamente colpito dalla forma dei flocchi di neve e si interroga sulla sua causa. A tal proposito, si domanda:

Dato che succede sempre, quando comincia a nevicare, che le prime particelle di neve assumono sempre la forma di piccole stelle a sei punte, ci deve essere una causa particolare; perché, se ciò accadesse per caso, perché mai dovrebbero cadere con sei punte e non con cinque, o sette? (Kepler, 1611, p. 5)²²

Convinto che il mondo sia organizzato secondo precise leggi matematiche, per cercare di svelare il mistero della simmetria esagonale della neve, Kepler elabora un'ipotesi geometrica per descrivere il fenomeno fisico. Indagando il problema con gli strumenti concettuali a sua disposizione, egli, infatti, nel caso dei flocchi di neve ragiona 'come se' essi fossero composti da particelle elementari, cercando di ricavare la loro simmetria esagonale come diretta conseguenza.

Si fa risalire l'idea dello studio della neve da parte di Kepler alla vigilia di Capodanno del 1609 quando, recandosi in visita al suo amico e mecenate

²¹ In seconda approssimazione si può studiare il volume della botte approssimandola con due tronchi di cono uguali, che combaciano lungo la circonferenza maggiore. Anche in questo caso ci si può ricondurre ad un cilindro il cui volume è stato precedentemente espresso in funzione di μ .

²² Le traduzioni in italiano degli estratti della *Strena* qui presentati sono opera delle autrici, a partire dal testo latino (Kepler, 1611) e dalla sua traduzione inglese (Kepler/White, 1996). Come anticipato, occorre tenere presente che una doppia traduzione (latino-inglese-italiano) rischia inevitabilmente di disperdere alcune peculiarità del linguaggio originale dell'autore; tuttavia, tale adattamento si è reso didatticamente necessario poiché gli studenti della scuola secondaria di primo grado spesso non possiedono ancora le competenze per affrontare la lettura in inglese. Per maggiore chiarezza dal punto di vista matematico, i termini "pellet" e "ball" sono stati resi in italiano come "sfera".

Matthäus Wacker von Wackenfels (1550-1619), realizza di non aver con sé alcun dono (o “strenna”, termine che denota appunto un dono consueto nel periodo delle festività). Ma, mentre cammina sul Ponte Carlo di Praga, inizia a nevicare e Kepler è affascinato dalla forma e dalla simmetria della neve che si posa sul suo mantello. Realizza così che alcune riflessioni scientifiche sui fiocchi di neve potrebbero rappresentare il migliore dei doni per von Wackenfels, cui infatti dedicherà l’opera. Per motivare la scelta del tema, Kepler sfrutta la somiglianza fonetica tra i termini *nix* (“neve” in latino) e *nicht* (“niente” in tedesco). Rivolgendosi all’amico, da lui ritenuto un estimatore del “Niente”, dichiara:

In una riflessione così ansiosa, attraversai il ponte, imbarazzato dalla mia scortesia di essermi presentato davanti a te senza un regalo di Capodanno, tranne nella misura in cui insisto incessantemente sullo stesso punto e ripetutamente porto avanti il Niente: infastidito anche dal non trovare ciò che è prossimo al Niente, ma che si presta a essere arguto. Proprio allora, per un felice caso, il vapore acqueo fu condensato dal freddo in neve, e granelli di piuma caddero qua e là sul mio mantello, tutti con sei angoli e raggi piumati. Per la mia parola, qui c’era qualcosa di più piccolo di qualsiasi goccia, ma con un motivo; ecco il regalo di Capodanno ideale per il devoto del Niente, la cosa perfetta da regalare per un matematico, che non ha Niente e non riceve Niente, poiché viene giù dal cielo e sembra una stella. Torniamo al nostro mecenate, finché dura il regalo di Capodanno, per paura che il calore del mio corpo lo sciogla in un niente. E guarda, che presagio nel nome! Che delizia per Wacker, il devoto del Niente! Chiedi a un tedesco cosa significa Nix, e ti risponderà ‘niente’ (se sa il latino). (Kepler, 1611, p. 5)

Questa parte introduttiva della *Strena*, che consigliamo di proporre agli studenti, ha un valore formativo su tre livelli principali. In primo luogo, per quanto riguarda l’immedesimazione: far rivivere l’esperienza di Kepler tramite un approccio narrativo aiuta a comprendere come la curiosità scientifica possa scaturire anche da un’esperienza personale, quasi casualmente, unita a un’osservazione attenta della realtà. Inoltre, l’aspetto linguistico rappresenta un elemento centrale del passo di Kepler: si può allora spostare l’attenzione sul lessico, andando ad analizzare il significato e l’origine del termine “mecenate” – comprendendo così anche il contesto storico del rapporto tra scienziati e benefattori – e a scoprire il gioco di parole *nix-nicht*, che svela l’arguzia di Kepler nel definire il fiocco di neve un dono “prossimo al Niente”, perfetto per il suo amico. Infine, nel suo ragionamento sul Niente, l’astronomo tedesco cita esplicitamente l’atomismo di Epicuro: è, questo, un naturale collegamento interdisciplinare con la filosofia che permette anche di mostrare come il pensiero scientifico del Seicento fosse ancora profondamente legato alle radici della filosofia classica e non fosse un ambito rigidamente separato dalle discipline umanistiche.

Nella prima parte della *Strena*, Kepler indaga la natura dell’agente causale responsabile della forma esagonale dei fiocchi di neve (Kepler, 1611, pp. 6-7, 13-21). Egli si interroga se si tratti di una forza esterna, come il freddo che

avvolge uniformemente le particelle di vapore, oppure di una causa interna, come un calore che si irradia dal centro verso l'esterno. In entrambi i casi, osserva che tale agente deve agire in modo isotropo, ovvero propagandosi uniformemente in ogni direzione. Kepler ipotizza inoltre che la struttura del fiocco di neve possa essere ricondotta a tre diametri che si intersecano in un unico centro, dal quale si origina la forza generatrice. Sebbene consideri un'analogia con le tre direzioni spaziali (alto-basso, destra-sinistra, avanti-dietro) che caratterizzano gli esseri animati, la respinge rapidamente, riconoscendo la natura inanimata del fiocco di neve. Nel corso del trattato, Kepler avanza diverse spiegazioni per la caratteristica simmetria esagonale. Una delle ipotesi principali è che il vapore acqueo, concepito come un aggregato di particelle globulari, si compatti sotto l'azione del freddo. Queste gocce sferiche si aggregerebbero secondo la disposizione più efficiente per occupare uno spazio limitato, dando origine a configurazioni esagonali. Questa disposizione, o 'impacchettamento', rappresenta infatti la soluzione ottimale per massimizzare il numero di entità in un certo spazio definito (Kepler, 1611, pp. 8-10). Formula così quella che oggi è nota come "congettura di Keplero", oggetto di una delle proposte di attività laboratoriale. Un'altra spiegazione è di natura tridimensionale: il fiocco di neve si formerebbe in aria come una struttura a sei punte, disposte come i vertici di un ottaedro, per poi appiattirsi in una figura esagonale una volta depositatosi al suolo. Nell'ultima parte dell'opera, Kepler elenca cinque possibili cause per cui l'esagono è la figura geometrica che caratterizza i fiocchi di neve (Kepler, 1611, p. 22), ricollegandosi ad alcune considerazioni matematiche che aveva anticipato (Kepler, 1611, pp. 11-12). Le prime tre cause sono di natura prettamente matematica e costituiscono ulteriori spunti per il lavoro in classe, come illustreremo nel seguito. Kepler, tuttavia, non è del tutto soddisfatto delle cause individuate e ricorre a un principio di natura mistica: la *facultas formatrix* (Kepler, 1611, pp. 23-24). Egli postula così l'esistenza di una "capacità formativa", una sorta di spirito universale e inanimato che pervade la natura e dà forma alle cose, per spiegare l'ordine e la perfetta simmetria geometrica dei fiocchi di neve. La *Strena* si chiude con alcuni riferimenti ad altre scienze (chimica, metallurgia, ...) e con un'apertura nei confronti del lettore in generale – e di von Wackenfels in particolare – che è invitato, a sua volta, a cercare una valida motivazione della forma esagonale dei fiocchi di neve.

5.1. Spunti Didattici per la Lettura della *Strena* Seu de Nive Sexangula di Kepler

Il trattato sui fiocchi di neve, pur privo di una vera e propria conclusione sulla ragione della loro simmetria esagonale, racchiude diverse riflessioni interessanti sotto il profilo matematico. Kepler, infatti, dà un impulso fortemente innovativo a questo argomento, aprendo anche nuovi orizzonti di indagine. Sotto il profilo didattico può dunque essere significativo proporre questi temi, collegandoli a

un elemento naturale così affascinante come i fiocchi di neve. In particolare, due sono gli spunti della *Strena* che abbiamo preso in considerazione per sviluppare alcune attività laboratoriali:

- *Indagine sulle cause della forma dei fiocchi di neve*, con un'esplorazione delle motivazioni matematiche addotte da Kepler.
- *La congettura di Keplero*. Da Kepler a Maryna Viazovska.

Parte di tali attività è stata sperimentata nell'ambito di un percorso di formazione docenti, altre sono state inserite all'interno di due itinerari didattici proposti a livello di scuola secondaria di primo grado.²³ Obiettivo della prima proposta è esaminare criticamente le cinque ragioni esposte da Kepler circa la simmetria esagonale dei fiocchi di neve, con un focus sugli aspetti matematici introdotti che spaziano dalla tassellazione regolare del piano ai solidi platonici. La seconda attività permette di introdurre in modo storicamente coerente la congettura di Kepler, legata al problema dell'occupazione ottimale dello spazio con le sfere, a partire dall'analisi del testo originale e tramite un'esperienza di tipo manipolativo, ed è volta a mostrare la straordinaria vitalità di questo problema, la cui soluzione in 8 dimensioni è valsa l'attribuzione della Medaglia Fields a Maryna Viazovska (1984-), seconda donna della storia a ottenere questo importantissimo riconoscimento.

Sotto il profilo metodologico, queste proposte si caratterizzano per un'elevata flessibilità progettuale: a discrezione del docente, l'itinerario può essere affrontato nella sua interezza oppure ci si può concentrare esclusivamente su una delle due attività (e persino su un singolo spunto tematico all'interno della prima). Tale modularità rende il percorso facilmente adattabile in termini di impegno orario e declinabile con differenti gradi di profondità e formalismo, risultando così adatto sia per la scuola secondaria di primo grado, sia per quella di secondo grado. L'impianto laboratoriale e culturale della proposta trova inoltre una sua naturale e fruttuosa collocazione all'interno dei percorsi interdisciplinari tipici del Liceo Matematico.²⁴

²³ Il primo itinerario, incentrato su Keplero, ha coinvolto la classe 3[^]L dell'IC "U. Foscolo" di Torino (a.s. 2021/22, prof.ssa D. Favale), portando alla pubblicazione dell'ebook *Giovanni Keplero* (collana "Scienziati nella storia", consultabile su:

<https://sites.google.com/icfoscolo.org/casaeditrice/i-nostri-ebook/scienziati-nella-storia?authuser=0>). Il secondo, sulla geometria della neve, è stato realizzato con la classe 1[^]L della stessa scuola (a.s. 2024/25, proff. D. Favale, E. Sandron) nell'ambito del progetto "Matematica & Realtà" (UniPg); l'elaborato finale, *L'acqua che conta. Ma quanta matematica c'è nell'acqua?*, è disponibile a questo link https://c6a440e2-1a7e-44d9-b965-5974fe310148.filesusr.com/ugd/a216d1_3c066aa9662c4c83b0f617f4bebae85e.pdf (pp. 7-13). A livello di formazione docenti (a.s. 2025/26), il percorso è stato proposto nel laboratorio *L'enigma a sei punte* presso l'Istituto San Lorenzo di Novara (15.10.2025) e nella lezione *Numeri, forme e natura* (8.1.2026) all'interno del corso dell'Accademia delle Scienze di Torino *Il laboratorio di matematica: dalla storia alla classe* (proff. Giacardi, Luciano e Scalambro).

²⁴ Il Liceo Matematico è un progetto nazionale, avviato nel 2015, di collaborazione tra Scuole e Università. Mira a valorizzare la dimensione culturale, storica e interdisciplinare della

Tale impostazione si pone, peraltro, in stretta consonanza con gli obiettivi tracciati dai recenti documenti d'indirizzo ministeriale. Per quanto concerne il primo ciclo, tali attività mirano a scardinare l'errata convinzione che la matematica sia una disciplina "vecchia, arida [...]" e sostanzialmente staccata dalla realtà quotidiana", evidenziando al contrario come la sua storia si intrecci "indissolubilmente con la storia del pensiero umano" (MIM, 2025, p. 66). Attraverso l'analisi della simmetria dei fiocchi di neve, questo percorso valorizza la capacità della disciplina di "svelare la bellezza e l'armonia nascoste nel mondo che ci circonda" e di "stimolare speculazioni e pensare fuori dagli schemi" (MIM, 2025, p. 67). L'approccio adottato invita gli studenti a "concepire modelli, porsi domande, esplorare idee, formulare congetture e giustificare le proprie conclusioni", percependo il valore della matematica anche come "strumento pratico per modellizzare la realtà e interpretare il mondo" (MIM, 2025, p. 67). Analogamente, per il secondo ciclo, le proposte si allineano alla prospettiva che valorizza la matematica "come linguaggio per descrivere e interpretare la realtà" (MIM, 2026, p. 33), con l'obiettivo di condurre lo studente a "riconoscere e apprezzare l'insieme dei valori che caratterizzano la matematica nella sua dimensione culturale e storica" (MIM, 2026, p. 34).

Al fine di agevolare la trasposizione didattica, in Tabella 4 proponiamo una possibile scansione oraria di massima. Le tempistiche e gli approcci possono essere calibrati dall'insegnante in base al grado scolastico e alla risposta della classe.

Tabella 4

Scansione temporale di massima per l'implementazione delle attività in classe

Fase del percorso	Descrizione sintetica dell'attività	Tempistiche e note didattiche
Introduzione	• Presentazione su Kepler e la <i>Strena</i>. • Eventuale lettura e analisi guidata dell'introduzione dell'opera.	• 30 min. • 30 min. (Attività trasversale, con analisi testuale più o meno approfondita a seconda del target).
Indagine sulle cause della forma dei fiocchi di neve	Esplorazione degli aspetti matematici delle motivazioni addotte da Kepler: • I cinque poliedri regolari • La tassellazione del piano • Ricerca di forme naturali a 5 e 6 punte	Esplorazione degli aspetti matematici delle motivazioni addotte da Kepler: • 1 ora • 40 min. • 20 min. (o assegnato come compito per casa).
La congettura di Keplero	Dalla congettura della <i>Strena</i> all'impacchettamento ottimale (con calcoli e validazione geometrica).	2 o 3 ore (+ 1 ora extra opzionale in laboratorio di informatica/CAD, per la scuola secondaria di secondo grado).
Conclusione	Analisi delle conclusioni della <i>Strena</i> e spiegazione moderna della causa della simmetria esagonale dei fiocchi di neve.	1 ora
Sviluppi interdisciplinari	Estensioni del percorso in collaborazione con i docenti delle altre discipline (come arte, scienze, chimica, storia e filosofia).	2-5 ore (monte ore variabile, da concordare in sede di programmazione)

5.2. Indagine sulle Cause della Forma dei Focchi di Neve

Come anticipato, Kepler elenca cinque cause per cui l'esagono caratterizza i fiocchi di neve, la cui lettura rappresenta un ottimo spunto per alcune riflessioni didattiche:

Poi, perché a sei punte? È perché è la prima delle figure regolari a essere essenzialmente piatta, cioè incapace di combinarsi con se stessa per formare un corpo solido? Nel caso di triangolo, quadrato, pentagono, tutti formano corpi. È perché l'esagono ricopre una superficie piana senza lasciare buchi? Ma il triangolo e il quadrato fanno la stessa cosa. O perché l'esagono è quello che si avvicina di più al cerchio tra le figure che ricoprono una superficie piana senza lasciare buchi? O questa è la differenza tra la facoltà di produrre forme sterili, i triangoli e gli esagoni, e la seconda facoltà che costruisce forme fruttuose, i pentagoni? O, infine, la natura di questa facoltà formatrice prende parte all'essere a sei angoli nel più

intimo recesso del suo essere? (Kepler, 1611, p. 22)

In *primis*, Kepler si domanda se la simmetria esagonale dei fiocchi di neve sia dovuta a una sorta di proprietà di ‘piattezza’ di questa figura, legata al fatto che l’esagono è il primo poligono regolare a non essere faccia di un poliedro regolare (o solido platonico). Ricordiamo che un poliedro, per essere regolare, deve soddisfare alcune condizioni: le sue facce sono dei poligoni regolari e sono tutte congruenti tra loro; i suoi diedri (ovvero gli angoli che si formano tra due facce adiacenti) sono uguali, così come i suoi angoloidi (le parti di spazio comprese tra gli angoli delle facce del poliedro che hanno un vertice in comune). Da queste caratteristiche discende il fatto che un poliedro regolare deve essere convesso e la somma degli angoli delle facce che concorrono in uno qualsiasi dei suoi vertici è minore di 360° . Già ai tempi dell’antica Grecia, era stato osservato che, a differenza dei poligoni regolari che sono infiniti, i poliedri regolari sono solo cinque: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro. La dimostrazione rigorosa di questo fatto si trova nell’ultima proposizione (prop. 18) del libro XIII degli *Elementi* di Euclide, rappresentando il punto di arrivo della trattazione geometrica dell’opera.²⁵ In ambito didattico, specialmente a livello liceale, lo studio di questi solidi offre inoltre un eccellente spunto per collegamenti interdisciplinari con la filosofia, in particolare attraverso la visione cosmologica proposta da Platone nel *Timeo* (360 a.C. circa).²⁶

Sotto il profilo didattico, la prima delle questioni sollevate da Kepler può quindi essere utilizzata per introdurre in classe l’argomento dei solidi platonici, qualora gli studenti non li conoscessero, oppure come spunto per giungere alla dimostrazione del fatto che sono soltanto cinque. Opportunamente guidati dal docente in un momento di discussione collettiva oppure utilizzando una scheda predisposta per il lavoro collaborativo a gruppi, si potrà comprendere la ragione

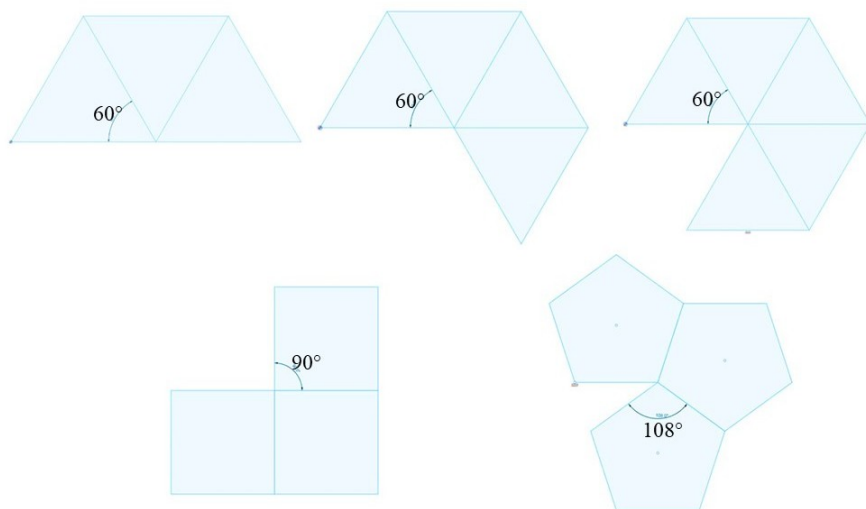
²⁵ Nel tredicesimo e ultimo libro degli *Elementi*, editi in (Frajese & Maccioni, 1970), Euclide si propone di inscrivere ciascun poliedro regolare in una sfera di dato diametro e di determinare il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto e il diametro della sfera circoscritta. In tal modo, le misure degli spigoli dei cinque poliedri regolari vengono espresse mediante uno stesso parametro e rese quindi confrontabili. Dopo averli costruiti, Euclide conclude la trattazione dimostrando che non vi possono essere ulteriori poliedri regolari oltre a quelli già noti. Sfruttando alcune proprietà riguardanti gli angoli solidi convessi (*Elementi*, Libro XI, prop. 20 e 21), egli giunge alla seguente proposizione: “Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette, non può costruirsi nessun’altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali” (*Elementi*, Libro XIII, Prop. 18).

²⁶ Nel *Timeo*, edito in (Ferrari & Petrucci, 2022), Platone riprende la tesi sostenuta da Empedocle secondo cui il mondo trae origine da quattro elementi fondamentali, associando a essi quattro dei cinque poliedri regolari. Precisamente: al fuoco è associato il tetraedro, alla terra il cubo, all’aria l’ottaedro e all’acqua l’icosaedro. Al dodecaedro, che restava senza un elemento fisico corrispondente, Platone attribuisce un ruolo di natura cosmica, descrivendolo come la forma usata dal demiurgo per decorare e racchiudere l’universo (elemento che in seguito verrà spesso associato alla “quintessenza”).

geometrica per cui non esiste un poliedro regolare a facce esagonali, ragionando sull'ampiezza degli angoli delle facce. Per semplicità, si considerino solo le facce che stanno attorno ad un vertice e si immagini di effettuare un taglio lungo uno spigolo del poliedro, in modo da poterle stendere su un piano (Figura 6). Si può chiudere il poliedro solo se la somma degli angoli delle facce che stanno attorno al vertice è minore di 360° e, siccome attorno a un vertice vi sono almeno tre poligoni, questi devono avere angoli interni minori di un terzo di 360° , cioè di 120° . I poligoni regolari con angoli minori di 120° sono tre: il triangolo, il quadrato e il pentagono. Gli angoli dell'esagono regolare misurano 120° , dunque tre esagoni 'riempiono' tutto lo spazio attorno a un vertice e il poliedro non si può chiudere. Prendiamo in esame i poliedri con facce quadrate o pentagonali: intorno a un vertice vi possono essere solo tre facce, perché quattro quadrati 'riempiono' tutto lo spazio attorno al vertice ($4 \times 90^\circ = 360^\circ$) e quattro pentagoni regolari, aventi angoli interni di 108° , superano i 360° ($4 \times 108^\circ = 432^\circ$). Di conseguenza, i poliedri regolari corrispondenti sono due: il cubo e il dodecaedro, che hanno rispettivamente 6 facce quadrate e 12 facce pentagonali. Consideriamo infine i poliedri con facce triangolari. Intorno a un vertice ci possono essere tre, quattro o cinque facce, ma non sei perché 'riempirebbero' tutto lo spazio disponibile ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$). Quindi i poliedri regolari a facce triangolari sono tre: il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro, aventi rispettivamente 4, 8, 20 facce.

Figura 6

Sviluppo piano delle facce dei solidi platonici che convergono in un vertice



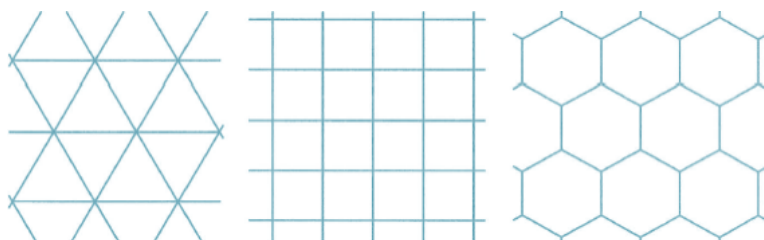
In secondo luogo, Kepler osserva che l'esagono "giace su una superficie piana senza lasciare un buco" (Kepler, 1611, p. 22). Ciò corrisponde, dal punto di vista matematico, alla proprietà di tassellazione del piano. Una tassellazione

piana regolare è infatti un ricoprimento del piano ottenuto con figure congruenti, ripetute all'infinito, senza sovrapposizioni.²⁷ Kepler aveva fatto riferimento a questa questione già all'inizio della *Strena* (Kepler, 1611, pp. 6-7), rifacendosi alla forma esagonale delle celle delle api.²⁸

È quindi consigliato proporre un'attività di scoperta delle tassellazioni piane regolari attraverso un approccio di tipo laboratoriale e manipolativo. Inizialmente, gli studenti tentano concretamente di tassellare il piano utilizzando poligoni regolari congruenti di cartoncino (triangoli, quadrati, pentagoni ed esagoni), osservando empiricamente quali figure permettono tale operazione e quali no. Successivamente, si propone una riflessione sulle cause geometriche di questo fenomeno, suggerendo di focalizzarsi sulla condizione necessaria che la somma degli angoli interni attorno a un vertice sia 360° . L'attività si può allora concludere con la richiesta di motivare perché solo il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare possono generare tassellazioni piane regolari (Figura 7), analizzando anche il caso dei poligoni con più di sei lati. Richiamando la terza causa di Kepler, si può far riflettere gli studenti sul fatto che, tra queste figure, l'esagono è quella che meglio approssima il cerchio, soffermandosi su come quest'ultimo possa essere concepito come un poligono di infiniti lati.

Figura 7

Le uniche possibili tassellazioni piane regolari



Infine, Kepler sostiene che la simmetria esagonale è tipica del mondo inanimato mentre quella pentagonale caratterizza il mondo dei viventi, vegetali e animali. Questa osservazione costituisce uno spunto interessante per andare alla ricerca di forme geometriche in natura (Bartocci, 2004) ma anche per lavorare, in un certo senso, sui ‘controesempi’, individuando forme viventi caratterizzate da una geometria esagonale, come accade ad esempio per alcuni fiori che presentano una simmetria esagonale. Questo aspetto, tra l'altro, può rappresentare un interessante collegamento interdisciplinare con le scienze della

²⁷ Questo concetto corrisponde all'idea intuitiva di pavimentazione con piastrelle identiche tra loro, cioè un ricoprimento di un piano mediante figure piane congruenti che né lascino spazi vuoti né si sovrappongano.

²⁸ “Una superficie piana può essere ricoperta senza spazi vuoti da sole tre forme: il triangolo, il quadrato, l'esagono. Di queste, l'esagono è la più spaziosa, ed è [proprio] per [avere] spazio per conservare il miele che le api se ne provvedono” (Kepler, 1611, p. 11).

natura, permettendo di introdurre una distinzione numerica utilizzata in botanica per facilitare la classificazione delle piante: infatti i fiori a cinque petali sono più frequenti nelle piante eudicotiledoni, mentre quelli a sei petali si trovano più spesso nelle piante monocotiledoni.

Le cause individuate nella *Strena* sono in realtà errate e lo stesso Kepler, con una notevole onestà intellettuale, mette in luce possibili confutazioni. Le motivazioni di natura geometrica possono essere facilmente confutate, in quanto i fiocchi di neve sono di dimensioni differenti. Questo suggerisce che non esiste una sola superficie piatta di vapore che condensa simultaneamente in tutti i fiocchi di neve, ma che ci sono tanti strati di vapore che agiscono separatamente, in tempi diversi. Anche il problema di tassellare il piano non può quindi essere preso in considerazione, in quanto risulterebbe applicabile solo nel caso di esagoni congruenti, ma così non è. Anche la causa di natura biologica va ritrattata, poiché esistono casi di simmetria esagonale anche nel mondo vivente: basti pensare al giglio, un fiore a sei petali “fruttuoso”, cioè non sterile. Come esempio di forme naturali inanimate, Kepler aveva addotto il caso delle forme dei cristalli, provenienti dalle miniere. Tuttavia, come egli stesso riconosce, i minerali si presentano in natura in un’infinità di forme.

Questo episodio di ‘mancata’ comprensione delle cause della simmetria esagonale ha un duplice valore: da un lato, è significativo dal punto di vista didattico perché fa riflettere sul ruolo dell’errore nelle scoperte scientifiche, mostrando che anche grandi scienziati, come Kepler, hanno sbagliato; dall’altro getta un ponte con la chimica, la fisica e le scienze naturali. La vera causa della forma dei fiocchi di neve risiede nella struttura atomica della materia, all’epoca di Kepler del tutto sconosciuta.²⁹ Sono stati necessari oltre 300 anni per scoprire che la simmetria esagonale della neve è una manifestazione macroscopica della disposizione molecolare interna. Soltanto l’avvento della cristallografia a raggi X ha permesso di accertare che le molecole d’acqua, nel formare la fase solida, si organizzano in un reticolo cristallino di forma esagonale. L’origine della forma esagonale dei fiocchi di neve è quindi intrinsecamente legata alla formula chimica della molecola dell’acqua H_2O e alla sua particolare natura. Per incuriosire gli studenti e per dar loro una prospettiva sugli studi più recenti sui fiocchi di neve, suggeriamo di mostrare il diagramma di Nakaya, frutto delle ricerche condotte negli anni Trenta all’Università di Hokkaido, che mette in relazione la forma dei fiocchi di neve con le condizioni ambientali in cui essi si

²⁹ Sebbene la moderna struttura chimico-fisica della materia fosse del tutto ignorata nel Seicento, il concetto speculativo di atomo era ben noto fin dall’antichità grazie alla dottrina atomistica di Leucippo e Democrito, in seguito ripresa da Epicuro. Lo stesso Kepler dimostra di avere ben presente questa tradizione filosofica: proprio nelle pagine introduttive della *Strena*, infatti, vi fa un esplicito riferimento, scrivendo: “Qualunque sia l’oggetto che vi aggradi come evocazione del Niente, bisogna che esso sia di tenue importanza, di piccola misura, di prezzo minimo, e che non sia granché durevole, cioè che sia quasi Niente. Nella natura, queste cose abbondano e una scelta si impone. Forse penserai a uno degli atomi di Epicuro: ma quello è semplicemente Niente” (Kepler, 1611, p. 2).

formano, in particolare temperatura e umidità dell'aria (Nakaya, 1954; Libbrecht, 2005).³⁰

5.3. La Congettura di Keplero

La celebre congettura di Keplero rappresenta il fulcro della seconda proposta di attività ispirata alla *Strena*. Mentre la congettura è, di per sé, ben nota – anche in virtù della sua straordinaria vitalità nel corso dei secoli – pochi sono a conoscenza del fatto che essa viene introdotta proprio in relazione allo studio dei fiocchi di neve, motivo per cui suggeriamo di introdurla in classe attraverso la lettura di alcuni passi originali che verranno presentati nel seguito,³¹ eventualmente preceduta da un'introduzione al problema dell'impacchettamento ottimale da parte del docente.

Kepler, infatti, anticipa la teoria del *close packing* ponendosi il problema di quale sia la disposizione delle sfere che garantisce un'occupazione ottimale dello spazio (Ball, 2011). Egli concepisce le gocce d'acqua come piccole sfere che, nel formare i fiocchi di neve, si 'impacchettano' il più strettamente possibile, dando origine a strutture esagonali. Questo tipo di configurazione rappresenta la disposizione ideale per agglomerare il maggior numero di entità sferiche in uno spazio limitato, proprio come accade per la disposizione della frutta in una cassetta al mercato, in cui ogni frutto è disposto in modo da occupare il minor spazio possibile. Nello specifico, Kepler congettura che la disposizione ottimale di "palline uguali, raccolte in un qualsiasi recipiente" (Kepler, 1611, p. 8) sia quella in cui ogni sfera è tangente ad altre 12, in una struttura che modernamente è nota come 'reticolo cubico a facce centrate'. Per giungere a questa conclusione, egli parte dall'analizzare cosa accade con un singolo strato di sfere:

Se sfere identiche sono libere nello stesso piano orizzontale e le si spinge insieme così strettamente che si toccano, esse si dispongono o secondo una disposizione triangolare o in una quadrangolare. Nel primo caso sei sfere ne circondano una; nel secondo quattro. In ogni caso c'è lo stesso numero di contatti tra tutte le sfere, eccetto che per quelle più esterne. Con una disposizione a cinque lati, non si può mantenere l'uniformità. Una disposizione a sei lati si trasforma in una a tre lati. Dunque, vi sono solo le due configurazioni descritte. (Kepler, 1611, p. 9)

Kepler individua, quindi, due possibilità: la configurazione quadrata (A) e quella

³⁰ Il diagramma di Nakaya illustra lo sviluppo dei cristalli di neve in funzione di temperatura e sovrasaturazione. In sintesi, la temperatura determina la geometria principale del cristallo (passando da lamine a colonne a seconda della temperatura), mentre la sovrasaturazione incide sui dettagli: più l'aria è satura di vapore, più le architetture risultano complesse e ramificate.

³¹ I brani di cui si suggerisce la lettura coincidono con gli estratti della *Strena* analizzati e discussi in questi paragrafi. Si segnala inoltre che tali testi, presentati nella loro interezza e corredati sia dall'originale latino sia dalla traduzione inglese, sono stati strutturati in apposite schede di lavoro, liberamente consultabili e scaricabili al seguente link: <https://dmi.unife.it/it/terza-missione/mathesis/liceo-matematico-1/materiali-seminario-nazionale-licei-matematici-2024>

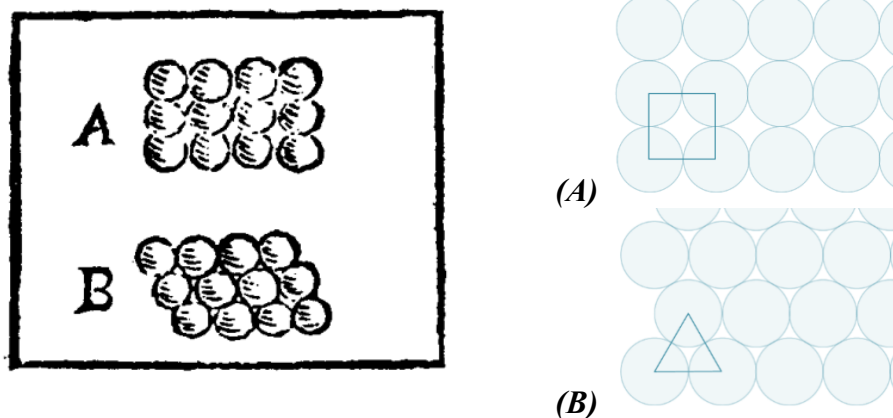
triangolare (B) che, come sottolinea, è equivalente a quella esagonale. Seguendo questa impostazione, anche in classe è consigliabile partire dal caso del singolo strato di palline per far lavorare gli studenti sulla densità delle sfere nello spazio nelle due configurazioni, che suggeriamo di far costruire concretamente utilizzando, ad esempio, delle palline di gomma piuma o da ping-pong.

Con l'ausilio della rappresentazione grafica in (Figura 8) si possono invitare gli studenti a discutere la densità dei due impacchettamenti in oggetto, supponendo per semplicità di porsi nel caso bidimensionale, ovvero quello di cerchi in un piano. Già a un primo sguardo, la configurazione (B) sembra più densa della (A). La validità di questa intuizione visiva può essere verificata mediante il calcolo della densità ρ_2 dei due impacchettamenti, data dal rapporto tra l'area delle porzioni circolari e l'area della figura piana considerata³²: il quadrato per (A), il triangolo equilatero per (B).

Nel caso (A) l'area delle porzioni circolari è pari a quella di un cerchio di raggio r , per cui a numeratore si ha πr^2 ; il quadrato che consideriamo ha lato $2r$, dunque area $4r^2$.

Figura 8

Le configurazioni quadrata e triangolare nel testo originale (Kepler, 1611, p. 9) e in versione moderna



Di conseguenza, la densità della configurazione quadrata bidimensionale è

$$\rho_2 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854 \dots$$

Nella configurazione (B) l'area delle porzioni circolari è quella di tre settori circolari di ampiezza 60° , che corrisponde a un semicerchio di raggio r . L'area occupata è quindi $\frac{\pi r^2}{2}$. Il triangolo equilatero che consideriamo ha lato $2r$,

³² In generale, denotiamo con ρ_n la densità dell'impacchettamento n -dimensionale regolare, data dal rapporto tra il volume occupato dalle porzioni sferiche n -dimensionali e il volume totale della porzione di spazio che si considera.

dunque la sua altezza è pari a $r\sqrt{3}$. Di conseguenza, l'area del triangolo è $r^2\sqrt{3}$, da cui deriva la seguente densità per la configurazione triangolare bidimensionale

$$\rho_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069 \dots$$

Ciò conferma l'impressione visiva che l'impacchettamento (B) è più denso di (A). Tuttavia, anche dal punto di vista didattico, è importante rimarcare che ciò non implica che la seconda configurazione sia, in assoluto, quella ottimale. Il fatto che ogni altro impacchettamento periodico bidimensionale è meno denso di (B) è stato dimostrato dal matematico norvegese Axel Thue (1863-1922) a fine Ottocento.³³ Egli infatti ha mostrato che, dividendo il piano in regioni locali, in tutte le regioni la densità è minore o uguale a $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Per passare al caso tridimensionale, Kepler ragiona 'impilando' gli strati di palline delle due configurazioni introdotte, notando che tale operazione può essere fatta in due modi diversi, a seconda che i centri delle sfere di strati sovrapposti siano o meno allineati verticalmente. Con abuso di linguaggio, per facilitare la visualizzazione intuitiva, indicheremo con "impilamento semplice" la prima situazione e con "impilamento sfalsato" la seconda. Kepler individua così quattro casi, sintetizzati in Tabella 5, prendendo in considerazione, per ciascuno di essi, sia il numero di sfere tangenti a una sfera qualsiasi sia la forma solida che tali configurazioni assumerebbero se sottoposte a pressione. Si ritiene opportuno riportare per intero la descrizione di Kepler di queste quattro possibilità, integrata da alcune nostre aggiunte in corsivo e tra parentesi quadre, utili nel seguito.

Ora, se si procede a impacchettare i corpi solidi nel modo più stretto possibile e si sovrappongono le file che sono disposte sul primo livello, strato su strato, le sfere risulteranno disposte o secondo quadrati (A nel diagramma), o secondo triangoli (B nel diagramma). Nel caso della disposizione quadrata, o ogni singola sfera dello strato superiore poggia su una singola sfera di quello inferiore, oppure ogni singola sfera dello strato superiore si assesta tra quattro sfere di quello inferiore. Nel primo modo [*impilamento cubico semplice, che denoteremo con (α)*], ogni sfera è toccata da quattro vicine sullo stesso piano, da una dello [strato] superiore e da una di quello inferiore, e così via, ognuna è toccata in totale da sei altre sfere. La disposizione sarà cubica e le sfere, se soggette a pressione, diventeranno cubi. Ma questo non sarà l'impacchettamento più compatto. Nel secondo modo [*impilamento cubico a facce centrate, (β)*], ogni sfera non è solo toccata dalle sue quattro vicine dello stesso strato, ma anche da quattro dello strato superiore e da quattro di quello inferiore, cosicché ognuna sarà toccata da dodici [sfere]. Sotto pressione, le sfere diventeranno romboidi.³⁴ Questa disposizione sarà più simile

³³ Una traccia di tale dimostrazione in italiano è reperibile al link:

<https://blog.kleinproject.org/?p=1943&lang=it>

³⁴ L'espressione "soggette a pressione" esula dai concetti di equilibrio stabile o instabile. Kepler si riferisce più intuitivamente a un fenomeno macroscopico: comprimendo sfere leggermente

all’ottaedro e alla piramide. L’impacchettamento sarà il più compatto possibile, tale che in nessun’altra disposizione si potrebbero stipare più sfere nello stesso contenitore. Ancora, se la disposizione delle palline di un livello fosse triangolare, nell’impacchettamento solido o ogni sfera dello strato superiore poggia su una [sfera] di quello inferiore, caso in cui l’impacchettamento è di nuovo lasco; oppure ogni sfera dello strato superiore si assesterà tra tre [sfere] di quello inferiore. Nel primo caso [*impilamento triangolare semplice*, (γ)], ogni sfera è toccata da sei vicine dello stesso strato, da una sopra e da una sotto il suo livello, e quindi in tutto da altre otto. La struttura sarà assimilabile a un prisma e, e, quando viene applicata pressione, al posto delle sfere, si formeranno delle colonne con sei lati quadrangolari e due basi esagonali. Nel secondo caso [*impilamento piramidale*, (δ)], si avrà lo stesso risultato di prima, [quello ottenuto] nella seconda modalità della disposizione quadrata [...] Di nuovo, come prima, una sfera sarà toccata da altre dodici, cioè da sei vicine dello stesso strato, da tre sopra e da tre sotto. (Kepler, 1611, pp. 9-10)

Si può far sperimentare agli studenti cosa accade nelle varie configurazioni, utilizzando delle palline morbide (ad esempio in gommapiuma, facilmente reperibili a costi ridotti).

Tabella 5
Le quattro possibili configurazioni che si ottengono dall’impilamento di strati di sfere

	Tipo di strati	Tipo di impilamento	Numero di sfere tangenti a una sfera	Configurazione solida
(α)	Configurazione (A)	Semplice	6 (4 dello stesso strato, 1 dello strato superiore e 1 dello strato inferiore)	Cubo
(β)	Configurazione (A)	Sfalsato	12 (4 dello stesso strato, 4 dello strato superiore e 4 dello strato inferiore)	Piramide
(γ)	Configurazione (B)	Semplice	8 (6 dello stesso strato, 1 dello strato superiore e 1 dello strato inferiore)	Prisma a base esagonale
(δ)	Configurazione (B)	Sfalsato	12 (6 dello stesso strato, 3 dello strato superiore e 3 dello strato inferiore)	Piramide

In particolare, si consiglia un’attività laboratoriale guidata dal docente o da svolgere in piccoli gruppi (a seconda del materiale a disposizione) per far realizzare il modello tridimensionale di (δ), utilizzando 20 palline (per una piramide di 4 strati) o 35 palline (per una di 5 strati), seguendo la disposizione suggerita da Kepler, con l’ausilio dell’illustrazione da lui proposta (Figura 9):

deformabili in un contenitore per minimizzare gli spazi vuoti, queste si ‘schiacciano’ sfaccettandosi e assumendo la forma di poliedri ‘romboidali’ che meglio saturano lo spazio.

sia B un gruppo di tre palline; su di esso sia posta una, A, come vertice; supponiamo anche un altro gruppo, C, di sei palline; un altro, D, di dieci; e un altro, E, di quindici. Si sovrapponga regolarmente lo strato più stretto a quello più largo per ottenere la forma di una piramide. (Kepler, 1611, p. 10)

Si può allora introdurre la celebre congettura sull'impacchettamento ottimale delle sfere nello spazio, che si verifica nei casi (β) e (δ), ovvero con un impilamento sfalsato di strati a configurazione quadrata o triangolare, situazioni nelle quali si ottiene, in realtà, la medesima configurazione tridimensionale, come rilevato da Kepler. Riferendosi a (δ), nota infatti che

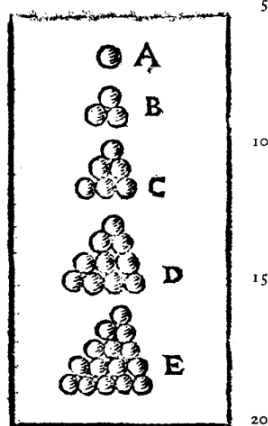
sebbene in questa costruzione ogni sfera di uno strato superiore sia posta tra tre di quelle inferiori, se si gira la figura in modo che non sia il vertice ma un intero lato della piramide ad essere in alto, si troveranno, ogni volta che si toglie una sfera dalla cima, quattro che giacciono sotto di essa in una disposizione quadrata. Di nuovo, come prima, una sfera sarà toccata da altre dodici, cioè da sei vicine sullo stesso piano, da tre sopra e da tre sotto. Così, nell'impacchettamento più compatto in tre dimensioni, la disposizione triangolare non può esistere senza quella quadrata, e viceversa. (Kepler, 1611, p. 10)

L'osservazione di Kepler sulla coesistenza degli impacchettamenti triangolare e quadrato è interessante: collega questa struttura al reticolo cubico a facce centrate, fatto che non è immediatamente evidente. Per visualizzare questa equivalenza, occorre comprendere che gli strati (piani di impilamento) sono solo diversi modi di 'affettare' la medesima struttura tridimensionale.

Figura 9

Estratto da (Kepler, 1611, p. 10) in cui è illustrata la costruzione dell'impilamento (δ)

quadrilateris. Esto enim B copula trium globorum. Ei superpone A unum pro apice; esto et alia copula senum globorum C, et alia denum D et alia quindenum E. Impone semper angustiores lateri, ut fiat figura pyramidis. Elsi igitur per hanc impositionem singuli superiores sederunt inter trinos inferiores: tamen iam versa figura, ut non apex sed integrum latus pyramidis sit loco superiori, quoties unum globulum degluberis e summis, infra stabunt quattuor ordine quadrato. Et rursum tangetur unus globus ut prius, a duodecim aliis, a sex nempe circumstantibus in eodem plano tribus supra et tribus infra. Ita in solida coaptatione arcissima non potest esse ordo triangularis sine quadrangulari, nec vicissim. Patet igitur, acinos punici mali, materiali necessitate concurrente cum rationibus incrementi acinorum, exprimi in figuram rhombici corporis: cum non infestis frontibus pertinaciter nitantur rotundi ex adverso acini, sed cedant expulsi, in spatia inter ternos vel quaternos oppositos interiecta.



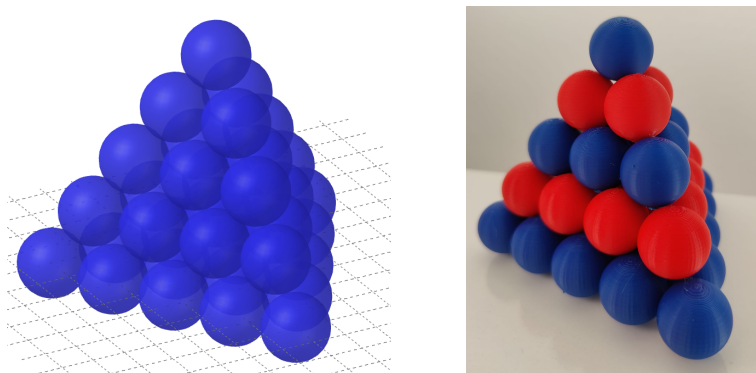
Causa
figurae in
acinis mali
punici.

Come nota Kepler, se si ruota la configurazione piramidale (δ), costruita su strati triangolari, emergono nuovi piani (inclinati rispetto ai primi) che rivelano una disposizione quadrata.

In alternativa o ad integrazione dell'attività manipolativa, l'esplorazione di queste configurazioni può essere supportata dall'uso di software di geometria dinamica (come *GeoGebra 3D*³⁵) o di simulatori online di *sphere packing*,³⁶ che permettono agli studenti di visualizzare e ruotare interattivamente le disposizioni spaziali. Per alcuni indirizzi di istituto tecnico o professionale e per le classi abituate a lavorare con programmi di modellazione, l'attività si presta a un interessante sviluppo interdisciplinare con il docente di disegno tecnico/CAD. Gli studenti possono progettare la disposizione delle sfere (utilizzando software come *Fusion 360*) e procedere alla stampa 3D dei singoli strati di sfere tangenti.³⁷ Questo approccio permette di 'toccare con mano' la congettura di Kepler, assemblando fisicamente i piani prodotti e verificando come la medesima struttura possa essere 'affettata' in modi diversi (Figura 10).

Figura 10

Confronto tra la visualizzazione in *GeoGebra 3D* (a sinistra) e la realizzazione tangibile tramite stampa 3D (a destra) dell'impilamento (δ) descritto da Kepler



³⁵ Per una visualizzazione immediata o come base per un'attività di costruzione digitale, si veda la risorsa realizzata con *GeoGebra 3D* disponibile al seguente link: <https://www.geogebra.org/3d/fcvnk5bk>.

³⁶ Tra le risorse online gratuite che permettono di esplorare interattivamente le disposizioni cubiche ed esagonali discusse da Kepler, si segnalano il portale didattico *Crystals@Otterbein* (<https://crystals.symotter.org/viztools>); il *Wolfram Demonstrations Project* (scheda "Sphere Packing"); il visualizzatore di reticoli cristallini di Jakob Holz (http://www.jakobholz.com/post/crystal_lattice/); e le simulazioni basate su librerie *Three.js* dedicate alla resa dei reticoli compatti.

³⁷ Il docente può fornire i file già pronti per la stampa (gestibili tramite i comuni programmi *slicer* ormai diffusi in molte scuole) o guidare gli studenti nella modellazione dei piani. I modelli STL per la stampa 3D degli strati piramidali di Kepler sono disponibili in *open access* al seguente link:

<https://makerworld.com/it/models/2629005-kepler-s-sphere-pyramid-stem#profileId-2902739>.

Kepler conclude questa parte della *Strena* facendo riferimento, ancora una volta, alla natura. Cita la disposizione dei chicchi all'interno della melagrana in questi termini:

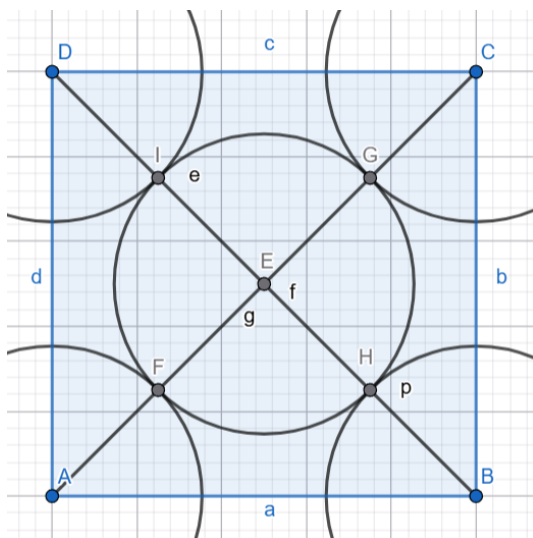
È quindi ovvio che i loculi della melograna sono compressi nella forma di un solido romboidale: le esigenze della loro materia coincidono con le proporzioni della loro crescita. I loculi globulari opposti non persistono nel premere faccia a faccia, ma si spostano e scivolano nei vuoti lasciati tra tre o quattro altri nel piano opposto. (Kepler, 1611, p. 10)

Analogamente a quanto fatto per il singolo strato di sfere, si può proporre agli studenti di esaminare la geometria dell'impacchettamento ottimale nello spazio tridimensionale, andando a calcolare la densità delle sfere nel caso individuato da Kepler come quello di densità maggiore, ovvero il reticolo cubico a facce centrate. Per farlo, si immagini di tassellare lo spazio con celle cubiche di spigolo a . In ogni cubo si ha una sfera centrata in ciascuno degli otto vertici e un'ulteriore sfera con il centro coincidente con il centro di ciascuna delle sei facce.

Affinché il raggio sia massimo e non generi intersezioni tra sfere, esso deve essere pari a $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, come si può dimostrare abbastanza semplicemente utilizzando la (Figura 11). A questo punto, è possibile calcolare la densità ρ_3 – anche detta “fattore di compattazione” – del reticolo cubico a facce centrate come il rapporto tra il volume occupato dalle porzioni di sfere all'interno della cella e il volume totale della cella cubica.

Figura 11

Sezione di una faccia della cella cubica a facce centrate, che illustra le 4 sfere ai vertici e la sfera al centro



Per prima cosa, determiniamo il volume totale occupato dalle sfere. Questo volume è dato dalla somma dei contributi provenienti da due diverse posizioni. La cella cubica ha otto vertici, ma poiché ogni sfera al vertice è condivisa da otto cubi adiacenti, solo $\frac{1}{8}$ di essa si trova all'interno del cubo, contribuendo per un totale di una sfera equivalente. A questo si aggiunge il contributo delle sei facce: la sfera al centro di ogni faccia è divisa a metà con la cella adiacente, portando a un totale di tre sfere equivalenti. In totale, il volume contenuto nel cubo è pari a quello di 4 sfere complete. Dato che il volume di una singola sfera è $\frac{4}{3}\pi r^3$, il volume totale delle porzioni sferiche è $V_s = \frac{16}{3}\pi r^3$. Successivamente, calcoliamo il volume del cubo in funzione del raggio r delle sfere. Dalla relazione geometrica $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, si può ricavare lo spigolo $a = 2\sqrt{2}r$. Il volume del cubo è quindi $V_c = a^3 = 16\sqrt{2}r^3$. Calcoliamo infine la densità come rapporto tra i due volumi

$$\rho_3 = \frac{V_s}{V_c} = \frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{16\sqrt{2}r^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0.7405 \dots$$

Questo risultato, circa il 74,05%, rappresenta la densità dell'occupazione ottimale dello spazio congetturata da Kepler.

Il calcolo di ρ_3 non è complesso, basta conoscere le formule per il calcolo dei volumi nella geometria tridimensionale. Naturalmente ciò non è sufficiente per dimostrare che questa sia davvero la massima densità possibile.

Anche dal punto di vista educativo, è importante sottolineare che la congettura di Kepler è rimasta irrisolta per oltre tre secoli (Szpiro, 2003). Fu inclusa da David Hilbert (1862-1943) nella sua lista di problemi, presentata nel 1900 al Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi. La dimostrazione è arrivata solo nel 1998, grazie al matematico statunitense Thomas C. Hales (1958-) che riuscì a combinare complesse considerazioni matematiche e calcoli computerizzati (Hales, 2000). Si tratta di una *computer-assisted proof*, con oltre 5000 casi da analizzare, per un totale di 3 Gigabyte di codice. La verifica da parte di una commissione di *referee* è stata un processo estremamente lungo e complesso, a causa della difficoltà nel controllare la correttezza di tutto il codice informatico, e si è conclusa solo nel 2003 con la dichiarazione di una certezza al 99% della correttezza della dimostrazione. Una versione ridotta è stata pubblicata due anni più tardi sugli *Annals of Mathematics* e consiste nella decomposizione dello spazio in un numero finito di regioni per calcolare la densità in ciascuna (Hales, 2005). Hales aveva osservato che attorno a una sfera si possono posizionare al massimo 12 sfere tangenti ma resta comunque dello spazio libero. Ha poi mostrato che non è possibile collocare una tredicesima sfera tangente e che, a differenza del caso bidimensionale, esistono diversi modi non equivalenti per disporre le 12 sfere. La comunità matematica ha avviato un lungo processo di validazione che ha portato solo nel 2014 alla verifica formale

e computazionale completa, frutto del progetto di ricerca *FlysPecK* (in cui le lettere *F*, *P* e *K* sono le iniziali delle parole che compongono la frase *Formal Proof of Kepler*).

La questione dell'impacchettamento sferico ottimale, avviata da Kepler a inizio del Seicento, ha goduto di una longevità sorprendente, arrivando non solo a Hales ma anche alla Medaglia Fields del 2022, attribuita a Maryna Viazovska. La matematica ucraina ha infatti risolto il problema dello *sphere packing* nello spazio a 8 dimensioni (Gariboldi, 2023), dove l'impacchettamento ottimale è detto E8. Non è ancora noto, invece, cosa accade in dimensione 4, 5, 6 e 7, anche se si suppone che al crescere delle dimensioni diminuisca la densità dell'impacchettamento ottimale: infatti in due dimensioni essa è circa 0.9, nello spazio tridimensionale è circa 0.74, per passare a 0.25 nel caso di E8.

Illustrare in aula questo scenario e le tappe degli studi sulla congettura di Keplero può permettere di rendere gli studenti partecipi della ricerca attiva, mostrando loro come la matematica sia tutt'altro che un corpus statico, ma un sapere in perenne trasformazione. Inoltre, introdurre la figura della Viazovska, seconda donna a ottenere la Medaglia Fields dopo Maryam Mirzakhani (1977-2017) nel 2014, può essere un'occasione di riflessione nell'ambito del *gender gap* nelle discipline STEM.

6. Conclusioni

Incorporare la dimensione storica nell'insegnamento della matematica è fondamentale per 'umanizzare' la disciplina, restituendole tutta la sua profondità di sapere sviluppatosi nel corso dei secoli. Questo approccio permette di introdurre la dimensione narrativa nell'insegnamento, trasformando l'attività matematica in una "lunga conversazione che si estende nel corso dei millenni" (Mazur, 2013, p. 2). Lo strumento metodologico principe per raggiungere questo obiettivo sono le fonti storiche. Esse diventano il mezzo attraverso cui gli studenti possono entrare in dialogo con il passato e con lo 'spirito' di un'altra epoca. Il lavoro sulle fonti "orienta l'attenzione verso i processi, il che conduce alla genesi dei concetti" (Radford, 2014, p. 99), acquisendo così una rilevanza cruciale sia sul piano storico sia su quello didattico. L'uso di fonti storiche primarie diventa così uno strumento efficace non solo per consolidare specifici argomenti in maniera coinvolgente, ma anche per offrire inedite opportunità di apprendimento rispetto ai manuali standard, svelando agli studenti le regole meta-discorsive della disciplina (Chorlay, Clark & Tzanakis, 2022). In questo contesto, la lettura di un testo originale si configura come una vera e propria attività ermeneutica: gli allievi applicano le loro conoscenze a contesti nuovi per riflettere in modo profondo sulle proprie immagini concettuali (Jahnke, 2014) e sono chiamati a operare 'come storici', stimolando le proprie competenze matematiche e di *problem solving* nel tentativo di dedurre i passaggi intermedi e colmare i vuoti argomentativi degli autori del passato (Jankvist & Kjeldsen, 2011).

Tale prassi si traduce concretamente in un’impostazione laboratoriale che non va intesa come semplice luogo fisico, ma come una metodologia “finalizzata alla costruzione di significati matematici” (UMI-CIIM, 2003, p. 28). In questo quadro, le fonti e gli strumenti storici agiscono come artefatti di mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008): il confronto dialettico tra l’intuizione dell’allievo e il testo originale trasforma l’indagine testuale e manipolativa in un consapevole esercizio di riflessione critica, alimentato dalle interazioni sociali che si sviluppano durante l’attività.

Queste attività, inoltre, aprono in modo del tutto naturale la porta a ulteriori esplorazioni e connessioni con ambiti fondamentali della matematica. Da un lato, il problema di massimizzazione del volume della botte da vino e i ragionamenti legati agli esagoni nella tassellazione del piano e all’impacchettamento delle sfere nello spazio offrono un ottimo spunto per introdurre il concetto di ottimizzazione. Quest’ultimo, infatti, permette di formalizzare e generalizzare la ricerca della configurazione più efficiente o compatta; la letteratura in didattica della matematica conferma che presentare tale tematica a partire da problemi pratici o geometrici tangibili sia una strategia estremamente efficace per potenziare le capacità di risoluzione di problemi e di modellizzazione degli studenti (Gholami, Abdullah & Hamdani, 2023). Dall’altro lato, l’esame della morfologia dei cristalli di neve offre un eccellente spunto per introdurre la geometria frattale. La natura stessa del fiocco di neve è intimamente legata al concetto di autosimilarità, un aspetto che trova la sua più celebre espressione nella curva introdotta dal matematico svedese Helge von Koch (1870-1924) nel 1904. L’esplorazione di questa curva frattale, generata tramite una iterazione ricorsiva a partire da un triangolo equilatero, permette agli studenti di visualizzare in modo accessibile un concetto complesso e, al contempo, estremamente affascinante: quello di una figura geometrica dotata di perimetro infinito che racchiude, però, un’area finita (Barton, 1999).

Inoltre, la prospettiva storica favorisce la creazione di percorsi interdisciplinari. Il caso dei fiocchi di neve è emblematico: oltre ai già citati collegamenti con la chimica e le scienze naturali, si può esplorare, ad esempio, l’evoluzione della rappresentazione della neve nell’arte. Prima del XIX secolo, la neve era raffigurata raramente e spesso in modo grossolano: infatti nelle opere di inizio Quattrocento, come nel celebre “Febbraio” dalle *Très Riches Heures du Duc de Berry* (uno dei più famosi manoscritti del gotico internazionale, opera dei fratelli Limbourg), assomiglia a farina. È stato necessario attendere un nuovo approccio all’osservazione della luce e delle sue variazioni – curato in particolar modo da C. Monet e dagli impressionisti – per vedere rappresentata la vera natura della neve, che non è bianca ma riflette i colori circostanti. Questo raccordo con le arti visive risulta particolarmente versatile e si presta a essere declinato con successo sia nella scuola secondaria di primo grado, sia in quella di secondo grado, trovando il suo sbocco d’elezione nei licei artistici o negli indirizzi che prevedono l’insegnamento curricolare della storia dell’arte. A

questa spinta estetica si affianca la profonda fascinazione di Kepler per le morfologie del mondo naturale. Un interesse che si manifesta non solo nell'analisi dei cristalli di neve, ma che innerva l'intera sua produzione, come testimonia la *Nova stereometria*, dove lo scienziato non calcola solo il volume delle botti austriache ma anche quello di un cedro e di una mela (Teoremi XX e XXI).

In ambito liceale, in modo particolare se si considerano gli snodi concettuali tipici del secondo biennio, il testo della *Strena* apre a stimolanti collaborazioni anche con i docenti di storia e filosofia. Sul fronte filosofico, il ricorso di Kepler all'azione di una "facoltà formatrice" permette di rintracciare un suggestivo legame con il concetto di "causa formale" sviluppato da Aristotele (MIM, 2026, p. 30) nel libro III della *Metafisica* e nel libro II della *Fisica*. Discutere tale nesso in aula offre un'occasione privilegiata per analizzare la delicata transizione dalla magia alla scienza che caratterizza il periodo che va dal Rinascimento al Seicento, facendo comprendere agli allievi come le prime grandi innovazioni della scienza moderna non si siano separate in modo netto e immediato da orientamenti di matrice mistico-metafisica.³⁸ Infine, da un punto di vista strettamente storico, risulta significativo contestualizzare l'opera di Kepler nel rigido quadro climatico dell'epoca. Il periodo a cavallo tra il Cinquecento e l'inizio del Seicento fu infatti segnato dalla cosiddetta "Grande glaciazione" (o "Piccola era glaciale"); può perciò essere interessante per gli studenti osservare come l'indagine di Kepler prenda spunto dalla sua esperienza quotidiana, trasformando la semplice osservazione di un inverno molto rigido in un oggetto di indagine scientifica.

Le risorse proposte in questo contributo, che coniugano un approccio laboratoriale a un'opportuna contestualizzazione dal punto di vista storico, possono infine contribuire a sensibilizzare gli studenti stessi verso le fonti storiche primarie, che restituiscono tutta la ricchezza e la vivacità della matematica, disciplina viva e in continua evoluzione.

Note sull'attività di ricerca

Le autrici sono membri del gruppo GNSAGA dell'INdAM. L'attività di ricerca descritta in questo articolo è stata in parte svolta all'interno del Progetto EDVANCE – *Digital Education Hub for Advanced Digital Culture*, finanziato dall'Unione Europea-NextGenerationEU, Componente 1, Investimento 3.4 "Didattica e competenze universitarie avanzate".

³⁸ Si tratta della "trasformazione dell'idea di scienza nel pensiero rinascimentale e moderno" (MIM, 2026, p. 30) cui viene fatto esplicito riferimento nelle *Indicazioni Nazionali 2026*.

Riferimenti

- Ball, P. (2011). In retrospect: On the Six-Cornered Snowflake. *Nature*, 480, 455.
- Bartocci, C. (2004). *Il mondo è matematico?*, In AA.VV. (Ed.), *La matematica della natura* (pp. 17–38). Erga Edizioni.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). Routledge.
- Barton, P. (1999). Fractals in high school: Exploring a new geometry. *Mathematics Teacher*, 92(3), 260–264. <https://doi.org/10.5951/MT.92.3.0260>
- Brigaglia, A. (2016). *Tassellazioni, solidi archimedei, poligoni stellati nell'Harmonices Mundi di Keplero*. In F. Ferrara, L. Giacardi & S. Mosca (Eds.), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2015-2016* (pp. 91–119). Kim Williams Books.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Mathematics Education Library, Vol. 19. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Capone, R., Casolaro, F., & Tortoriello, F. S. (2020). Il Liceo Matematico: un ponte tra scuola e università. In N. Casagli et al. (Eds.), *Matematica e cultura* (pp. 53–64). Springer.
- Caspar, M. (1962). *Kepler* (C. Doris Hellman, Trans. & Ed.). Collier Books. (Original work published 1959).
- Cavalieri, B. (1635). *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Typis Clementis Ferronij.
- Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1407–1420. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>
- Commandino, F. (1558). *Archimedis Opera non nulla à Federico Commandino Vrbinate nuper in Latinum conuersa, et commentariis illustrata*. Apud Paulum Manutium.
- De Marchi, S. (2019). *Nova stereometria doliorum vinariorum. Nuovi metodi infinitesimali per il calcolo dei volumi nell'opera di Johannes Kepler*. Tesi di laurea magistrale in matematica. Università di Bologna. https://amslaurea.unibo.it/id/eprint/18788/1/De_Marchi_Sara_TesiMagistrale.pdf
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Kluwer Academic Publishers.
- Ferrari, F., Petrucci, F. M. (Eds.). (2022). *Platone. Timeo*, Mondadori.
- Frajese, A., Maccioni, L. (Eds.). (1970). *Gli Elementi di Euclide*, UTET.
- Frajese, A. (Ed.). (1974). *Opere di Archimede*. UTET.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 131–143.
- Gariboldi, B. (2023). Maryna Viazovska e l'impacchettamento di sfere. *Emmeciquadro*, 83, 522–526. https://emmeciquadro.euresis.org/mc2/83/mc2-83_gariboldi_medaglia-fields-2022.pdf

- Geschauff, T. (Ed.). (1544). *Archimedis Syracusani philosophi ac geometrae excellentissimi opera, quae quidem extant omnia, latinitate iam olim donata, nuncque primum in lucem edita*. Per Ioannem Hervagium.
<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2596075>
- Gholami, H., Abdullah, N. A., & Hamdani, A. (2023). Teaching the mathematical optimization concept to first-year engineering students using a practical problem. *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(4), 203–228.
<https://eric.ed.gov/?id=EJ1409241>
- Giusti, E. (1980). *Bonaventura Cavalieri and the theory of indivisibles*. Cremonese.
- Giusti, E. (2007). *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*. Istituti editoriali e poligrafici internazionali.
- Hales, T.C. (2000). Cannonballs and honeycombs. *Notices of the American Mathematical Society*, 47, 440–449.
- Hales, T.C. (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics*, 162, 1065–1185.
<https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf>
- Jahnke, H. N. (2014). History in mathematics education. A hermeneutic approach. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp. 75–88). Springer.
- Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2011). New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & Education*, 20(9), 831–862. <https://doi.org/10.1007/s11191-010-9315-2>
- Katz, V., Tzanakis, C. (Eds.). (2011). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. Mathematical Association of America.
<https://maa.org/wp-content/uploads/2024/10/NTE78.pdf>
- Kepler, J. (1596). *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum, de admirabili proportione orbium coelestium, deque causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonstratum, per quinque regularia corpora geometrica*. Excudebat Georgius Gruppenbachius. <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/123207>
- Kepler, J. (1611). *Strena, seu de nive sexangula*. G. Tampach.
<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1001432>
- Kepler, J. (1615). *Nova stereometria doliorum vinariorum, in primis Austriaci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus & plane singularis*. Joannes Planchus. <https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/3298821>
- Kepler, J. (1996). *The six-cornered snowflake* (L. White, Trans.). Claredon Press. (Original work published 1611).
http://www.joostwitte.nl/M_Galilei/Johannes_kepler_snowflake.pdf
- Kepler, J. (2018). *Nova stereometria doliorum vinariorum: accessit Stereometriae Archimedae supplementum. New solid geometry of wine barrels: a supplement to the Archimedean solid geometry has been added* (E. Knobloch, Trans. & Ed.). Les Belles Lettres. (Original work published 1615).
- Libbrecht, K. G. (2005). The physics of snow crystals. *Reports on Progress in Physics*, 68(4), 855–895. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/4/R03>
- Lombardi, A.M. (2008). *Keplero. Una biografia scientifica*. Codice edizioni.
- Lombardo Radice, L. (Ed.) (1966). *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*. UTET.

- Lugaresi, M.G., Scalambro, E. (2025). Botti di vino e fiocchi di neve. Un percorso storico didattico attraverso la matematica di Johannes Kepler. In A. Gambini & L. Tomasi (Eds.), *Il laboratorio matematico oltre i confini disciplinari. Atti del Seminario Nazionale dei Licei Matematici – Settembre 2024* (pp. 175–178). Rogiosi editore.
- Mazur, B. (2013, 17 febbraio). *History of Mathematics as a tool* [seminar]. <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.harvard.edu/dist/a/189/files/2023/01/History-of-Mathematics-as-a-tool.pdf>
- MIUR. (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i percorsi liceali*. D.M. 211, 7 ottobre 2010.
- MIM. (2025). *Indicazioni Nazionali per il curriculum della Scuola dell'infanzia e del Primo ciclo di istruzione*. D.M. 221, 9 dicembre 2025.
- MIM. (2026). *Nuove Indicazioni Nazionali per i licei*. Testo pubblicato il 22 aprile 2026.
- Nakaya, U. (1954). *Snow Crystals: Natural and Artificial*, Harvard University Press.
- Radford, L. (2014). Reflections on History of Mathematics. In M. Fried & T. Dreyfus (Eds.) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education* (pp. 89–109). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_7
- Szpiro, G. C. (2003). *Kepler's conjecture: How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World*. John Wiley & Sons.
- Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers & curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37–42.
- Tall, D., & Thomas, M. (1991). Cognitive roots and cognitive obstacles in the development of algebraic thinking. In A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 125–155). Kluwer Academic Publishers.
- Tournès, D. (2022). What history training for future mathematics teachers? Personal experiences and reflections. In *9th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 26–47). Publmath ADIREM-APMEP.
- UMI-CIIM. (2003). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica*.
<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf>
- Williams, S. M. (1992). Putting case-based learning into context: Examples from mathematical problem solving. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(4), 367–427.