



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La Matematica

e la sua Didattica

Anno 33, n. 2, 2025

Rivista di ricerca in Didattica della
Matematica fondata nel 1987

ISSN 3035-2940 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2025



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La Matematica

e la sua Didattica

Anno 33, n. 2, 2025

Rivista di ricerca in Didattica della
Matematica fondata nel 1987

ISSN 3035-2940 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2025

In copertina:

Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La Matematica e la sua Didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).

Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Rivista di ricerca in Didattica della Matematica,
fondata nel 1987 da Bruno D'Amore,
direttore scientifico dal 1987 al 2021.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

<https://matdid-journal.unibo.it>

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Direttori:

Miglena Asenova, Maura Iori, Andrea Maffia, George Santi

Redazione:

Maura Iori

Proprietà Direzione Amministrazione Redazione:

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993

ISSN 3035-2940

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La Matematica e la sua Didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access e pubblicata sul seguente sito:

<https://matdid-journal.unibo.it>

La Matematica e la sua Didattica

NRD Università di Bologna, Italia.

Comitato di redazione

Direttore: Maura Iori (Italia)

Miglena Asenova (Italia)

Agnese Del Zozzo (Italia)

Alessandro Gambini (Italia)

Marzia Garzetti (Italia)

Comitato scientifico:

Samuele Antonini (Università di Firenze, Italia)

Luis Carlos Arboleda (Universidad del Valle, Cali, Colombia)

Luis Moreno Armella (Cinvestav, Ciudad de México, México)

Ferdinando Arzarello (Università di Torino, Italia)

Giorgio Bolondi (Università di Bolzano, Italia)

Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia)

Benedetto Di Paola (Università di Palermo, Italia)

Raymond Duval (Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale, Francia)

Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna, Italia)

Vicenç Font (Universitat de Barcellona, Spagna)

Athanasios Gagatsis (University of Cyprus, Nicosia, Cipro)

Juan D. Godino (Universidad de Granada, Spagna)

Colette Laborde (Université de Grenoble, Francia)

Salvador Llinares (Universidad de Alicante, Spagna)

Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena, Italia)

Luis Radford (Université Laurentienne, Canada)

Luis Rico (Universidad de Granada, Spagna)

Bernard Sarrazy (Université de Bordeaux, Francia)

Silvia Sbaragli (Dipartimento Formazione e Apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera)

Fernando Zalamea (Universidad Nacional, Bogotá, Colombia)

Indice

Implementazione della Valutazione Formativa in Attività Argomentative per lo Sviluppo del Pensiero Algebrico: Indicatori e Dove Trovarli

Implementation of Formative Assessment in Argumentative Activities for the Development of Algebraic Thinking: Indicators and Where to Find Them

Implementación de la Evaluación Formativa en Actividades Argumentativas para el Desarrollo del Pensamiento Algebrico: Indicadores y Dónde Encontrarlos

Alessandra Boscolo, Francesca Morselli e Elisabetta Robotti pp. 75–113

Un'Analisi delle Concezioni sulla Dimostrazione di Studenti di un Corso di Laurea in Matematica

An Analysis of Students' Conceptions of Proof in a Mathematics Degree Course

Un Análisis de las Concepciones de los Estudiantes sobre la Demostración en una Licenciatura de Matemáticas

Tania Bertolini e Miglena Asenova pp. 115–159

Processi Semiotici Cognitivi nel Ragionamento Matematico: Il Pensiero di Raymond Duval alla Luce delle Teorie Semiotiche di Charles Sanders Peirce

Cognitive Semiotic Processes in Mathematical Reasoning: Raymond Duval's Thought in Light of Charles Sanders Peirce's Semiotic Theories

Procesos Semióticos Cognitivos en el Razonamiento Matemático: El Pensamiento de Raymond Duval a la Luz de las Teorías Semióticas de Charles Sanders Peirce

Asia Della Bruna pp. 161–177

Implementazione della Valutazione Formativa in Attività Argomentative per lo Sviluppo del Pensiero Algebrico: Indicatori e Dove Trovarli

Implementation of Formative Assessment in Argumentative Activities for the Development of Algebraic Thinking: Indicators and Where to Find Them

Implementación de la Evaluación Formativa en Actividades Argumentativas para el Desarrollo del Pensamiento Algebraico: Indicadores y Dónde Encontrarlos

Alessandra Boscolo, Francesca Morselli e Elisabetta Robotti

Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Italia

Sunto. *In questo lavoro vengono introdotti indicatori operativi per monitorare sia l'attivazione sia la realizzazione delle strategie di valutazione formativa, nell'implementazione di attività didattiche volte allo sviluppo del pensiero algebrico e alla promozione della competenza argomentativa. Gli indicatori costituiscono un prodotto di ricerca nato dal lavoro nella comunità di ricerca DIVA al DIMA e il loro utilizzo viene illustrato nell'articolo in riferimento a un caso studio esemplificativo: un percorso didattico co-progettato in seno alla comunità che vede le strategie di valutazione formativa come elemento cardine della progettazione. Tali indicatori costituiscono uno strumento per supportare la valutazione e il miglioramento del design delle progettazioni e per promuovere la riflessione critica dei docenti sulle scelte in fase di attuazione didattica, contribuendo al miglioramento delle pratiche educative e alla crescita professionale degli insegnanti.*

Parole chiave: valutazione formativa, riflessione sulla pratica, argomentazione, *symbol sense*, implementazione didattica.

Abstract. *This paper introduces operational indicators designed to monitor both the activation and realization of formative assessment strategies within educational activities, in which these strategies are positioned as a core dimension of the instructional design. Particularly, we here refer to learning sequences aimed at fostering algebraic thinking and promoting argumentative competence. The indicators represent a research outcome developed by the DIVA al DIMA community of inquiry and are illustrated in this paper through an exemplary case study. The indicators serve as a tool to support the evaluation and refinement of instructional design. Additionally, they aim to promote critical teacher reflection on the choices made during the*

implementation phase, contributing to the improvement of educational practices and the professional development of educators.

Keywords: formative assessment, reflective practice, symbol sense, argumentative skills, implementation.

Resumen. *Este artículo presenta indicadores operativos diseñados para monitorear tanto la activación como la implementación de estrategias de evaluación formativa en actividades didácticas orientadas al desarrollo del pensamiento algebraico y la promoción de la competencia argumentativa. Dichas estrategias se integran como una dimensión central en el diseño educativo. Los indicadores representan un resultado de investigación desarrollado en el marco de la comunidad de investigación DIVA del DIMA y se ilustran mediante un estudio de caso ejemplar. A través del análisis del estudio de caso, se demuestra cómo estos indicadores pueden constituir una herramienta efectiva para evaluar y optimizar el diseño de las propuestas didácticas. Asimismo, buscan fomentar la reflexión crítica por parte del profesorado sobre las decisiones tomadas durante la implementación educativa, contribuyendo al perfeccionamiento de las prácticas pedagógicas y al desarrollo profesional de los docentes.*

Palabras clave: evaluación formativa, reflexión sobre la práctica, argumentación, *symbol sense*, implementación didáctica.

1. Introduzione

La valutazione formativa, intesa come processo collaborativo, basato sul raccogliere evidenze dal lavoro degli studenti, che vengono poi interpretate e utilizzate da insegnanti, studenti o compagni per prendere decisioni sui passi successivi del percorso di apprendimento (Black & Wiliam, 2009) è considerata una dimensione fondamentale per promuovere una didattica efficace. Secondo Bell e Cowie (2001), essa supporta il miglioramento continuo dell'apprendimento, permettendo a insegnanti e studenti di riconoscere e rispondere attivamente ai risultati dell'apprendimento durante il percorso educativo. Ma come promuovere la valutazione formativa in classe?

Wiliam e Thompson (2007) hanno identificato cinque strategie chiave per la promozione della valutazione formativa all'interno di un contesto educativo, mettendo in luce che, non solo l'insegnante, ma anche i compagni di classe e lo studente stesso possono assumere un ruolo attivo in questo processo. Tuttavia, come evidenziato da Schildkamp et al. (2020), gli insegnanti incontrano sfide significative nell'implementare efficacemente la valutazione formativa in classe. È essenziale, infatti, che essa venga integrata strutturalmente nel processo di insegnamento-apprendimento, superando la logica che prevede la proposta di attività isolate appositamente dedicate. In particolare, la valutazione formativa deve essere ritenuta un elemento cardine all'interno della progettazione didattica.

Questa consapevolezza guida la comunità di ricerca DIVA (Didattica Inclusione Valutazione formativa Argomentazione) al DIMA (Dipartimento di Matematica) dell'Università di Genova, un gruppo di ricercatori e insegnanti-ricercatori di matematica e fisica di scuola secondaria di secondo grado, costituitosi nel febbraio 2023 e finalizzato alla riflessione sulla pratica didattica. In particolare, all'interno della comunità viene promossa la costruzione di sequenze didattiche che vengono co-progettate e sperimentate dai membri del gruppo. Tale lavoro innesca riflessioni di ricerca che portano anche alla costruzione di strumenti teorico-operativi volti a supportare l'implementazione didattica, in risposta alle esigenze dei contesti e per sostenere lo sviluppo professionale e personale.

In questo contributo, illustriamo un risultato di ricerca proveniente dal lavoro condotto all'interno di questa comunità, che si è interrogata intorno alle seguenti domande di ricerca:

1. Come è possibile rilevare l'attivazione delle strategie di valutazione formativa in relazione a specifici obiettivi di apprendimento durante l'attività didattica?
2. Come è possibile valutare se le strategie di valutazione formativa attivate siano state realizzate in modo efficace, in riferimento ai medesimi obiettivi di apprendimento?

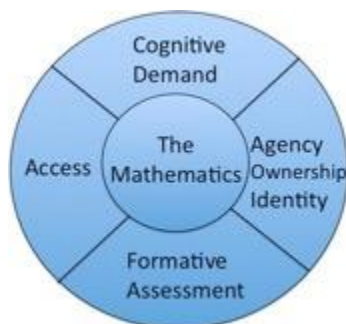
Per affrontare queste domande, sono stati sviluppati indicatori per rilevare sia l'attivazione sia la realizzazione delle cinque strategie di valutazione formativa. Tali indicatori sono stati progettati in riferimento a specifici obiettivi di apprendimento. In particolare, presentiamo in questo contributo indicatori specificatamente declinati in relazione ad attività didattiche volte alla promozione del pensiero algebrico, ovvero la capacità di riconoscere e generalizzare schemi, relazioni e strutture matematiche (Arcavi, 1994), e alla competenza argomentativa in contesto algebrico (Morselli & Boero, 2011) sviluppata attraverso la valutazione formativa (Cusi, Morselli & Sabena, 2017).

La scelta di declinare gli indicatori di valutazione formativa in relazione agli specifici obiettivi matematici è stata fortemente influenzata dallo strumento teorico adottato dalla comunità DIVA al DIMA, sia per supportare la progettazione didattica che la riflessione sulla pratica: il TRU (Teaching for Robust Understanding) elaborato da Schoenfeld (2016). Tale framework, infatti, articola la riflessione sulla promozione di un apprendimento "robusto" intorno a cinque dimensioni - la matematica, il carico cognitivo, l'accesso equo ai contenuti, l'agency, ownership, identity e la valutazione formativa - ponendo la dimensione matematica in una posizione privilegiata, al cuore del modello, in diretta relazione con tutte le altre dimensioni coinvolte (Fig. 1). Questa struttura influenza il modo di concettualizzare tutte queste dimensioni e, in particolare, anche la valutazione formativa, ponendola in stretta relazione con gli obiettivi matematici coinvolti. Tali obiettivi possono comprendere sia specifici significati matematici che determinate pratiche matematiche.

Figura 1

Il framework Teaching for Robust Understanding

(<https://www.map.mathshell.org/trumath.php>)



Gli indicatori si figurano come supporto operativo per la riflessione dei docenti sull'implementazione didattica, coerente con la filosofia delle rubriche proposte da Schoenfeld (2016), ed hanno una duplice funzione. Sono uno strumento di monitoraggio per l'attuazione di proposte didattiche, relazionando le scelte di progettazione con l'effettiva realizzazione didattica, tenendo conto degli specifici obiettivi matematici coinvolti. Essi permettono di monitorare non solo l'attivazione delle strategie, dovute ad opportune scelte di progettazione e di implementazione del docente, ma anche il loro grado di realizzazione nella pratica educativa, ovvero come tale attivazione abbia innescato processi di valutazione formativa. In questo senso, il passaggio dalla progettazione alla valutazione richiede un'attenta analisi basata su dati raccolti e interpretati nel contesto. Questo approccio si inserisce quindi in una visione che vede la progettazione didattica come un ciclo iterativo, in cui la riflessione e la revisione giocano un ruolo centrale nel miglioramento delle pratiche educative. Gli indicatori hanno però anche un'altra finalità, rappresentando uno strumento di promozione per la crescita professionale del docente, sostenendo un'analisi critica delle scelte effettuate in fase di implementazione e dei loro effetti rispetto agli obiettivi stabiliti in fase di progettazione.

Oltre a presentare gli indicatori realizzati in riferimento alle cinque strategie di valutazione formativa, declinati rispetto ai due obiettivi d'apprendimento (pensiero algebrico e competenza argomentativa), nel seguente contributo ne esemplificheremo l'utilizzo servendoci dell'analisi effettuata su un caso studio. L'illustrazione dell'esempio offrirà l'opportunità di discutere l'impiego e la funzionalità degli indicatori per i due fini sopra discussi.

2. Quadro Teorico

Cosa sappiamo del pensiero matematico di ogni studente, e come possiamo costruire su di esso? A partire da questa domanda chiave, Schoenfeld (2016) descrive la valutazione formativa come una componente essenziale da tenere in

considerazione per progettare e realizzare lezioni efficaci, cioè volte a promuovere un apprendimento significativo per ogni studente. Questa domanda è coerente con la concettualizzazione di valutazione formativa proposta da Black e Wiliam (2009), secondo cui la valutazione formativa è una metodologia didattica in cui

elementi di evidenza relativi ai risultati degli studenti vengono raccolti, interpretati ed utilizzati da insegnanti, studenti e loro pari – i compagni – per prendere decisioni sui passi successivi da fare nel processo di istruzione, che possano essere migliori, o meglio fondate, rispetto alle decisioni prese in assenza di tali elementi di evidenza (Black & Wiliam, 2009, p. 7, tradotto in Cusi, Morselli, & Sabena, 2017).

Per promuovere la valutazione formativa in classe Wiliam e Thompson (2007) indicano cinque strategie chiave (qui nella traduzione di Cusi, Morselli e Sabena, 2017): FA1) Chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo; FA2) Progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti; FA3) Fornire feedback che consentano allo studente di migliorare; FA4) Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri; FA5) Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento. Le strategie sono presentate organizzate in una tabella (Tabella 1), il che rende evidente il fatto che non solo il docente, ma anche i compagni di classe e lo studente stesso possono divenire agenti di valutazione formativa.

Tabella 1

Le strategie di valutazione formativa

	<i>Dove sta andando lo studente?</i>	<i>Dove si trova lo studente?</i>	<i>Come può raggiungere la meta lo studente?</i>
Insegnante	<i>Strategia 1:</i> chiarire gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo	<i>Strategia 2:</i> progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti	<i>Strategia 3:</i> fornire feedback che consentano allo studente di migliorare
Compagno	Capire e condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo	<i>Strategia 4:</i> attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri	
Studente	Capire gli obiettivi di apprendimento e i criteri di successo	<i>Strategia 5:</i> attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento	

Come sottolineano gli autori, non solo gli insegnanti, ma anche i compagni e gli stessi studenti possono agire come agenti di valutazione formativa. inoltre, come mostra la tabella, le strategie si riconducono alle tre domande chiave alla base del processo di valutazione formativa: *dove sta andando lo studente? Dove*

si trova lo studente in questo momento? Come può raggiungere la meta fissata?

In allineamento con la prospettiva del TRU, la valutazione formativa non può che essere concepita in relazione ai significati e ai processi matematici promossi dalla specifica attività didattica, dal momento che la dimensione matematica costituisce il cuore della riflessione suggerita dal modello, sulla quale ognuna delle altre quattro dimensioni (il carico cognitivo, l'accesso equo ai contenuti, l'agency, ownership e identity e la valutazione formativa) va ad innestarsi per realizzare un apprendimento “robusto” (Schoenfeld, 2016). Conseguentemente, la dimensione matematica forgia le strategie di valutazione formativa, in quanto gli obiettivi di apprendimento e i relativi criteri di successo devono necessariamente essere declinati in relazione ai contenuti e le pratiche matematiche in gioco.

Nello specifico, in questo contributo facciamo riferimento ad attività didattiche in cui gli obiettivi di apprendimento riguardano lo sviluppo del pensiero algebrico e la competenza argomentativa. L'obiettivo di apprendimento relativo allo sviluppo del pensiero algebrico si ricollega alla concettualizzazione del symbol sense descritto da Arcavi (1994). Secondo l'autore, il symbol sense è un complesso e sfaccettato “feeling” coi simboli, che può essere concettualizzato in termini di apprezzamento, comprensione e istinto relativi ai simboli e al loro utilizzo. Più precisamente, sviluppare un symbol sense significa:

- Comprendere come e quando utilizzare i simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni.
- Sapere riconoscere quando è preferibile abbandonare i simboli in favore di altri approcci.
- Sapere gestire la dialettica tra manipolazione simbolica e interpretazione.
- Essere in grado di creare e adattare espressioni simboliche in base al contesto.
- Monitorare costantemente i significati associati ai simboli durante la risoluzione dei problemi.
- Comprendere i diversi ruoli che i simboli possono assumere in situazioni differenti.

Il primo punto di caratterizzazione del symbol sense, ovvero la capacità di utilizzare i simboli per generalizzare e dimostrare, si collega al secondo obiettivo di apprendimento, ovvero lo sviluppo della competenza argomentativa. Per inquadrare teoricamente la competenza argomentativa e dimostrativa facciamo riferimento a Morselli e Boero (2009), che riprendono e adattano alla didattica della matematica il costrutto di comportamento razionale proposto inizialmente dal filosofo Habermas (2003). Il processo argomentativo e dimostrativo, inteso come comportamento razionale, è caratterizzato da tre componenti, intrecciate tra loro:

- la componente epistemica, che riguarda la capacità di validare affermazioni

basandosi su premesse condivise e modalità di ragionamento legittime;

- la componente teleologica, che attiene alla dimensione del problem solving, ossia alle strategie e alle scelte orientate al raggiungimento di obiettivi specifici;
- la componente comunicativa, che riguarda la capacità di aderire alle regole che rendono i processi di ragionamento chiari, condivisibili e conformi agli standard matematici di una determinata comunità.

In particolare, la componente epistemica si manifesta nei criteri di correttezza e completezza: la correttezza riguarda l'assenza di errori matematici nelle risposte e nelle giustificazioni, mentre la completezza richiede che tutti i passaggi necessari per giungere alla conclusione siano esplicitati e coerenti con le conoscenze matematiche coinvolte. La componente teleologica si riflette nella consapevolezza e appropriatezza delle strategie adottate in relazione agli obiettivi dell'attività. La componente comunicativa si riflette nella chiarezza, ossia nella comprensibilità della risposta da parte di un interlocutore (compagni o insegnante), evidenziando l'importanza del piano comunicativo. Come sottolineato da Cusi, Morselli e Sabena (2017), correttezza, completezza e chiarezza rappresentano criteri fondamentali per una buona argomentazione matematica in contesto scolastico.

In particolare, poiché le attività a cui ci riferiamo hanno come altro obiettivo di apprendimento lo sviluppo del pensiero algebrico, facciamo riferimento anche a un ulteriore adattamento del costrutto di comportamento razionale all'uso del linguaggio algebrico nella modellizzazione e dimostrazione (Morselli & Boero, 2011). Nel caso specifico:

- la componente epistemica riguarda la correttezza delle formalizzazioni algebriche e l'interpretazione delle espressioni algebriche, e la corretta applicazione delle regole sintattiche di trasformazione delle espressioni algebriche;
- la componente teleologica riguarda il fatto che la scelta delle formalizzazioni algebriche, delle trasformazioni e delle loro interpretazioni sia consapevole e orientata agli obiettivi dell'attività;
- la dimensione comunicativa riguarda l'adesione alle norme riguardanti le notazioni standard, così come i criteri per una facile lettura e manipolazione delle espressioni algebriche.

Nel seguito ci riferiremo ai due obiettivi di apprendimento in termini di sviluppo del pensiero algebrico e della competenza argomentativa, intendendo con quest'ultima anche la competenza relativa all'uso dell'algebra come strumento dimostrativo.

3. Costruzione e Uso degli Indicatori

Differentemente dalla definizione di Jaworski (2015), che vede la comunità di

ricerca come un contesto di promozione della formazione dei docenti, nella visione abbracciata dal DIVA, oltre agli obiettivi di sviluppo professionale in un'ottica di formazione insegnanti, essa si presenta come un contesto per sviluppare ricerca. A tal fine, si organizza in un gruppo misto di ricercatori e docenti, che assumono il profilo di insegnanti-ricercatori, con ricadute che mirano ad influenzare sia la scuola che la ricerca. Se, da un lato, si promuove la costruzione di sequenze didattiche co-progettate e sperimentate dal gruppo, dall'altro, il lavoro condotto dalla comunità innesca riflessioni di ricerca che portano anche alla costruzione di strumenti di ricerca volti a supportare l'implementazione didattica, in risposta alle esigenze dei contesti e per sostenere lo sviluppo professionale e personale. All'interno della comunità di ricerca vengono condivise modalità di lavoro e strumenti teorici che supportano la crescita professionale e strutturano il design, la sperimentazione e il monitoraggio di sequenze didattiche co-progettate all'interno del gruppo. Allo strumento principe che guida la riflessione condivisa, il framework TRU corredato dalle rubriche per i docenti (Schoenfeld, 2016), si aggiungono riferimenti teorici che vanno ad ampliare la conoscenza e la comprensione di specifici elementi rilevanti per il lavoro condotto nella comunità e nella scuola. In particolare, affrontando un lavoro specificatamente rivolto alla promozione di pratiche di valutazione formativa, sono stati condivisi i riferimenti teorici presentati nel paragrafo precedente, e similmente è accaduto per quel che riguarda la competenza argomentativa e lo sviluppo del pensiero algebrico. Il processo di co-design di sequenze didattiche risulta perciò informato dagli elementi teorici condivisi, così come il processo di revisione e di ripensamento.

Dalla necessità di creare degli strumenti in grado di monitorare in modo operativo la realizzazione di pratiche di valutazione formativa, in attività di sviluppo per il pensiero algebrico e la competenza argomentativa, nascono gli indicatori: un prodotto di ricerca che declina le indicazioni generali di Wiliam e Thompson (2007) attraverso i quadri teorici legati agli specifici contenuti e pratiche matematiche in gioco. Gli indicatori vogliono, da un lato, individuare elementi della progettazione didattica che hanno favorito processi di valutazione formativa, ma anche portare a consapevolezza le pratiche didattiche del docente che, al di là delle scelte di progettazione che caratterizzano il design della sequenza didattica, hanno permesso di realizzare compiutamente oppure hanno ostacolato l'attuarsi della valutazione formativa.

Per ogni strategia di valutazione formativa e in riferimento a ciascuna competenza in gioco (pensiero algebrico e competenza argomentativa), sono stati formulati una coppia di indicatori. Gli indicatori si distinguono tra *indicatori di attivazione*, che segnalano la presenza di comportamenti osservabili di attuazione delle strategie di valutazione formativa, e *indicatori di compiuta realizzazione*, che rilevano la presenza di effetti osservabili dovuti all'attuazione delle strategie di valutazione formativa.

Diamo ragione di questo sdoppiamento degli indicatori. Nella creazione

dello strumento di monitoraggio, per inquadrare la valutazione formativa come processo, ci è sembrato particolarmente rilevante complementare la rilevazione dell'attivazione delle strategie con ulteriori indicatori che ci permettono di rintracciare le possibili realizzazioni a partire da tali attivazioni. Infatti, riteniamo che la valutazione formativa, come pratica, si instauri nella dinamica e grazie all'interazione che avviene entro la classe in un arco temporale, coinvolgendo molteplici attori, e che la sola attivazione delle strategie non ne garantisca la compiuta attuazione, ma bensì vada osservata come processo nella sua evoluzione. Dunque, la proposta di indicatori di attivazione e compiuta realizzazione ci è sembrato che strutturi il monitoraggio in modo da porre in evidenza questo aspetto per noi centrale. Riteniamo, inoltre, che il valore aggiunto nella promozione della valutazione formativa si possa trovare nella compenetrazione delle cinque strategie. Privilegiamo, per questo, un'analisi condotta attraverso gli indicatori che porti alla luce l'integrazione e la copresenza di molteplici indicatori, anche in riferimento a soggetti diversi, come chiariremo grazie all'analisi riportata su un caso studio, a scopo esemplificativo. Nel prossimo paragrafo presentiamo gli indicatori rimandando la descrizione del processo di creazione ad un articolo in lavorazione (Boscolo et al., submitted). Nel paragrafo seguente, ne esemplifichiamo l'uso facendo riferimento a una sperimentazione condotta all'interno della comunità di ricerca (per i dettagli, vedere Quartara et al., 2024).

La sequenza didattica è stata co-progettata e sperimentata da un insegnante-ricercatore con vasta esperienza didattica e familiarità teorica relativamente agli elementi in gioco nella progettazione, ovvero, la valutazione formativa, lo sviluppo del pensiero algebrico e la competenza argomentativa. Due delle autrici del contributo sono state coinvolte come osservatrici non partecipanti durante la sperimentazione. Inoltre, sono state raccolte le risposte individuali e di gruppo ai quesiti argomentativi proposti, le schermate della lavagna condivise dal docente, le videoregistrazioni delle discussioni di classe, i questionari (moduli Google) compilati dagli studenti tra una lezione e l'altra.

Sulla totalità dei dati raccolti è stata condotta un'analisi olistica che ha preso in esame l'intera sequenza didattica, insieme ad un'analisi sistematica focalizzata su alcuni episodi ritenuti particolarmente rilevanti e informativi dalle autrici e dal docente coinvolto. Per il monitoraggio sistematico, si è proceduto con un'analisi stratificata da parte delle tre autrici, ovvero ciascuna ha preso in carico l'analisi dei materiali selezionati - principalmente degli stralci di discussione e dei moduli di autovalutazione - attraverso uno/due specifici indicatori. Tale analisi è stata seguita da una revisione condivisa. L'analisi astratta ha fatto sì che gli episodi selezionati venissero analizzati con diversi focus di attenzione e ha permesso di non limitarci ad osservare, nei singoli scambi/risposte/interventi, esclusivamente la strategia più evidente tra quelle presentate, dando risalto alla sinergia e la compenetrazione tra le varie strategie. Successivamente, le analisi condotte separatamente sono state riunite nella

creazione di tabelle di analisi, come quelle che verranno presentate relativamente ad alcuni stralci di discussione (Tabelle 7, 8, 9), al fine di evidenziare la contemporanea attivazione o realizzazione di diverse strategie.

Mostreremo, al termine del paragrafo 5, che cosa è stato possibile discutere a partire dall'analisi condotta con gli indicatori, mostrando la funzionalità di questo strumento sia per il monitoraggio di sequenze didattiche che per l'analisi delle pratiche del docente, con l'obiettivo di riflettere sia sulla progettazione didattica che sulla consapevolezza dell'insegnante coinvolto.

4. Gli Indicatori

In questo paragrafo presentiamo come le strategie di valutazione formativa sono state elaborate in termini di indicatori. Preliminarmente, e facendo riferimento a quanto illustrato nel quadro teorico, sintetizziamo gli specifici obiettivi di apprendimento delle attività didattiche: lo sviluppo del pensiero algebrico (Caratterizzazione 1) e lo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica (Caratterizzazione 2).

Caratterizzazione 1 - C1. Pensiero algebrico (adattamento da Arcavi, 1994):

- uso corretto dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni;
- consapevolezza del fatto che in alcuni casi è più conveniente abbandonare i simboli a favore di altri approcci;
- consapevolezza dell'importanza di affrontare la dialettica tra manipolazione e interpretazione dei simboli;
- consapevolezza del fatto che è possibile creare espressioni simboliche, e capacità di farlo;
- consapevolezza dell'importanza di selezionare, ma anche abbandonare o modificare, una rappresentazione simbolica;
- consapevolezza dell'importanza di controllare costantemente il significato dei simboli durante la risoluzione dei problemi;
- consapevolezza del fatto che i simboli possono assumere ruoli diversi.

Caratterizzazione 2 - C2. Competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica:

- comportamento razionale relativamente alla componente epistemica (con particolare riferimento a correttezza e completezza);
- comportamento razionale relativamente alla componente teleologica (con particolare riferimento alla strategia per risolvere il problema, alle azioni orientate all'obiettivo...);
- comportamento razionale relativamente alla componente comunicativa (con particolare riferimento alla chiarezza);

- consapevolezza dell'importanza di fornire spiegazioni;
- consapevolezza dei criteri per una buona argomentazione;
- consapevolezza del ruolo degli esempi nell'argomentazione.

La prima strategia di valutazione formativa, FA1, si focalizza sulla esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento dell'attività e dei relativi criteri di successo (Tabella 2). Per quanto riguarda gli indicatori di attivazione, FA1.1 è orientata allo sviluppo del pensiero algebrico e si basa sui sette punti della caratterizzazione di symbol sense delineata da Arcavi (1994). L'insegnante può attivare tale strategia in fase di discussione, per esempio in fase di restituzione di un questionario, ma anche delle richieste di riflessione individuale, mettendo in luce il ruolo dell'algebra all'interno delle produzioni degli studenti. È possibile osservare l'indicatore di attivazione FA1.1 anche durante l'introduzione dell'attività, quando l'insegnante chiarisce gli obiettivi dell'attività stessa.

L'indicatore corrispondente di avvenuta realizzazione si riferisce alla capacità dello studente di dimostrare consapevolezza degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo legati al pensiero algebrico, come ad esempio il riconoscimento dell'importanza dell'algebra per generalizzare, in linea con la strategia FA1.1(a). È possibile individuare indicatori di avvenuta realizzazione nelle discussioni quando gli studenti descrivono come hanno usato l'algebra per generalizzare un certo esempio numerico.

FA1.2, invece, è indicatore di sviluppo della competenza argomentativa nella dimostrazione algebrica. Per l'attivazione di questa strategia si considerano interventi dell'insegnante finalizzati a evidenziare l'importanza dell'argomentazione e i criteri per una buona argomentazione, con un focus particolare sulle tre dimensioni del comportamento razionale (dimensione epistemica, teleologica e comunicativa). È possibile per l'insegnante attivare l'indicatore FA1.2 tramite task individuali che richiedono di spiegare e motivare le scelte effettuate. La proiezione alla LIM di alcune di tali risposte può creare le condizioni per verificarne l'avvenuta realizzazione.

Infatti, l'indicatore di avvenuta realizzazione associato a FA1.2 si riferisce alla consapevolezza dello studente degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo riguardanti l'argomentazione in ambito algebrico, evidenziando sia la capacità di superare schemi dimostrativi basati su esempi numerici o in generale su verifiche empiriche, sia quella di argomentare in modo razionale. È possibile identificare l'avvenuta realizzazione dell'indicatore FA1.2 in fase di discussione collettiva quando uno studente riconosce come corretta/non corretta, completa/non completa, comprensibile/non comprensibile l'argomentazione proposta da un/a altro/a studente/ssa.

Tabella 2

Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA1, che si focalizza sull'esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento dell'attività e dei relativi criteri di successo). FA1.1 riguarda lo sviluppo del pensiero algebrico, mentre FA1.2 riguarda lo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica

<i>FA1</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA1.1	L'insegnante sottolinea/rende espliciti gli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1). In particolare: a. sottolinea/rende esplicita l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni b. evidenzia che in alcuni casi è più conveniente abbandonare i simboli a favore di altri approcci c. rende esplicita l'importanza di affrontare la dialettica tra manipolazione e interpretazione dei simboli d. sottolinea la possibilità di creare espressioni simboliche, e la capacità di farlo e. sottolinea l'importanza di selezionare, ma anche di abbandonare o modificare, una rappresentazione simbolica f. sottolinea l'importanza di controllare costantemente il significato dei simboli durante la risoluzione dei problemi g. sottolinea che i simboli possono assumere ruoli diversi	Lo/a studente/ssa dimostra di essere consapevole degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo riguardanti il pensiero algebrico (vedi C1) (ad esempio, menzionando l'importanza dell'uso dell'algebra per generalizzare, in riferimento alla strategia cfr. FA1.1(a))
FA1.2	L'insegnante sottolinea/rende espliciti gli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2). In particolare: a. sottolinea l'importanza di fornire spiegazioni b. chiarisce i criteri per una buona argomentazione c. promuove una riflessione sulla componente epistemica (con particolare riferimento a correttezza e completezza) d. promuove una riflessione sulla componente teleologica (strategia per risolvere il problema, azioni orientate all'obiettivo...) e. promuove una riflessione sulla componente comunicativa (comprensibilità della soluzione, ...) f. promuove una riflessione sul ruolo degli esempi nell'argomentazione	Lo/a studente/ssa dimostra di essere consapevole degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di successo relativi all'argomentazione (vedi C2) (ad esempio, riconoscendo la necessità di andare oltre gli esempi numerici per dimostrare cfr. FA1.2(f))

La seconda strategia di valutazione formativa si concentra sulla progettazione e realizzazione di attività didattiche volte a rendere visibile l'apprendimento degli studenti, nel nostro caso con particolare riferimento agli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo del pensiero algebrico e della competenza argomentativa. Il design della sequenza didattica può includere attività come il lavoro in piccolo gruppo, le discussioni collettive e i momenti di autovalutazione progettati in quest'ottica. Queste scelte rappresentano l'attivazione della strategia FA2 (Tabella 3, Colonna 1).

Gli indicatori di attivazione riguardano quindi la progettazione dell'attività, che deve prevedere momenti di confronto tra strategie (ad esempio, attraverso la proiezione su LIM delle soluzioni proposte dagli/le studenti/esse), per stimolare una riflessione sul valore del linguaggio algebrico (FA2.1), oppure momenti di confronto tra argomentazioni, al fine di promuovere la competenza argomentativa (FA2.2). Possiamo trovare tali indicatori di attivazioni in domande di apertura delle discussioni collettive, del tipo: "Confrontate le strategie proposte da ognuno di voi. Quali sono i punti di forza e di debolezza di ciascuna?", in linea con gli indicatori di attivazione FA2.2(a) e FA2.2(b), in quanto stimola il confronto critico tra le argomentazioni. È anche possibile attivare le strategie FA2 richiedendo che i risultati di un lavoro di gruppo vengano presentati alla LIM. Questo può permettere la condivisione e l'analisi dei punti di forza e di debolezza di ogni soluzione (FA2.1) e argomentazione (FA2.2), a partire dai materiali prodotti dai gruppi stessi.

Gli indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 3, Colonna 2) includono sia l'insegnante che formula domande mirate a raccogliere evidenze sul percorso di apprendimento degli studenti (relative, rispettivamente, al pensiero algebrico o alla competenza argomentativa), sia lo/a studente/ssa che, attraverso i propri interventi, fornisce elementi utili per comprendere il suo percorso di apprendimento in relazione a questi aspetti. Per esempio, possiamo trovare evidenze di avvenuta realizzazione di queste strategie nelle risposte degli studenti ad un questionario di autovalutazione quando le domande proposte stimolano le riflessioni individuali e nel rispondere, gli studenti portano evidenze del proprio percorso di apprendimento sia in riferimento al pensiero algebrico, sia in riferimento all'argomentazione.

Osserviamo qui che, rispetto agli indicatori relativi alle altre strategie di valutazione formativa, gli indicatori relativi alla strategia FA2 hanno una peculiarità: l'attivazione riguarda la progettazione dell'attività, mentre l'avvenuta realizzazione riguarda il fatto che quanto progettato sia poi attuato (per esempio, l'insegnante conduce la discussione precedentemente pianificata, ponendo le opportune domande al fine di raccogliere informazioni sul processo di apprendimento degli studenti).

Tabella 3

Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA2, riguardante la progettazione e implementazione di attività didattiche volte a mettere in luce l'apprendimento degli studenti. FA2.1 concerne il design di attività che consentono di mettere in luce lo sviluppo del pensiero algebrico mentre FA2.2 il design di attività che rendono evidente il processo di apprendimento della competenza argomentativa volta alla dimostrazione algebrica

<i>FA2</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA2.1	Il design include attività quali lavoro di piccolo gruppo, discussione in classe e autovalutazione, mirate a far emergere il percorso di sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1), quindi, in particolare a: - confrontare strategie di risoluzione e soluzioni, con particolare riferimento all'uso dell'algebra come strumento dimostrativo - riflettere sui punti di forza e debolezza delle strategie di risoluzione (ad esempio, la scelta della formalizzazione) - chiedere agli studenti di esplicitare il proprio processo di risoluzione, con particolare riferimento all'uso dell'algebra come strumento dimostrativo	L'insegnante pone domande volte a far emergere riscontri sul percorso di apprendimento degli/delle studenti/studentesse, con riferimento al pensiero algebrico (vedi C1) Lo/a studente/ssa fornisce riscontri sul proprio percorso di apprendimento, in riferimento al pensiero algebrico (vedi C1).
FA2.2	Il design include attività quali lavoro di piccolo gruppo, discussione in classe e autovalutazione, mirate a far emergere il percorso di sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2), quindi, in particolare a: - confrontare argomentazioni e valutarle in termini di correttezza, completezza e chiarezza - riflettere sui punti di forza e debolezza delle argomentazioni (ad esempio, il ruolo degli esempi numerici nella dimostrazione) e valutare l'appropriatezza e la funzionalità delle strategie impiegate in riferimento agli obiettivi - chiedere agli studenti di esplicitare le loro scelte strategiche in fase di processo di argomentazione e creazione del prodotto argomentativo (ad esempio, l'uso di termini specialistici)	L'insegnante pone domande volte a far emergere riscontri sul percorso di apprendimento, con riferimento alla competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica (vedi C2) Lo/a studente/ssa fornisce riscontri sul proprio percorso di apprendimento, in riferimento alla competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica (vedi C2)

La terza strategia di valutazione formativa si focalizza sui feedback, intesi come informazioni fornite allo studente. Tali feedback mirano a rendere lo studente consapevole degli obiettivi di apprendimento, del livello raggiunto e delle azioni da intraprendere per migliorare. Considerando che si vogliono individuare indicatori specifici per i due obiettivi di apprendimento (pensiero algebrico e competenza argomentativa), scegliamo di fare riferimento alla classificazione dei feedback descritti da Hattie e Timperley (2007), prendendo in considerazione, in particolare, il feedback sul compito (che riguarda la comprensione del testo e la correttezza della risposta) e il feedback sullo svolgimento del compito (inerente i processi di risoluzione adottati).

Gli indicatori di attivazione (Tabella 4, Colonna 1) si riferiscono dunque al fatto che l'insegnante fornisce feedback sulla comprensione del compito, sul processo risolutivo e sulla risposta finale in relazione all'uso del linguaggio algebrico (FA3.1) e all'argomentazione (FA3.2).

È possibile riscontrare indicatori di attivazione della strategia FA3.1 durante le discussioni collettive dei risultati quando, per esempio, l'insegnante riporta alla lavagna il disegno risolutivo di un gruppo di studenti e chiede agli altri studenti di cercare di capire il processo risolutivo dei compagni. In tale discussione l'insegnante può sottolineare l'importanza di condividere, all'interno della comunità classe, la stessa scrittura algebrica (FA3.1) per poter comprendere la soluzione di altri.

Ancora, l'insegnante può fornire un feedback specifico sulla correttezza, chiarezza e completezza di una argomentazione fornita da un'alunna o un alunno, attivando l'indicatore FA3.2(c).

Gli indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 4, Colonna 2) riguardano la capacità dello/a studente/ssa, dopo aver ricevuto il feedback, di esplicitare il proprio processo di pensiero, di compiere un passo avanti nel proprio processo di apprendimento e di riconoscere il progresso ottenuto.

Per esempio, se sono proposti dei questionari di autovalutazione, gli/le studenti/sse possono esplicitare cosa li ha aiutati a sviluppare il proprio processo di pensiero algebrico FA3.2(i) o quali elementi rendono forte/debole la propria argomentazione FA3.2 (i).

Tabella 4

Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA3, che viene attivata dai feedback forniti dall'insegnante allo studente (per renderlo consapevole degli obiettivi di apprendimento, del livello di apprendimento raggiunto e di ciò che può mettere in atto per migliorare) e viene compiutamente realizzata in presenza di una risposta di quest'ultimo che dà seguito allo stimolo ricevuto. FA3.1 riguarda i feedback relativi al pensiero algebrico mentre FA3.2 relativi alla competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica

<i>FA3</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA3.1	L'insegnante fornisce feedback volti a favorire lo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1), quindi, in particolare: - sull'utilizzo del pensiero algebrico nella comprensione e risoluzione del task - sull'utilizzo del pensiero algebrico per il problem solving più in generale	Lo/la studente/ssa, sulla base dei feedback ricevuti: - esplicita il proprio ragionamento per rendere trasparenti i propri processi di pensiero, - mostra un avanzamento rispetto al proprio percorso di apprendimento (rispetto alla soluzione del task, rispetto allo sviluppo del pensiero algebrico - vedi C1) - riconosce il proprio posizionamento rispetto agli obiettivi auspicati (in termini di sviluppo del pensiero algebrico - vedi C1)
FA3.2	L'insegnante fornisce feedback volti a favorire lo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2), quindi, in particolare: - sull'uso dell'algebra e degli esempi numerici per dimostrare - sull'appropriatezza delle strategie utilizzate - sull'argomentazione prodotta, con particolare riferimento ai criteri di correttezza, completezza e chiarezza (ad esempio l'uso di termini specialistici)	Lo/la studente/ssa: - Riconosce punti di forza/debolezza della propria argomentazione (vedi C2) - Riformula la propria argomentazione seguendo i feedback indicati (ad esempio, l'uso appropriato di termini specialistici) (vedi C2) - Mostra un'evoluzione nella sua competenza argomentativa (ad esempio, riconosce i criteri di una buona argomentazione - vedi C2).

La quarta strategia di valutazione formativa si propone di fare in modo che gli studenti diventino risorse gli uni per gli altri. Questo concetto ha qui una doppia valenza: uno studente può essere risorsa per i propri compagni sia condividendo il proprio processo di pensiero sia fornendo feedback alla risposta di un compagno.

Gli indicatori di attivazione (Tabella 5, Colonna 1) tengono conto di entrambe le due accezioni collegandole rispettivamente allo sviluppo del pensiero algebrico (FA4.1) e alle competenze argomentative (FA4.2). Questi

indicatori possono riguardare sia l'intervento dello studente sia l'eventuale invito a intervenire formulato dal docente.

Possiamo, per esempio, trovare riscontro dell'indicatore FA4.2(a) quando l'insegnante coinvolge la classe chiedendo di commentare l'argomentazione di un/a compagno/a in fase di discussione collettiva dei risultati (Cusi & Morselli, 2024).

Gli indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 5, Colonna 2) si osservano negli altri studenti del gruppo classe che traggono vantaggio dall'essere sostenuti da un compagno. Tali indicatori, declinati per il pensiero algebrico in FA4.1 e per la competenza argomentativa in FA4.2, riguardano la capacità di un membro della classe di recepire e applicare il feedback ricevuto o di utilizzare le riflessioni condivise dal compagno. Spesso, questo si manifesta (pertanto è indicatore di avvenuta realizzazione) quando, in una fase successiva del percorso di apprendimento, lo studente fa riferimento proprio a quel feedback o a quelle riflessioni del compagno. Indicatori di avvenuta realizzazione dell'indicatore FA4.2 si possono riscontrare, per esempio, nei questionari di autovalutazione o nelle discussioni dove gli studenti mostrano progresso a partire dall'idea di un altro studente.

Tabella 5

Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA4: gli studenti diventano risorse gli uni per gli altri. FA4.1 riguarda l'intervento di studenti/sse o la richiesta dell'insegnante circa il dare feedback relativi allo sviluppo del pensiero algebrico o allo spiegare la propria soluzione ai/alle pari. FA4.2 riguarda l'intervento di studenti/sse o la richiesta dell'insegnante circa il dare feedback relativo allo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica

<i>FA4</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA4.1	Lo/a studente/ssa interviene per/ l'insegnante sprona gli/le studenti/sse a intervenire per favorire lo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1), quindi, in particolare: - commentare/ dare feedback riguardo la risposta/l'intervento di un/una altro/a studente/ssa riguardo all'uso dell'algebra e degli esempi numerici. (ad esempio, la scelta di usare o no l'algebra / la modalità di usare l'algebra) - spiegare la propria risposta ai/alle pari per aiutare la loro comprensione, con particolare riferimento all'uso dell'algebra e degli esempi numerici	In riferimento allo sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1): - Lo/la studente/ssa riconosce il feedback ricevuto. - Lo/la studente/ssa trae vantaggio dal feedback ricevuto o dalla comparazione con i/le pari (ad esempio, modificando la propria soluzione in accordo). - Lo/la studente/ssa fa riferimento al feedback ricevuto/ le strategie dei/delle pari in un passo successivo del suo percorso d'apprendimento
FA4.2	Lo/a studente/ssa interviene per/ l'insegnante sprona gli/le studenti/sse a intervenire per favorire lo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2), quindi, in particolare: - commentare/ dare feedback riguardo l'argomentazione di un/una altro/a studente/ssa, con particolare riferimento alle scelte strategiche e alla correttezza, chiarezza e completezza dell'argomentazione prodotta - spiegare la propria argomentazione ai/alle pari per aiutare la loro comprensione	In riferimento allo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2): - Lo/la studente/ssa riconosce il feedback ricevuto. - Lo/la studente/ssa trae vantaggio dal feedback ricevuto o dalla comparazione con i/le pari (ad esempio, modificando la propria argomentazione in accordo). - Lo/la studente/ssa fa riferimento al feedback ricevuto/ le strategie dei/delle pari in un passo successivo del suo percorso d'apprendimento

Infine, la quinta strategia di valutazione formativa riguarda il fatto che ciascuno studente diventa responsabile del proprio apprendimento, in ottica di autovalutazione. Questo comporta la capacità di rendere conto del proprio processo di apprendimento e la capacità di sapersi situare rispetto ai pari e rispetto agli obiettivi di apprendimento condivisi. Gli indicatori di attivazione (Tabella 6, Colonna 1) declinano queste capacità rispetto allo sviluppo del pensiero algebrico (FA5.1) e alle competenze argomentative (FA5.2),

prendendo in considerazione tanto l'intervento dello studente quanto l'eventuale invito a intervenire formulato dal docente. I corrispondenti indicatori di avvenuta realizzazione (Tabella 6, Colonna 2) si riferiscono alla capacità dello studente di descrivere il proprio processo di apprendimento in relazione agli specifici obiettivi di apprendimento (pensiero algebrico in FA5.1, competenza argomentativa in FA5.2). Per esempio, indicatore di attivazione è lo studente che si posiziona rispetto agli obiettivi di apprendimento chiedendo un chiarimento durante una discussione (FA5.1(c)) o anche dichiarando, in un questionario di autovalutazione, di non aver compreso appieno alcuni significati matematici trattati durante la lezione.

Rispetto all'avvenuta realizzazione, esempio dell'indicatore (FA5.1(ii)) è lo studente che esplicita il suo feeling con i simboli e la fiducia nella dimostrazione algebrica.

Tabella 6

Indicatori relativi alla strategia di valutazione formativa FA5: ciascuno studente diventa responsabile del proprio apprendimento, in ottica di autovalutazione. FA5.1 riguarda l'intervento degli/lle studenti/sse (in modo autonomo o in risposta alla richiesta dell'insegnante) per rendere esplicito il proprio processo di apprendimento, confrontarsi con le soluzioni dei/delle pari e posizionarsi rispetto agli obiettivi di apprendimento relativi allo sviluppo del pensiero algebrico, mentre FA5.2 rispetto allo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica

<i>FA5</i>	<i>Indicatore di attivazione</i>	<i>Indicatori di avvenuta realizzazione</i>
FA5.1	Lo/a studente/ssa interviene per / l'insegnante sprona gli/le studenti/sse al fine di promuovere lo sviluppo del pensiero algebrico, (vedi C1) quindi, in particolare: - a rendere trasparente ed esplicito il proprio processo di apprendimento rispetto all'uso/ il non uso dell'algebra e ai modi di farne uso per la risoluzione di problemi - a confrontare le soluzioni dei/delle pari per comprendere altre strategie e modalità di fare uso dell'algebra per risolvere problemi - a identificare il proprio posizionamento rispetto agli obiettivi di apprendimento dello sviluppo del pensiero algebrico	Se il suggerimento viene dall'insegnante: - Lo/a studente/ssa rende trasparente ed esplicito il processo d'apprendimento - Lo/a studente/ssa sa posizionare sé stesso/a rispetto all'obiettivo d'apprendimento dello sviluppo del pensiero algebrico (vedi C1) - Lo/a studente/ssa riconosce che l'ascolto attivo delle soluzioni dei compagni rappresenta una risorsa per il proprio apprendimento Se l'attivazione è a carico dello/a studente/ssa, essa coincide con la realizzazione della strategia
FA5.2	Lo/a studente/ssa interviene per / l'insegnante sprona gli/le studenti/sse al fine di promuovere lo sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2) quindi in particolare: - a mostrare/ descrivere/ esplicitare/ giustificare il proprio processo argomentativo e l'argomentazione prodotta - a confrontare le argomentazioni dei/delle pari per comprendere altre strategie e modalità di argomentare - a identificare il proprio posizionamento rispetto agli obiettivi di apprendimento di sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica	Se il suggerimento viene dall'insegnante: - Lo/a studente/ssa mostra/ descrive/esplicita/ giustifica la propria argomentazione - Lo/a studente/ssa sa posizionare se stesso/a rispetto all'obiettivo di apprendimento dello sviluppo della competenza argomentativa (vedi C2) - Lo/a studente/ssa riconosce che l'ascolto attivo delle argomentazioni dei compagni rappresenta una risorsa per il proprio apprendimento Se l'attivazione è a carico dello/a studente/ssa, essa coincide con la realizzazione della strategia

5. Un'Esemplificazione dell'Uso degli Indicatori

Per esemplificare l'uso dello strumento e discuterne la funzionalità, illustreremo, in questo paragrafo, l'analisi condotta su un caso studio: una sequenza didattica volta a promuovere la competenza argomentativa e il pensiero algebrico, co-progettata all'interno della comunità di ricerca DIVA al DIMA. Dapprima, presenteremo la sequenza didattica che è stata progettata sotto la guida del TRU e ha previsto la valutazione formativa come elemento cardine del design (tuttavia, presenteremo esclusivamente le fasi della sequenza didattica, rimandando a Quartara et al. (2024) per una discussione approfondita delle scelte di progettazione e del loro collegamento con le dimensioni del TRU). Di seguito, forniremo degli esempi di analisi, mostrando dapprima l'uso sistematico degli indicatori, in riferimento ad alcuni stralci di discussione. Inoltre, avvalendosi di esempi tratti da altre fasi della sequenza didattica, daremo contezza del monitoraggio attuato sull'intera progettazione. Infine, discuteremo la possibile interpretazione dell'analisi condotta con gli indicatori al fine, da un lato, di utilizzare questo strumento per monitorare la progettazione e implementazione didattica della sequenza e, dall'altro, di promuovere la riflessione del docente sulla propria pratica didattica.

5.1. Il Caso Studio

Il percorso didattico si è svolto nel mese di maggio 2023, per un totale di 8 ore curricolari, in una classe prima di liceo scientifico (opzione scienze applicate) composta da 18 studenti. La sequenza è caratterizzata da quattro fasi (Figura 2): individuale, piccolo gruppo, discussione di classe e autovalutazione.

Figura 2

Le fasi dell'attività didattica



La fase individuale è stata progettata per favorire una prima esplorazione della situazione matematica proposta nella scheda, con l'obiettivo di arrivare alla formulazione di una congettura motivata. Lo studente è stato coinvolto in una sfida autentica e produttiva, in cui le consegne non si limitavano a richiedere semplici risposte, ma stimolavano anche spiegazioni che potessero essere poi condivise con il gruppo.

La prima scheda, da svolgere individualmente, presenta una versione

riadattata di un quesito INVALSI (si veda Quartara, 2024 per il dettaglio della progettazione), *se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$?*, e dalla consegna *dopo aver letto il quesito compi una prima esplorazione della situazione proposta. Si tratta di un primo approccio al problema per cui non sentirti costretto/a a dover fornire una congettura definitiva.*

La seconda scheda, sempre individuale, propone il seguente quesito: *L'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?" Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri". Luisa afferma: "Si ottiene sempre un numero dispari". Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3". A seguito della tua esplorazione iniziale del problema e avendo letto le affermazioni di Mario, Luisa e Giovanni discuti, motivando la scelta, il valore di verità delle tre affermazioni".*

La terza scheda, da svolgere in piccolo gruppo, apre la seconda fase della sequenza didattica. Si presenta il quesito nella forma originale INVALSI, seguito da una consegna riformulata: *L'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?" Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri". Luisa afferma: "Si ottiene sempre un numero dispari". Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3". Chi ha ragione? A. Tutti e tre B. Solo Mario C. Solo Luisa D. Solo Giovanni. Scrivi qual è la soluzione scelta dal gruppo, specifica il motivo di tale scelta e spiega perché sono state scartate le altre opzioni.*

Dopo aver raccolto le risposte condivise di ciascun gruppo, si è passati alla discussione. Le soluzioni sono state proiettate alla lavagna e presentate alla classe dai gruppi. Successivamente, il docente e gli studenti hanno discusso le caratteristiche delle argomentazioni fornite a supporto delle diverse soluzioni. La sequenza didattica si è conclusa con un questionario di autovalutazione, somministrato tramite un modulo di Google, che conteneva le seguenti domande:

1. *Nell'affrontare il quesito hai avuto momenti di blocco? Se sì, quali?*
2. *Se hai avuto momenti di blocco che cosa hai fatto per provare a superarli?*
3. *Nella discussione nel piccolo gruppo hai condiviso il tuo ragionamento e la strategia per affrontare il quesito? Hai contribuito per la costruzione della risposta di gruppo?*
4. *Hai avuto difficoltà nell'ascoltare le opinioni dei tuoi compagni? Ti è servito il confronto per arrivare alla soluzione del quesito?*
5. *L'algebra dove è intervenuta e in che cosa ci ha aiutato?*
6. *Fai riferimento all'attività sul pensiero algebrico. Scrivi una domanda che vorresti fare alla classe.*

Nella progettazione dell'intero percorso si possono individuare scelte orientate

all'attivazione di strategie di valutazione formativa. Le indicazioni contenute nelle schede individuali sottolineano l'importanza di fornire risposte argomentate, con esplicitazione di uno degli obiettivi di apprendimento dell'attività (FA1). Inoltre, richiedere risposte argomentate è un modo per rendere il pensiero visibile (FA2) e quindi favorire i feedback da parte del docente (FA3) e dei pari (FA4). In questo senso, l'argomentazione diventa strumento per la valutazione formativa, come rilevato in Cusi, Morselli & Sabena (2017). La discussione di classe è un momento cruciale in cui il docente raccoglie informazioni sullo stato di apprendimento (FA2) e in cui gli studenti, giustificando le proprie risposte e commentando le risposte altrui, sono attivati come responsabili del loro apprendimento (FA5) e risorse per i compagni (FA4). Anche i momenti di lavoro di gruppo sono funzionali ad attivare gli studenti come risorse per i compagni (FA4). Infine, il questionario è stato ideato e realizzato con due finalità: dal punto di vista del ricercatore, è volto a monitorare le cinque dimensioni del quadro TRU. In particolare, la domanda 6 è formulata in ottica di valutazione formativa, per poter prendere decisioni sui passi successivi dell'attività, basandosi sulle necessità emergenti degli studenti. Dal punto di vista dello studente, l'intero questionario intende stimolare riflessioni meta legate all'autovalutazione (FA5). In questo senso, possiamo affermare che la valutazione formativa sia un elemento cardine della progettazione in oggetto.

5.2. *L'Analisi del Caso Studio Mediante gli Indicatori*

Presentiamo ora alcuni stralci dell'analisi condotta con gli indicatori di attivazione e realizzazione, a scopo esemplificativo, per mostrare dove essi possono essere rintracciati e il loro impiego come strumento analitico.

5.2.1. *Indicatori di Attivazione e Realizzazione: Dove Trovarli?*

Gli indicatori di attivazione, che contrassegnano momenti nei quali si creano le condizioni per la realizzazione delle strategie di valutazione formativa, possono essere ricercati in quelle fasi della sequenza didattica che sono state esplicitamente concepite in riferimento alla dimensione del TRU legata alla valutazione formativa, come descritto nella sezione precedente. Per quanto riguarda gli indicatori di compiuta realizzazione, questi sono invece da ricercarsi conseguentemente all'attivazione delle strategie. In particolare, all'interno del caso studio presentato, possiamo ricercare indicatori di realizzazione della strategia FA1 negli interventi degli studenti della discussione, come anche in risposta alla domanda del questionario di autovalutazione "*L'algebra dove è intervenuta e in che cosa ci ha aiutato?*".

La strategia FA2 si caratterizza in modo differente rispetto alle altre strategie. Infatti, la sua attivazione si concretizza in fase di progettazione e la sua realizzazione avviene quando le scelte di progettazione offrono opportunità di attivare le altre strategie di valutazione formativa. Dunque,

nell'implementazione didattica, è possibile trovare esclusivamente traccia della sua compiuta realizzazione. La strategia FA3 si vede realizzata sia nella discussione, quando gli studenti traggono beneficio dalle indicazioni del docente, ovvero nell'osservazione della progressione del loro apprendimento prima e dopo gli scambi con il docente. La strategia FA4 si realizza nel momento in cui gli studenti progrediscono nel loro apprendimento grazie allo scambio coi compagni, in fase di lavoro di gruppo ma anche di discussione collettiva. La strategia FA5 si realizza soprattutto quando gli studenti, nelle discussioni, esprimono un loro posizionamento rispetto al raggiungimento degli obiettivi dell'attività, indicano le proprie difficoltà e si fanno carico delle proprie affermazioni; la stessa strategia FA5 si trova realizzata anche nei moduli di autovalutazione, quando gli studenti riconoscono l'apporto fornito dai compagni per il proprio apprendimento.

Per fornire un esempio del possibile utilizzo sistematico degli indicatori, si è scelto di presentare in dettaglio l'analisi relativa all'attivazione e l'avvenuta realizzazione delle strategie di valutazione formativa in tre episodi tratti dalla discussione che ha fatto seguito alla risoluzione del task. Nella discussione con l'intera classe, infatti, risulta particolarmente evidente l'intrecciarsi delle diverse strategie attivate e realizzate. Tuttavia, sottolineiamo che non tutte le strategie vedono come momento principe della loro attivazione e realizzazione questa fase. Completeremo perciò con brevi esempi dell'analisi condotta sugli altri dati (ad esempio, le risposte ai moduli di autovalutazione).

5.2.2. *Un Esempio del Processo di Analisi*

Forniamo, dapprima, un'esemplificazione di come abbiamo proceduto ad associare gli indicatori agli interventi nella discussione, per rendere trasparente il processo di analisi. In particolare, l'esempio che proponiamo riguarda la strategia FA1 ed evidenzia come gli indicatori permettano di monitorare la valutazione formativa come processo che evolve in un arco temporale, nell'interazione dei membri della classe.

Troviamo tracce dell'attivazione della strategia FA1 (esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento) negli interventi del docente volti a chiarire gli obiettivi auspicati. Ad esempio, all'interno dell'episodio 1 della discussione (Tabella 7), dato che l'insegnante sottolinea l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare generalizzazioni, al seguente intervento (intervento 14.) abbiamo associato l'indicatore FA1.1(a) (sottolinea/rende esplicita l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni):

T: “[...] Beh sì, è la potenza dell'algebra: quella di generalizzare e condensare in una scrittura atomica infiniti numeri. Effettivamente è così eh, $2n$: abbiamo scritto in un secondo gli infiniti numeri pari [...]”

L'avvenuta realizzazione della strategia FA1 ha luogo, invece, quando troviamo

traccia nei protocolli degli studenti, negli interventi degli studenti durante la discussione o nei questionari di autovalutazione, dell'appropriazione degli obiettivi di apprendimento esplicitamente dichiarati dall'insegnante. Un esempio che riguarda gli interventi degli studenti nella discussione, di attivazione della strategia FA1.1(a), lo troviamo all'interno dell'episodio 3 (Tabella 9, intervento 8.):

Fede: “[...] si somma un numero dispari è inteso come qualunque numero dispari. In questo modo avevamo bisogno di una scrittura che potesse generalizzare un qualsiasi numero dispari, quindi abbiamo utilizzato $2n+1$ ”

5.2.3. *I Tre Stralci di Discussione Collettiva*

Mostriamo adesso l'analisi di tre episodi, selezionati dalla discussione di classe che ha introdotto il secondo incontro della sequenza didattica. Durante il primo incontro, gli studenti hanno affrontato il lavoro individuale e in piccolo gruppo sulla risoluzione del task, e una successiva discussione di sintesi focalizzata sulla correttezza delle soluzioni. Consolidata la validità delle risposte, il secondo incontro si è incentrato su una meta-riflessione mirata ad approfondire le argomentazioni prodotte dagli studenti. In particolare, il dibattito ha messo in luce il ruolo degli esempi numerici nelle argomentazioni, un aspetto individuato dal docente come strategico per supportare il passaggio dall'aritmetica al pensiero algebrico. Gli interventi delle discussioni relative ai tre episodi sono stati trascritti nella prima colonna delle Tabelle 7-8-9 che presentiamo, mentre nelle due colonne di destra sono rappresentati gli indicatori di attivazione e di avvenuta realizzazione.

Il primo episodio (min. 24:13 - min. 27:10 della seconda parte della discussione) è stato scelto perché illustra in modo evidente l'implementazione di strategie di valutazione formativa da parte del docente. L'insegnante (T) - unico attivatore di strategie in questa fase - interviene con l'obiettivo di identificare le criticità presenti nelle argomentazioni degli studenti e di guidarli verso gli obiettivi di apprendimento, ponendo enfasi sull'uso dell'algebra e sul ruolo degli esempi numerici nelle argomentazioni (in particolare, nell'intervento 14., pone enfasi su molteplici aspetti degli obiettivi legati al pensiero algebrico, dapprima a, poi b e d - Tabella 1). Il docente, inoltre, incoraggia gli studenti a giustificare le proprie scelte (interventi 1. e 3. sollecitano a giustificare il ruolo dell'esempio numerico nella argomentazione volta alla dimostrazione, 11.), attivandoli (attuando FA3 e FA5) sia come risorsa per sé stessi che per i compagni, offrendo feedback orientati al miglioramento (interventi 5., 9., 11.). Parallelamente, gli studenti rispondono con interventi che evidenziano una crescente consapevolezza del proprio apprendimento, posizionandosi attivamente rispetto agli obiettivi proposti (in particolare, intervento 8., 12.) e contribuendo con spiegazioni per supportare le risoluzioni proposte (intervento 2., 4., 6.), come anche per argomentare le affermazioni dei compagni (intervento 13).

Tabella 7*Analisi attraverso gli indicatori di attivazione e compiuta realizzazione dell'episodio 1*

<i>EPISODIO 1</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di compiuta realizzazione</i>
1. T: “Bene. Perché? Fede, se lo ricorda Fede perché avete fatto un esempio?”	FA1.2(f) FA5.1 FA5.2	FA2.1 FA2.2
2. Fede: “Abbiamo fatto un esempio per verificare che ... perché comunque volevamo anche una conferma pratica del fatto che la nostra osservazione fosse vera. Volevamo anche dare un modo per quando avremmo, magari, presentato anche per, come dire, avere un punto in più d'appoggio, non saprei”		FA2.2 FA5.2
3. T: “Sentiamo anche gli altri due. L'avete messo come punto su cui appoggiarsi, come punti di appoggio, come ancora di sicurezza, provare con $n=1$ e far vedere che viene 15?”	FA3.2(a) FA5.2	FA2.2
4. Franci: “Sì, cioè sì, anche se sappiamo che non generalizza tutti i numeri. Cioè, generalizzare tutti i numeri lo abbiamo già scritto sopra con $6n+9$ e 3 per $2n+3$, però abbiamo deciso di mettere un esempio non per confermare ma ...”		FA1.2(d) FA2.2 FA3.1 FA3.2 FA1.1(c) FA2.1 FA5.2
5. T: “Non vi fidate ancora tanto dell'algebra ma dei numeri ancora sì. Domanda, posso? Sembrerebbe così. Tu hai detto: sopra, algebricamente, lo abbiamo già fatto vedere in generale, poi abbiamo fatto l'esempio numerico. Allora io mi chiedo: perché non ci fidiamo ancora completamente dell'algebra che va a generalizzare, quindi devo fare uno sforzo ... [gesto come un corno che si origina dalla testa verso l'alto]”	FA1.2(f) FA3.1(a) FA5.2	FA2.1 FA2.2
6. Fede: “No, secondo me, è sempre meglio farlo. Non si sa mai, non è che ... però ...”		FA1.2(c) FA5.2
7. T: “Dici: non si sa mai. Bah, io direi ...”		
8. Fra: “Io non mi fido ancora”		FA2.1 FA5.2 FA3.1
9. T: “Oh, ecco. Lui non si fida ancora. Come mai tu non ti fidi ancora? Diccelo. Hai fatto una bellissima osservazione”	FA5.2 FA3.1(b)	

10. Fra: “No non lo so. Mi viene naturale fare ancora dei calcoli. Cioè ...”		FA2.1 FA5.2 FA3.1
11. T: “Eh, ma orientati a che cosa? Bella osservazione Fra”	FA1.2(d, f) FA5.1 FA3.1(b)	
12. Fra: “Non lo so, mi sento più sicuro con i numeri.”		FA2.1 FA3.1 FA5.1
13. Matti: “Forse perché, ancora, che adesso che è da poco che abbiamo a che fare con l’algebra, allora ci sembra strano che una cosa grande come la matematica ... Che, tutti i numeri infiniti, cose infinite, riescano a concentrarsi in poche parole, in poco scritto, ...”		FA5.2 FA3.1 FA2.1
14. T: “In pochi simboli! Beh sì, è la potenza dell’algebra: quella di generalizzare e condensare in una scrittura atomica infiniti numeri. Effettivamente è così eh. $2n$: abbiamo scritto in un secondo gli infiniti numeri pari. Eh beh, sì certo. Però è il problema ... diciamo, è sia, come dire, un limite perché non mi sto fidando ma è una potenza quella di poter scrivere $2n$. Certo non li vediamo tutti, bisogna fare affidamento all’astrazione Effettivamente sì. Quindi, diciamo, un ricorso a un numero ti da sempre ... Dice, <i>maniman</i> trovassi un ...”	FA1.1(a) FA3.1(b) FA1.1(b, d)	
15. Fede: “Controesempio”		FA1.1(b, c, f)

Il secondo episodio (min. 27:11 - min. 28:36 della seconda parte della discussione) strettamente collegato al precedente, è stato scelto perché mette in evidenza il processo attraverso cui gli studenti cercano di comprendere il proprio posizionamento nel percorso di apprendimento. In questo contesto, gli interventi del docente assumono particolare rilievo: attraverso un atteggiamento riflessivo, che funge da specchio per gli studenti, il docente fornisce feedback orientati a chiarire in che modo la consapevolezza del proprio stato di avanzamento possa essere utilizzata per progredire verso gli obiettivi di apprendimento, esplicitando anche i criteri necessari per il raggiungimento del successo. Troviamo, infatti, traccia dell’attivazione della strategia 3, in riferimento alla competenza argomentativa nell’ambito della dimostrazione algebrica (in particolare, per il ruolo degli esempi numerici) negli interventi 1, 3, 5, 9, 13, che si realizza (e anche per l’obiettivo di sviluppo del symbol sense) nelle risposte di una molteplicità di studenti (interventi 2, 4, 6, 11, 12).

Tabella 8

Analisi attraverso gli indicatori di attivazione e compiuta realizzazione dell'episodio 2

<i>EPISODIO 2</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di compiuta realizzazione</i>
1. T: “Che allora dici: ho sbagliato la manipolazione sopra, eh? Dimmi Tommi”	FA5.2	
2. Tommi: “Secondo me, allora, comunque, vedendo dai lavori che abbiamo fatto ci stiamo comunque abituando ad usare l'algebra, perché, ad esempio, questo esempio, lo hanno fatto dopo aver avuto la conferma di essere riusciti, cioè di ...”		FA3.2 FA5.2 FA2.2
3. T: “Ah, guardate che bello, Tommi fa una osservazione proprio sull'aspetto di struttura di come comparire la soluzione e ha detto: guardate che l'esempio non è stato il primo, quindi vuol dire che ci stiamo abituando, non abbiamo – non hanno usato l'esempio numerico, come dire, come partenza e poi hanno generalizzato. Sono andati a partire a generalizzare e poi dopo sono tornati indietro. Quindi, per Tommi, è un esempio del fatto che ci stiamo abituando a dare, in maniera, magari non ancora esplicita, importanza all'algebra invece che all'aritmetica. Potrebbe anche essere un'osservazione corretta”	FA4.2 FA3.2(a)	FA2.2
4. Fede: “Noi avevamo fatto così perché sappiamo che con un esempio - ci basterebbe trovare anche solo un controesempio per mandare a rotoli tutta la nostra affermazione. Allora c'è sembrato magari più sicuro agire in primo luogo con l'algebra”		FA1.2(d, f) FA2.2 FA3.1 FA3.2 FA4.2
5. T: “Allora, attenzione! Lui dice: avevamo il sentore che l'affermazione fosse vera. E quindi sapevamo che per dimostrare qualcosa non basta un esempio, allora abbiamo usato l'algebra.”	FA4.2 FA3.2 (a)	FA2.2
6. Fede: “Anche perché c'era scritto: spiegare perché ha ragione Luisa”		FA3.1
7. T: “No, c'era scritto: chi ha ragione punto interrogativo”	FA3.1(a)	
8. Fede: “Ah, allora non lo so”		
9. T: “Ma magari nel gruppo eravate già convinti che tutti e tre avevano ragione e volevate dimostrarlo. Può essere così eh!”	FA3.2(b)	

10. Fede: “No, non mi pare. Però, ci è sembrato comunque più diretto fare così”		FA5.2
11. Tommi: “Bene. Anche perché se si sa che si ha ragione non si cerca nemmeno il controesempio, no?”		FA1.2(d) FA2.2 FA3.2
12. Fra: “è anche vero che, però, cioè, usando l'algebra, magari, ti fa anche vedere se generalizzando si è sbagliato qualcosa e allora poi capire che, cioè, hai fatto qualcosa di sbagliato e poi andare a correggere”	FA5.1	FA3.1
13. T: “Quindi, mi stai dicendo, potevi magari trovare un controesempio e dire: ‘Cavolo! qualche manipolazione mi è sfuggita’ e andare a rivedere. Va bene.”	FA3.1(b)	

Il terzo episodio (min. 32:19 - min. 33:48 della seconda parte della discussione) è caratterizzato dalla partecipazione degli studenti come risorsa attiva, sia per il proprio apprendimento che per quello dei compagni (strategia 4 e 5). Questo aspetto si manifesta sia durante l'esposizione delle proprie risoluzioni (intervento 3., 5., 8., 13. in cui attuano la strategia 4 e la strategia 5), sia nel ruolo di ascoltatori attivi (intervento 1., 4., 13. come attivazione e 10. e 14. come conseguente realizzazione, in particolare, della strategia 4), attraverso un impegno mirato a comprendere e analizzare le strategie adottate dagli altri. Gli studenti mostrando così un alto grado di responsabilità nei confronti del proprio apprendimento (che corrisponde all'attivazione della strategia 5, in particolare nella sequenza di interventi 3., 4. 5.). In questo contesto, il docente assume un ruolo di facilitatore, stimolando la collaborazione e promuovendo l'attivazione degli studenti come risorsa reciproca nel processo didattico (attuando quindi la strategia 3, interventi 2., 4., 6.).

Tabella 9

Analisi attraverso gli indicatori di attivazione e compiuta realizzazione dell'episodio 3

<i>EPISODIO 3</i>	<i>Indicatori di attivazione</i>	<i>Indicatori di compiuta realizzazione</i>
1. Simo: “Io non capisco perché hanno scritto $2n+2n+1$, ma quel $2n+1$ non è $2n+3$?”	FA4.1	FA2.1
2. T: “Perché dici $2n+3$?”	FA3.2(b)	
3. Simo: “Eh, faccio riferimento a quello che abbiamo fatto noi nel nostro gruppo, che è poi quello che ha detto Auro. Là, abbiamo scomposto il 3”	FA5.1	FA3.1
4. T: “Allora, spiegatemi cosa avete voluto fare con quel $2n+1$ ”	FA3.2(b) FA5.1	FA2.2
5. Franci: “Abbiamo generalizzato ...”	FA5.1	FA3.1
6. T: “Che cosa? Dove deve guardare Simo?”	FA3.2(b)	FA2.2
7. Fede: “Devi guardare ... [sovrapposizione Fede e Franci]”		FA2.2
8. Fede: “Se guardi la parte in italiano che abbiamo scritto per affermare che Luisa, secondo noi, aveva ragione, se sommiamo un numero dispari - il numero dispari - si somma un numero dispari è inteso come qualunque numero dispari. In questo modo avevamo bisogno di una scrittura che potesse generalizzare un qualsiasi numero dispari quindi abbiamo utilizzato $2n+1$ ”	FA4.1	FA1.1(a, d) FA2.2 FA3.2
9. T: “Ok? E questo è $2n$ per un numero pari. Loro hanno voluto dimostrare la frase scritta in italiano”		FA2.2
10. Simo: “Quindi non fanno riferimento a 3 per $2n+3$ ”		FA4.1 FA2.2
11. Franci: “No”		
12. Simo: “Ok”		
13. Franci: “Però si può utilizzare quello che abbiamo scritto con $6n+9$ ”	FA4.1	
14. Simo: “Ok, ho capito. Grazie”		FA4.1

5.2.4. Esempi dall'Analisi Complementare sugli Altri Dati

Nelle tabelle di analisi della discussione, la FA2 è una strategia di cui non rileviamo mai l'attivazione poiché essa è esclusivamente rilevabile in fase di

progettazione (come specificato nel paragrafo 4). Un esempio di come tale strategia è stata attivata, in riferimento all'obiettivo di promozione della competenza argomentativa FA2.2 ma, di riflesso, anche rispetto all'obiettivo di sviluppo del pensiero algebrico (FA2.1), è dato dalla scelta del docente di progettare i protocolli dei gruppi sulla lavagna luminosa, presentandoli nell'ordine indicato in figura (Figure 3, 4, 5) per favorire lo svolgimento della discussione di cui abbiamo presentato precedentemente alcuni stralci.

Figura 3

Protocollo della risoluzione proposta dal gruppo 4

Gruppo_4 ⚠️ +

Giovanni ha ragione perché: se si sommano
 $2n+1 + 2n+3 + 2n+5 = 6n+9 \rightarrow 3 \cdot (2n+3) = 3 \cdot k \rightarrow$
 tutti multipli di 3.

Luiza ha ragione perché: $3(2n+3) = 3 \cdot k$
 $n=0 \rightarrow 3(2 \cdot 0 + 3) = 3 \cdot 3 \rightarrow$ valore minimo
 è il valore minimo di n $\rightarrow 3$ DISPARI

Mario ha ragione perché: se si moltiplica $\times 3$
 quindi il triplo si ottiene lo stesso numero che
 viene se sommi i tre numeri

$2n+1 + 2n+3 + 2n+5 = 6n+9 \rightarrow 3(2n+3)$
 $(2n+1) \cdot 3 = 6n+3$
 $(2n+3) \cdot 3 = 6n+9$
 $(2n+5) \cdot 3 = 6n+15$

$2m+3$ DISPARI
 $2m+2+1$
 $2(m+1)+1 = 2k+1$

Figura 4

Protocollo della risoluzione proposta dal gruppo 3

Gruppo_3

$m \in \mathbb{N}$
 $2m+1 + 2m+3 + 2m+5 = 6m+9 = 3 \cdot (2m+3) = 3K$

$K = 2m+3$
 $2m+2+1 = \text{dispari}$
 necessario di un m pari quindi un m dispari

LUISA HA RAGIONE
 numero numero numero
 $2n+1 + 2n+3 + 2n+5 = 3K$
 $K = 2n+3$
 $3 \cdot K$
 triplo

"Si ottiene il triplo di uno dei numeri"
 $\downarrow$
 $\cdot 3$

MARIO HA RAGIONE

GIOVANNI HA RAGIONE
 $3 \cdot K$
 un multiplo di 3, perché $K \in \mathbb{N}$
 $K \geq 3$

Figura 5

Protocollo della risoluzione proposta dal gruppo 2

Gruppo_2

MARIO HA RAGIONE PERCHÉ:

$$2n+1 + 2n+3 + 2n+5 \rightarrow 6n+9$$

$$\downarrow \parallel$$

$$3 \cdot (2n+3)$$

$$\downarrow \parallel$$

$$6n+9 \text{ è il triplo di } (2n+3) \quad \text{ogni numero sostituito a } n \in \mathbb{N} \text{ rende vera l'affermazione}$$

$$6n+9 = 3 \cdot (2n+3)$$

esempio?

$n=1$

$$2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$6 \cdot 1 + 9 = 15$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

LUISA HA RAGIONE PERCHÉ OGGI SE SOMMO UN NUMERO DISPARI AD UN NUMERO PARI OTTIENGO UN NUMERO DISPARI

$$2n + 2n + 1 = 4n + 1$$

GIOVANNI HA RAGIONE:

$$6n+9 \xrightarrow{\text{Fatt.}} 3 \cdot (2n+3) = 9z \text{ sono un multiplo di } 3$$

Che proiettare alla LIM le diverse soluzioni in sequenza abbia favorito la realizzazione di FA4, è testimoniato, ad esempio, dalle risposte fornite alla domanda “Quali analogie e quali differenze hai notato nel modo di lavorare durante le tre lezioni del venerdì, rispetto al modo usuale di procedere durante le lezioni di matematica?”, presente nel modulo di autovalutazione. Per esempio:

Ho notato una maggior condivisione delle proprie idee risolutive perché il prof invece di chiedere chi aveva avuto determinate idee ha messo a confronto ogni ragionamento (poiché glieli avevamo consegnati) lasciando ancora di più la parola a noi.

Le risposte al modulo di autovalutazione forniscono anche evidenze dell'avvenuta realizzazione della strategia FA1.1(a) (che esplicita l'importanza dell'uso dei simboli per rappresentare relazioni, generalizzazioni e dimostrazioni), in corrispondenza della richiesta *L'algebra dove è intervenuta e in che cosa ti ha aiutato?* Ne è un esempio la seguente affermazione di uno studente: “L'algebra mi ha aiutato nella generalizzazione delle mie risposte, rendendole più chiare e applicabili in molteplici casi”.

Similmente, troviamo nel modulo finale anche tracce della realizzazione della strategia FA1.2 (ulteriori rispetto a quelle già individuate negli stralci di discussione presentati), conseguente all'attivazione avvenuta in corrispondenza

degli interventi del docente durante la discussione, come il seguente espressamente rivolto a FA1.2(e):

T: [...] “Ormai lo abbiamo già sviscerato, adesso, il quesito. Quindi adesso lavoriamo anche sull’aspetto di capacità comunicativa di quello che vedete. Al secondo gruppo, adesso, sappiamo già tutto del quesito. Giusto? Allora facciamo un upgrade: andiamo anche a indagare sul livello di comunicabilità, di efficacia comunicativa, di quello che avete detto. Tradotto: se io lo leggo così, capisco cosa volevano dire? Ci siamo? Anche voi che lo avete scritto, riflettete su questa cosa. Anche gli altri possono intervenire”.

Ne è un esempio la risposta alla domanda “*Pensi che queste modifiche ti abbiano aiutato od ostacolato? Perché?*”, presentata nel modulo di autovalutazione con lo scopo di valutare le modifiche alla struttura didattica della lezione:

[...] ho avuto la possibilità di lavorare prima singolarmente, poi confrontandomi solo con un piccolo gruppo di compagni e infine con tutta la classe ottenendo così risposte ai quesiti più corrette ma anche più chiare nello svolgimento.

Si evince in questo intervento, infatti, l’avvenuta realizzazione in risposta alle strategie FA1.2 (c, e) attivate.

In risposta a questa domanda troviamo, inoltre, la seguente affermazione, “*Sono più concentrato parlando insieme e spesso ciò che non capisco mi viene chiaro nella discussione*”, che testimonia l’avvenuta realizzazione di FA2 (in riferimento alla progettazione di discussioni didattiche efficaci), ma al contempo si ricollega altresì all’avvenuta realizzazione di FA3 e FA4. Infatti, spesso, nelle risposte ai moduli di autovalutazione (così come mostrato anche relativamente agli interventi durante le discussioni di classe, nelle tabelle del paragrafo precedente), è possibile rintracciare una molteplicità di strategie che si realizzano contemporaneamente. A tal proposito, riportiamo un ultimo esempio di avvenuta realizzazione al contempo delle strategie FA4 (studenti diventano risorse gli uni per gli altri), FA5 (ciascuno studente diventa responsabile del proprio apprendimento) e FA1.2 (esplicitazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento dell’attività, in particolare, relativi allo sviluppo della competenza argomentativa per la dimostrazione algebrica), in risposta a una domanda riguardante le opportunità e difficoltà di confrontarsi con i compagni, presente anch’essa nel modulo di autovalutazione,;

Sicuramente è difficile comprendere al volo il metodo risolutivo di un gruppo, anche perché entrare nella testa dei compagni non è mai facile. Certe volte dei processi risolutivi adottati da altri gruppi mi facevano pensare ad altri processi risolutivi magari più chiari e completi che avremmo potuto usare, inoltre scelgo se immagazzinare i metodi adottati da altri gruppi per a mia volta usarli in futuro o se non immagazzinarli.

5.3. Quali Indicazioni dall'Uso degli Indicatori

In questa sezione, illustriamo alcune considerazioni tratte dall'analisi con gli indicatori del caso studio proposto. Verrà qui discussa l'efficacia, in riferimento all'implementazione delle strategie di valutazione formativa, sia delle scelte di progettazione che delle scelte intraprese dal docente in fase di attuazione, con l'obiettivo di mostrare la funzione degli indicatori come strumento operativo per supportare la riflessione sulla pratica e la riprogettazione. Infatti, attraverso l'analisi con gli indicatori di attivazione e realizzazione delle strategie di valutazione formativa, abbiamo l'opportunità:

- I. di mettere in luce gli elementi della progettazione che hanno permesso di mettere in atto pratiche di valutazione formativa, come quelli che invece sono stati più ininfluenti (obiettivo di monitoraggio);
- II. di promuovere una riflessione che ha per oggetto le azioni del docente, che son state rilevanti in fase di attuazione, rispetto allo specifico caso studio (obiettivo di riflessione).

Rispetto all'obiettivo di monitoraggio (I), per parlare di *effettiva realizzazione* della dimensione della valutazione formativa (componente chiave del design della sequenza didattica) andiamo ad osservare se le strategie, oltre ad essere attivate sono state realizzate con pervasività, coinvolgendo molteplici agenti.

Intendiamo, quindi, con *effettiva realizzazione* la concomitanza e la sinergia delle strategie di valutazione formativa che si sono, in primo luogo, attivate (creando l'opportunità per una loro attuazione) ma anche compiutamente realizzate, in molteplici occasioni e coinvolgendo una molteplicità di soggetti (il docente e una varietà di studenti). Nell'analisi qui presentata, tale rilevazione è di stampo qualitativo.

L'analisi effettuata porta evidenze della compiuta realizzazione della strategia FA2. Infatti, già dalla selezione di elementi proposti in questo articolo, possiamo osservare se e come la sinergia degli elementi previsti nel design dell'attività abbia promosso l'attuazione delle strategie di valutazione formativa. L'organizzazione dell'attività a step, che ha previsto due prime brevi fasi iniziali (una di esplorazione individuale e una dedicata ad un primo tentativo di risoluzione) ha responsabilizzato i singoli studenti nei confronti della risoluzione del problema algebrico, e quindi del proprio apprendimento nei confronti del primo obiettivo (realizzando FA5.1), consentendo di lavorare maggiormente sull'obiettivo di argomentazione, in piccolo gruppo, nella terza fase. Gli studenti, nel passaggio dalla soluzione individuale alla soluzione condivisa coi compagni, hanno avuto modo di divenire consapevoli dell'apporto dei compagni per il perseguimento dei due obiettivi di apprendimento (realizzando FA4.1 e FA4.2). Inizialmente, ciò si evince, in particolare, in riferimento all'obiettivo di sviluppo del pensiero algebrico: infatti, si osserva come i protocolli individuali non presentino una componente argomentativa rilevante, nonostante l'insegnante richieda di discutere motivando le scelte e il valore di verità delle affermazioni proposte. La realizzazione della quinta

strategia, in riferimento all'obiettivo di argomentazione (FA5.2), raggiunge invece il suo apice quando il docente, durante la discussione, chiede di commentare l'argomentazione proposta agli stessi studenti che l'hanno prodotta. Notiamo che l'attivazione delle strategie FA1.2 di esplicitazione degli obiettivi di apprendimento volti alla competenza argomentativa (come i criteri di chiarezza, completezza e correttezza), non erano enunciati nelle consegne, ma sono emersi esclusivamente in fase di discussione: questo può aver determinato il ritardo della realizzazione delle strategie rispetto a questo secondo obiettivo. Le discussioni, organizzate proiettando i protocolli in modo da confrontare le argomentazioni proposte dai diversi gruppi di studenti, hanno dato modo, una volta accertata la risoluzione del problema, di lavorare in modo più puntuale sulle caratteristiche delle argomentazioni, facendo divenire l'argomentazione non solo un mezzo ma un fine della discussione. Hanno perciò permesso di attivare e realizzare le strategie della forma FAX.2, che sono infatti predominanti nelle tabelle di analisi delle discussioni proposte. Con un'osservazione longitudinale delle tabelle, è anche possibile osservare come l'attivazione e realizzazione delle strategie del primo (FAX.1) e del secondo tipo (FAX.2) risultino intrecciate, a dimostrazione del ruolo dell'argomentazione nel favorire i processi di apprendimento rispetto agli elementi di contenuto sui quali si argomenta. Inoltre, possiamo osservare che il livello di difficoltà del problema proposto, che è risultato accessibile all'intera classe (infatti, ogni gruppo, ha fornito la soluzione corretta anche se con tempi differenziati), ha permesso di lavorare su meta-riflessioni per gran parte della discussione. La scelta di un task che garantisse l'accesso alla risoluzione (senza troppe difficoltà) a tutti gli studenti, può essere risultato particolarmente significativo per l'attuazione della valutazione formativa in questo contesto specifico in cui si affrontavano le prime attività di introduzione all'algebra. Un elemento particolarmente utile per l'obiettivo di monitoraggio sono stati i moduli di autovalutazione, consegnati al termine della sequenza didattica, che hanno dato l'opportunità di identificare l'avvenuta realizzazione delle strategie attivate nelle fasi precedenti: FA1, ad esempio, riconoscendo la caratterizzazione del symbol sense di Arcavi nel ruolo che ha avuto l'algebra nell'attività proposta, FA3 e FA4 quando gli studenti riconoscono l'apporto dei feedback del docente e dei compagni per il perseguimento degli obiettivi di apprendimento. Inoltre, i moduli hanno permesso l'attivazione della strategia FA5, attivando meta-riflessioni degli studenti sui propri processi d'apprendimento, che trovano realizzazione, ad esempio, nel questionario finale quando gli studenti esprimono i propri dubbi su quanto emerso, ponendo domande da rivolgere alla classe nel successivo incontro, oppure quando stabiliscono come si posizionano rispetto agli obiettivi dichiarati dal docente. Per concludere, possiamo dunque affermare che le scelte di progettazione hanno favorito un'effettiva implementazione della valutazione formativa.

Analizziamo ora le pratiche attuate dal docente. Innanzitutto, possiamo

osservare come, in fase di discussione, innescare riflessioni a livello meta, a partire dalle argomentazioni prodotte dagli studenti, con l'obiettivo di osservare il ruolo degli esempi numerici, sia una pratica risultata significativa per perseguire l'attuazione delle strategie del tipo FAx.2 (ovvero riferite all'argomentazione per la dimostrazione algebrica). Il docente ha attivato queste strategie, organizzando le discussioni; come, ad esempio, nella scelta di comparare le diverse soluzioni, richiedendo agli studenti di analizzarle in termini di chiarezza, correttezza e completezza. Notiamo, peraltro, come le azioni del docente siano sostenute dall'attuazione di pratiche strettamente connesse con i riferimenti teorici condivisi nella formazione del DIVA (e presentati nel paragrafo 2).

Inoltre, la pratica del docente di girare tra i banchi per cogliere gli elementi critici e catalizzanti, sia del lavoro individuale che di gruppo, per rilanciarli nella discussione, ha dato l'opportunità di rendere esplicito il pensiero degli studenti, soprattutto in riferimento alle difficoltà incontrate. Ciò ha permesso di fornire feedback (FA3.1) e attivare i compagni per sostenere l'apprendimento in risposta alle difficoltà emerse (FA4.1), offrendo inoltre l'occasione per riflettere sul ruolo dell'algebra e, quindi, rinforzando l'attivazione della strategia FA1.1.

Infine, nella fiducia reciproca testimoniata dagli interventi degli studenti - come l'affermazione di Fra, *“Io non mi fido ancora”*, o il commento di Simo, rispetto alla soluzione di un compagno, *“Io non capisco perché hanno scritto $2n+2n+1$, ma quel $2n+1$ non è $2n+3$?”* - accolti e valorizzati dal docente nella discussione, si intuisce che la valutazione formativa è parte della cultura della classe. Questo elemento ha senza ombra di dubbio un grande impatto nell'attuazione delle strategie.

6. Conclusioni

Nel contributo abbiamo presentato un prodotto di ricerca, risultante dal lavoro della comunità di ricerca DIVA al DIMA. La comunità utilizza il framework TRU (Schoenfeld, 2016) per promuovere la riflessione sulla pratica (Cusi & Robutti, 2017), sostenuta principalmente attraverso attività di co-progettazione, monitoraggio/valutazione, e ri-progettazione di attività didattiche che mirano ad essere efficaci rispetto agli obiettivi posti dai docenti. Ulteriori riferimenti teorici, condivisi nella comunità, vengono integrati in relazione alle specifiche dimensioni del TRU. Ad esempio, per la valutazione formativa, si fa riferimento alla definizione di Black & Wiliam (2009) e alle strategie di Wiliam & Thompson (2007). Questa integrazione rispetto al framework TRU, che pone la dimensione matematica al centro delle riflessioni, richiede la messa in relazione dei riferimenti teorici selezionati con le specifiche pratiche e significati matematici coinvolti. A loro volta, queste pratiche e significati matematici vengono inquadrati attraverso riferimenti teorici condivisi con i docenti: ad esempio, per lo sviluppo del pensiero algebrico si fa riferimento al symbol sense

(Arcavi, 1994) mentre, per lo sviluppo della competenza argomentativa nell'ambito della dimostrazione algebrica, si richiama il concetto di comportamento razionale (Morselli & Boero, 2011).

Per supportare la riflessione dei docenti, in particolare, in riferimento alla valutazione formativa, è stato creato uno strumento teorico-pratico che è espressione di questo processo di integrazione. Esso si profila come un supporto per monitorare e valutare l'attuazione di progettazioni che hanno previsto questa dimensione del TRU come elemento cardine del design. Questi indicatori, illustrati nell'articolo, declinano le strategie di Wiliam & Thompson (2007) rispetto alla dimensione matematica che, nello specifico, coinvolge lo sviluppo del pensiero algebrico e la pratica argomentativa in ambito dimostrativo. Essi si distinguono in indicatori di attivazione, ovvero indicatori che mostrano l'intenzionalità nell'implementare la strategia, e indicatori di avvenuta realizzazione, che mostrano un'efficace implementazione della stessa, ovvero gli effetti che si sono realizzati nel contesto classe a partire dalle condizioni createsi tramite l'attivazione. Oltre a descriverne la formulazione, è stato presentato un esempio d'uso degli indicatori attraverso un caso studio, che ci ha permesso di discutere la funzionalità di questo strumento per valutare l'effettiva realizzazione della valutazione formativa in classe, in termini di pervasività e molteplicità di agenti coinvolti.

L'analisi fine condotta con gli indicatori ha un duplice scopo. Da un lato, (I) valutare in che modo le scelte di progettazione, effettuate con l'obiettivo di promuovere la valutazione formativa, hanno favorito la realizzazione in classe di questa pratica, individuando le caratteristiche determinanti e le possibili modifiche in ottica di ri-progettazione. Dall'altro, (II) rendere il docente consapevole delle scelte prese in fase di attuazione, così come degli effetti di queste scelte, in termini di valutazione formativa. Tali effetti possono essere legati a caratteristiche della pratica didattica o a contingenze. In ogni caso, un'analisi critica può essere fondamentale per sostenere una riflessione che promuova la crescita professionale e personale.

Con un criterio di generalità crescente, i passi che possono fare seguito al lavoro qui presentato possono prevedere, innanzitutto, una valutazione della funzionalità di questi indicatori in progettazioni che hanno gli stessi obiettivi di apprendimento. Secondariamente, la realizzazione di indicatori per la valutazione formativa in presenza di altri obiettivi di apprendimento, ovvero la formulazione di indicatori che declinano le strategie rispetto ad altri riferimenti teorici selezionati in relazione agli obiettivi della dimensione matematica. Infine, ci proponiamo di costruire indicatori relativi alle altre dimensioni del TRU, come supporto per la riflessione sulla pratica dei docenti, in accordo con la proposta delle rubriche di Schoenfeld (2016). Infatti, l'applicabilità di quest'ultime per gli obiettivi sopra indicati (I-II) può risultare compromessa dalla difficoltà nel tradurre, rispetto a specifici obiettivi matematici, le domande presenti nelle rubriche. Pertanto, la creazione di strumenti teorico-pratici che

guidino l'analisi critica di docenti e ricercatori si è configurata come obiettivo di ricerca primario per la comunità DIVA al DIMA.

Riferimenti

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Bell, B., & Cowie, B. (2001). Teacher development for formative assessment. *Waikato Journal of Education*, 7, 37–49.
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5–31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>
- Boscolo, A., Morselli, F., & Robotti, E. (submitted). Formative assessment of the formative assessment implementation. A process for developing indicators to promote a TRU-based reflective practice.
- Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promuovere strategie di valutazione formativa in matematica con le nuove tecnologie: L'esperienza del progetto FaSMEd. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 9(14), 91–107.
- Cusi, A., & Morselli, F. (2024). The key-roles of the expert during classroom discussions aimed at fostering formative assessment processes through the use of digital technologies. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 741–755. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01572-0>
- Cusi, A., & Robutti, O. (2017). La collaborazione per rendere i docenti protagonisti della propria formazione: Esempi dall'Italia e dal mondo. In L. Giacardi, M. Mosca, & C. Sabena (Eds.), *Conferenze e seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016–2017* (pp. 231–248). L'Artistica Editrice.
- Habermas, J. (2003). *Truth and justification*. MIT Press.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Morselli, F., & Boero, P. (2010). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for the teaching and learning of proof. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6: Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 211–220). Lyon, France.
- Morselli, F., & Boero, P. (2009). Habermas' construct of rational behaviour as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 100–105). Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Morselli, F., & Boero, P. (2011). Using Habermas' theory of rationality to gain insight into students' understanding of algebraic language. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 453–481). Springer.

- Morselli, F., & Quartara, S. (2023). “My mind is getting used to always find a better solution process”: Formative assessment and self-regulation in secondary school algebra. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 4020–4028). Alfréd Rényi Institute of Mathematics & ERME.
- Quartara, S., Boscolo, A., Morselli, F., & Robotti, E. (2024). DIVA a DIMA: Un teaching experiment in ottica TRU. L’esperienza di un insegnante. In D. Marocchi, M. Rinaudo, & M. Serio (Eds.), *Atti del XI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, DI.FI.MA. 2023* (pp. 132–138).
- Schoenfeld, A. H., & Teaching for Robust Understanding (TRU) Project. (2016). *An introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) framework*. Graduate School of Education, University of California, Berkeley. https://www.map.mathshell.org/trumath.php_map.mathshell.org+1
- Schildkamp, K., van der Kleij, F. M., Heitink, M. C., Kippers, W. B., & Veldkamp, B. P. (2020). Formative assessment: A systematic review of critical teacher prerequisites for classroom practice. *International Journal of Educational Research*, 103, 101602. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2020.101602>
- William, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (pp. 53–82). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315086545>

Un'Analisi delle Concezioni sulla Dimostrazione di Studenti di un Corso di Laurea in Matematica

An Analysis of Students' Conceptions of Proof in a Mathematics Degree Course

Un Análisis de las Concepciones de los Estudiantes sobre la Demostración en una Licenciatura de Matemáticas

Tania Bertolini¹ e Miglena Asenova²

¹Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Italia

²Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano, Italia

Sunto. *Questo studio esplora le concezioni di studenti universitari riguardo alla dimostrazione matematica, focalizzandosi su un gruppo di 70 studenti iscritti a corsi di laurea triennale e magistrale in Matematica presso un'università italiana. Attraverso la raccolta e l'analisi di produzioni testuali personali (TEP), la ricerca indaga gli aspetti che determinano le concezioni degli studenti e come queste si modificano nel tempo, influenzate dal percorso accademico seguito. I risultati evidenziano una varietà di concezioni, raggruppate in categorie deduttive, desunte dalla letteratura, e induttive, ricavate dai dati, che riflettono sia le funzioni della dimostrazione, sia aspetti legati alle modalità di apprendimento, sia questioni legate alla struttura logica della dimostrazione. Lo studio offre una mappatura dettagliata delle concezioni sulla dimostrazione emerse durante la ricerca, facendo riferimento a una agenda di codifica appositamente predisposta per lo studio.*

Parole chiave: concezioni sulla dimostrazione di studenti universitari, studenti di un corso di laurea in Matematica, categorie di concezioni, TEP.

Abstract. *This study explores university students' conceptions of mathematical proof, focusing on a group of 70 students enrolled in bachelor's and master's degree courses in Mathematics at an Italian university. Through the collection and analysis of personal textual productions (TEP), the research investigates the aspects that determine students' conceptions and how this change over time, influenced by the academic path followed. The results reveal a variety of conceptions, grouped into deductive, i.e., deduced from literature, and inductive categories, i.e., inferred from data analysis, reflecting the functions of proof, aspects of learning modes, and issues related to the logical structure of a proof. The study provides a detailed mapping of the conceptions about proof that emerged during the research, with reference to a coding agenda.*

Keywords: proof conceptions by undergraduate students, students on a degree course in

Mathematics, categories of conceptions, TEP.

Resumen. *Este estudio explora las concepciones de los estudiantes universitarios sobre la demostración matemática, centrándose en un grupo de 70 estudiantes del curso de licenciatura y máster en Matemáticas en una universidad italiana. A través de la recogida y análisis de producciones textuales personales (PTE), la investigación indaga los aspectos que determinan las concepciones de los estudiantes y cómo éstas cambian a lo largo del tiempo, influidas por la trayectoria académica seguida. Los resultados destacan una variedad de concepciones, agrupadas en categorías deductivas, inferidas de la literatura, e inductivas, derivadas de los datos, que reflejan tanto las funciones de la demostración, como aspectos relacionados con los modos de aprendizaje y cuestiones relacionadas con la estructura lógica de la demostración. El estudio ofrece un mapeo detallado de las concepciones sobre la demostración que surgieron durante la investigación, haciendo referencia a una agenda de codificación.*

Palabras clave: concepciones sobre la demostración por parte de estudiantes universitarios, estudiantes de una licenciatura en Matemáticas, categorías de concepciones, TEP.

1. Motivazione e Struttura della Ricerca

Secondo Balacheff e Gaudin (2010) una concezione rappresenta uno stato di equilibrio dinamico in un sistema in cui soggetto e ambiente interagiscono tra loro.¹ Le concezioni sono quindi dipendenti dall'ambiente con cui lo studente interagisce (si veda p.e. Heinze et al., 2005, ma anche Hoyles, 1997) ed è plausibile assumere che esse si modifichino in base al percorso seguito dallo studente. Indagare le concezioni degli studenti che seguono un percorso universitario altamente specializzato in Matematica può fornire informazioni utili su come tale ambiente incida sulle loro concezioni e sullo sviluppo di queste ultime nel tempo. In Italia, dove la formazione dei futuri docenti di Matematica di scuola secondaria avviene prevalentemente nell'ambito dei corsi di laurea triennali e magistrali in Matematica, un'indagine in questa direzione può essere interessante per ottenere informazioni sulle concezioni dei potenziali futuri docenti di Matematica che hanno seguito un tale percorso formativo. Un quadro di riferimento il più possibile esaustivo sulle concezioni degli studenti universitari in Matematica sulla dimostrazione ha inoltre un valore intrinseco per la ricerca. Infatti, sapere come tali concezioni si conformano e sviluppano nel tempo, consente di mappare in maniera più efficace l'apprendimento di questo importante strumento matematico a questo livello di istruzione, ma può fungere da base anche per analoghe mappature in altri livelli scolastici. Questo articolo, tratto dalla tesi di laurea magistrale del primo autore (Bertolini, 2024), presenta una ricerca che si focalizza sulla caratterizzazione delle concezioni di

¹ Per una trattazione più esaustiva del termine 'concezione' si rimanda alla terza sezione, dedicata al quadro teorico.

un gruppo di 70 studenti universitari frequentanti un corso di laurea triennale o magistrale in Matematica presso un'università italiana, nonché sull'influenza del percorso da loro seguito nell'evoluzione di tali concezioni.

L'articolo è strutturato come segue. Nella sezione 2 viene caratterizzato il problema di ricerca, contestualizzandolo nella letteratura di riferimento, e vengono formulate le domande di ricerca. Nella sezione 3 viene esposto il quadro teorico che è composto da una prima parte, dedicata alla caratterizzazione della nozione di concezione, e una seconda parte, in cui vengono esposte le basi utili alla definizione a priori degli elementi costituenti le concezioni degli studenti. Nella sezione 4 viene presentato l'approccio metodologico generale della ricerca. La sezione 5 è incentrata sulla metodologia di analisi dei dati e sulla presentazione del sistema di categorie, nonché su alcuni esempi particolarmente significativi di analisi puntuale di risposte degli studenti. La sezione 6 è rivolta alla presentazione dei risultati e alla risposta alle domande di ricerca. La sezione 7 è dedicata alla discussione dei risultati. Nella sezione 8 si traggono le conclusioni di questo studio, evidenziandone alcune limitazioni e fornendo indicazioni su possibili futuri sviluppi.

2. Contestualizzazione del Problema di Ricerca e Formulazione delle Domande di Ricerca

In Italia, uno studente che si iscrive a un corso di laurea in Matematica, avrà molto probabilmente incontrato le prime dimostrazioni già nella scuola secondaria di secondo grado, p.e. nell'ambito della Geometria Euclidea e/o nell'introduzione all'Analisi (MIUR, 2010, pp. 337–341).

Tuttavia, sarà soprattutto nel corso degli studi universitari che lo studente avrà la possibilità di affrontare un'ampia gamma di dimostrazioni in quasi tutti i corsi e quindi in tanti contesti diversi, come quello dell'Analisi, della Geometria, dell'Algebra, della Fisica Matematica, ecc. in cui la dimostrazione assume un ruolo più vicino a quello che riveste per il matematico professionista: uno strumento di indagine che sancisce l'accettabilità del risultato ottenuto, sulla base del ricorso a 'schemi' ampiamente accettati nella comunità di riferimento, nel senso evidenziato da Thurston (2006). Sulla base della propria esperienza personale durante questo percorso, lo studente svilupperà delle concezioni personali riguardo al significato del concetto di dimostrazione in Matematica che influenzeranno il suo atteggiamento e le sue convinzioni nei confronti della dimostrazione stessa (Stylianou et al., 2015), così come le sue esperienze in aula (si vedano p.e. Ouvrier-Buffet, 2023; Stewart e Thomas, 2019). In letteratura non mancano studi riguardanti le concezioni sulla dimostrazione degli studenti di scuola secondaria di secondo grado (p.e. Balacheff, 1988; Healy e Hoyles, 2000). Anche per quanto riguarda l'istruzione universitaria, sono stati condotti diversi studi relativi alle concezioni degli studenti riguardo ad aspetti particolari della dimostrazione (p.e. Antonini, 2019,

riguardo all'accettazione della dimostrazione per assurdo; Stewart e Thomas, 2019, riguardo alle concezioni degli studenti sulle dimostrazioni in Algebra Lineare).

Jones (1998) analizza le concezioni sulla dimostrazione di laureati in Matematica che aspirano a diventare docenti della scuola secondaria di secondo grado, ricorrendo allo strumento delle mappe concettuali per indurre i partecipanti a una rappresentazione autonoma dei termini che essi considerano importanti per caratterizzare il concetto di dimostrazione nonché delle relazioni tra essi. L'autrice osserva che, tra gli insegnanti in formazione coinvolti nella ricerca, chi ha la competenza matematica più alta non necessariamente possiede le competenze necessarie per attuare un insegnamento più efficace della Matematica e, viceversa, chi ha una solida preparazione in ambito didattico, può avere una preparazione disciplinare insufficiente per garantire la profondità disciplinare necessaria per un insegnamento efficace. Jones (1998) non indaga però l'evoluzione delle concezioni nel tempo e non fornisce una definizione esaustiva delle categorie di concezioni usate dai partecipanti. Altre ricerche riguardano le concezioni degli studenti universitari che emergono dall'analisi del loro approccio a compiti specifici (si vedano Stylianou et al., 2015, ma anche gli studi classici di Balacheff, 1988, Coe e Ruthven, 1994, Harel e Sowder, 1998, nonché Healy e Hoyles, 2000).

Nonostante la vasta letteratura sull'argomento, le concezioni degli studenti universitari sulla dimostrazione rimangono un problema di ricerca ancora non sufficientemente approfondito almeno fino all'inizio del secondo decennio del XXI secolo. Questo emerge dal volume XIX ICMI Study (2012) sul tema *Proof and Proving in Mathematics Education*. Nel contributo di Cabassut et al. (2012) si legge che la letteratura solo raramente affronta la questione delle convinzioni in modo diretto ed esplicito (p. 179).² Inoltre, sempre nello stesso volume, Selden (2012) afferma che una delle questioni aperte nella ricerca è come gli studenti universitari concepiscono teoremi, dimostrazioni, assiomi e definizioni e le relazioni tra loro (p. 414).

A tale proposito, alcuni anni più tardi, Stylianou et al. (2015) indagano le posizioni di studenti dei primi anni di università sul significato del concetto di dimostrazione in Matematica e come queste si collegano al loro atteggiamento e alle loro convinzioni nei confronti della dimostrazione nonché alle loro esperienze in classe. Lo studio in questione coinvolge esclusivamente studenti dei primi due anni di università e conferma diversi aspetti già emersi dalla ricerca di Healy e Hoyles (2000), in particolare il fatto che gli studenti reputano più rigorosa una dimostrazione logico-deduttiva, mentre la prova più esplicativa e più vicina all'argomento 'che userebbero per spiegare il problema a uno dei loro compagni' è formulata in un linguaggio più discorsivo e meno formale. Gli autori analizzano le convinzioni (*belief*) degli studenti in relazione alla loro

² Consideriamo questo termine come sinonimo di 'concezione', rimandando alla sezione dedicata al quadro teorico per un chiarimento terminologico più approfondito.

attitudine nei confronti della Matematica e ai loro risultati complessivi in essa, mostrando che c'è effettivamente una correlazione tra i due parametri. Dallo studio si evince che gli studenti ad alto rendimento sono più propensi a scegliere un argomento 'deduttivo-simbolico' rispetto agli studenti con basso rendimento; inoltre, studenti abili in Matematica tendono nel complesso ad avere atteggiamenti più positivi e attivi rispetto ai loro colleghi con più basso rendimento in questa disciplina.

Per quanto noto agli autori, dal 2015 ad oggi, la letteratura sulle concezioni degli studenti universitari riguardo alla dimostrazione non sembra essersi arricchita di ricerche significative. A sostegno di questa affermazione riportiamo il già citato lavoro di Ouvrier-Buffet (2023), in cui l'autrice evidenzia la necessità di approfondimento del tema, proponendo un questionario in una prospettiva di indagine su larga scala al fine di innescare collaborazioni in Europa sulla caratterizzazione delle concezioni sulla dimostrazione degli studenti universitari. Evidenziamo inoltre che manca ancora in letteratura un sistema classificatorio che permetta di mettere a confronto diretto i risultati delle ricerche già condotte e possa servire come 'mappa' per le concezioni degli studenti in indagini future.

Il presente studio si inserisce nella direzione di ricerca appena evidenziata e si propone di indagare le concezioni sulla dimostrazione di studenti universitari dei corsi di laurea triennale e magistrale in Matematica. L'obiettivo è sia quello di caratterizzare le concezioni degli studenti riguardo alla dimostrazione, sia di analizzare se e come la frequenza del corso di studi (Matematica) influenzi queste concezioni. Infatti, pur non trattandosi degli stessi studenti seguiti negli anni, ipotizziamo che possa esserci un'evoluzione di tipologie di concezioni che sia dovuta alla frequenza di corsi di studi altamente specializzati, come sono quelli delle lauree triennale e magistrale in Matematica. A tale scopo sono state formulate le due seguenti domande di ricerca:

- DR1: Quali concezioni sulla dimostrazione manifestano gli studenti di corsi di laurea in Matematica?
- DR2: Quale influenza ha il percorso di studi universitari in Matematica sulle concezioni sulla dimostrazione?

3. Quadro Teorico

Dato che l'obiettivo della presente ricerca è quello di indagare le concezioni degli studenti sulla dimostrazione, è doveroso premettere una definizione del termine 'concezione', evidenziando anche la differenza tra questo e il termine 'convinzione' e chiarendo quindi il senso con cui il termine 'concezione' viene usato in questa ricerca. A questo aspetto è dedicata la prima parte del quadro teorico.

La seconda parte del quadro teorico è dedicata all'individuazione degli elementi teorici utili alla determinazione delle categorie deduttive delle

concezioni sulla dimostrazione. È possibile risalire a tali elementi per almeno tre vie: attraverso le fonti provenienti dalla ricerca d'aula in Didattica della Matematica, tramite indagini teoriche di natura epistemologica sulle funzioni della dimostrazione in Matematica (con intersezione dei risultati non vuota tra quest'ultima e la prima via), oppure tramite indagini storico-epistemologiche che mirano all'individuazione di possibili ostacoli epistemologici (Brousseau, 1989). Nella seconda parte del quadro teorico riportiamo quindi una breve trattazione delle fonti usate per individuare le categorie tratte dalla letteratura, suddividendole in tre sezioni: una relativa alle concezioni già emerse a vario titolo dalle ricerche d'aula in Didattica della Matematica, una relativa alle concezioni dedotte dalle funzioni della dimostrazione messe in evidenza nei lavori di natura epistemologica di Lolli (2005) sulla dimostrazione, una terza sezione in cui facciamo riferimento al concetto di ostacolo epistemologico come strumento per l'individuazione a priori di categorie di concezioni.

3.1. *Distinzione tra Concezioni (Conception) e Convinzioni (Belief) e il Legame tra Esse*

Dato che l'uso della terminologia in letteratura non è uniforme e a volte ci si riferisce indistintamente a concezioni (*conception*) e a convinzioni (*belief*), premettiamo una breve trattazione che evidenzia il senso in cui il primo dei due termini viene usato in questo articolo, distinguendolo dall'altro.

In letteratura si possono trovare diverse definizioni del termine *conception* (p.e. Balacheff e Gaudin, 2010; Cabassut et al., 2012; Philipp, 2007). In questo contesto ci focalizziamo sulla definizione fornita da Balacheff e Gaudin, poiché essa risulta utile per la presente ricerca: “una concezione è lo stato di equilibrio dinamico di un ciclo di azione/reazione tra un soggetto e un ambiente sotto vincoli restrittivi di attuabilità” (Balacheff & Gaudin, 2010, p. 217, traduzione degli autori). Balacheff e Gaudin (2010) si riferiscono alla citazione appena riportata come alla “definizione di concezione” (p. 13), mentre chiamano “modello di concezione” (p. 13) la quadrupla (P, R, L, Σ) , dove P sta per un insieme di problemi, R sta per un insieme di operatori, L sta per un insieme di rappresentazioni e Σ sta per un sistema di controllo. Gli autori considerano tale modello di concezione come “complementare alla sua definizione, e pensato per fornire uno strumento efficace per rappresentare concretamente e analizzare il corpo di dati che possono essere ottenuti attraverso l'osservazione delle attività degli studenti” (p. 13, traduzione degli autori). L'applicazione del modello presuppone quindi che ci sia un'osservazione delle attività dei soggetti le cui concezioni si intendono studiare, mentre la definizione si focalizza su una prospettiva più generale e meno articolata di tali concezioni, che non presuppone che ci sia una osservazione di attività, e la cui presenza può essere inferita anche dall'analisi di un testo, come nel caso di questa ricerca. La definizione di concezione di Balacheff e Gaudin (2010) richiede che ci sia la possibilità di osservazione della presenza di uno stato di equilibrio dinamico da

parte del soggetto, dopo che sia avvenuta una perturbazione, dovuta all'interazione con l'ambiente (*milieu*). Nel contesto specifico di questa ricerca, la perturbazione del sistema soggetto-*milieu* è rappresentata dalla richiesta fatta agli studenti di produzioni testuali personali (*TEP*, dal tedesco *Textuelle Eigenproduktion*, cioè produzione testuale personale) (D'Amore & Maier, 2002); tale richiesta rappresenta il *milieu* appositamente strutturato dal ricercatore. Notiamo che si tratta di una richiesta inusuale per il contesto in cui erano immersi gli studenti, paragonabile a un problema da risolvere. La risposta fornita nei *TEP* rappresenta invece lo stato di equilibrio raggiunto dallo studente in risposta alla perturbazione. Sottolineiamo che il focus del presente studio non è sulla distinzione tra processi e prodotti, ma sulle concezioni, in senso ampio, della e sulla dimostrazione, alle quali i partecipanti ricorrono nel confronto con il *milieu* appositamente predisposto, con l'obiettivo di ristabilire un equilibrio, causato dalla perturbazione del sistema soggetto-*milieu*. Evidenziamo inoltre che, nel corso degli studi universitari, possono verificarsi altre perturbazioni che saranno seguite da altre risposte intente a ristabilire l'equilibrio.³ Si deduce il carattere provvisorio delle concezioni: nella fase di apprendimento una concezione può essere 'rivisitata' come risultato dell'adattamento ad un nuovo contesto.

Prendendo spunto dalla definizione fornita da Balacheff e Gaudin (2010), nel presente studio ci focalizziamo dunque sul ruolo del contesto sulle concezioni e sul loro sviluppo, ma il nostro interesse non è rivolto alla determinazione della concezione complessiva di dimostrazione di ogni singolo studente coinvolto nell'indagine, bensì alla raccolta e mappatura di possibili concezioni sulla dimostrazione che emergono dall'analisi complessiva dei *TEP* di tutte le studentesse e gli studenti nel contesto universitario descritto.

In letteratura si riscontrano anche diverse definizioni di *belief*. Ad esempio, Schoenfeld (1992) evidenzia che essi sono "le comprensioni e i sentimenti di un individuo che modellano i modi in cui l'individuo concettualizza e si impegna nel comportamento matematico" (p. 358). Da questo emerge che i *belief* rientrano nell'ambito dell'*affect*.⁴ Abelson (1979) sottolinea che i sistemi di *belief* si basano fortemente su componenti valutative e affettive. Furinghetti e Pehkonen (2002) confermano che le convinzioni, quindi *belief*, riguardano sia

³ Ringraziamo i *referee* per aver sollevato la questione della appropriatezza della definizione di concezione usata, inducendoci a esplicitare meglio la nostra scelta. In questo senso riteniamo importante sottolineare che Balacheff stesso (Balacheff, 2013) dichiara che il modello cKc (conception, knowing, concept) (non la definizione) è creato con il proposito di fornire uno strumento utile per progettare situazioni didattiche e ambienti di apprendimento di oggetti matematici specifici. Il presente contributo non ha invece questo obiettivo e per esso la definizione di concezione di Balacheff e Gaudin (2010) rappresenta, a nostro avviso, una scelta appropriata.

⁴ Secondo Hannula (2012) l'*affect* coinvolge tutti quegli aspetti del pensiero umano che non riguardano la pura cognizione, come ad esempio le emozioni, le convinzioni, l'atteggiamento, il valore, la motivazione, i sentimenti, gli obiettivi, l'interesse, etc.

il dominio cognitivo sia quello affettivo. Ad esempio, chi ritiene che la Matematica sia noiosa, avrà maggiori difficoltà a comprenderla; chi non si reputa capace, non avrà fiducia nelle potenzialità e nell'utilità di tale disciplina (Furinghetti & Pehkonen, 2002).

Per chiarire il legame tra *conception* e *belief*, facciamo riferimento a Philipp (2007), citato da Cabassut et al. (2012): “[le concezioni sono] una nozione generale o struttura mentale che comprende beliefs, significati, concetti, proposizioni, regole, immagini mentali e preferenze (Philipp, 2007, p. 259)” (Cabassut et al., 2012, p. 175, traduzione degli autori). Da questo emerge che i *belief* sono inglobati nelle concezioni, secondo il punto di vista di Philipp, assunto anche da Cabassut et al. e nel presente lavoro. Questa prospettiva sulla relazione tra *belief* e concezioni non è in contraddizione con la definizione di concezione di Balacheff e Gaudin (2010), in quanto anche i *belief* possono essere intesi come stati di equilibrio, non esclusivamente di natura cognitiva, ma anche affettiva, frutto di un ciclo di azione/reazione tra un soggetto e un ambiente sotto vincoli restrittivi.

3.2. Individuazione delle Categorie Deduttive delle Concezioni sulla Dimostrazione

Per l'individuazione delle categorie deduttive non facciamo riferimento esclusivo alle ricerche sulle concezioni già presenti in letteratura e già menzionate nella sezione 2, anche perché spesso tali ricerche non hanno avuto un obiettivo classificatorio e quindi non forniscono delle categorie utili alla nostra indagine, ma anche alle numerose ricerche che si focalizzano sulle funzioni attribuite alla dimostrazione, sull'approccio alla dimostrazione in aula nonché sui diversi schemi dimostrativi.

3.2.1. Fonti per Categorie di Concezioni già Emerse dalle Ricerche d'Aula in Didattica della Matematica

Di seguito vengono riportati gli elementi individuati nelle fonti tratte dalle ricerche d'aula in Didattica della Matematica (Alibert, 1988; Balacheff, 1988; Coe & Ruthven, 1994; Dettori & Morselli, 2010; de Villiers, 1990; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000), da cui sono tratti degli elementi per la determinazione delle categorie deduttive. Di seguito, gli elementi utili alla determinazione delle categorie per via deduttiva sono evidenziati in corsivo.

De Villiers (1990) individua quelle che egli definisce le cinque funzioni più importanti della dimostrazione: *verifica* (riguarda la verità di un'affermazione ed è inerente alla validazione e al convincimento), *spiegazione* (fornisce informazioni sul perché un'affermazione è vera), *sistematizzazione* (riguarda l'organizzazione di vari risultati in un sistema deduttivo di assiomi, concetti principali e teoremi), *scoperta* (concerne la scoperta o l'invenzione di nuovi risultati), *comunicazione* (riguarda la trasmissione di conoscenza matematica). De Villiers afferma che a queste funzioni si potrebbero aggiungere la funzione

estetica oppure quella di *autorealizzazione* nel caso in cui la dimostrazione sia vista come strumento per misurare l'ingegno del matematico. Anche se de Villiers non indaga esplicitamente le concezioni degli studenti, le diverse funzioni attribuite alla dimostrazione sono ritenute utili alla classificazione delle concezioni in quanto è plausibile pensare che, se si ritiene che la dimostrazione svolga una certa funzione, questa funzione sia una categoria che concorre alla costituzione della concezione che si ha della dimostrazione stessa.

Alibert (1988) distingue tra 'prove per convincere' e 'prove per mostrare': le prime rientrano nella visione della prova come *verifica/convincimento*, mentre le seconde nella visione della prova come *spiegazione*, sulla base della classificazione fornita da de Villiers (1990).

Coe e Ruthven (1994) mettono in luce le strategie dimostrative acquisite da studenti inglesi formati nell'ambito di un curriculum di Matematica 'post-Cockcroft'.⁵ Dal loro lavoro si evince che pochi studenti ravvisano la necessità di spiegare regole e schemi o di inserirli in un sistema matematico più ampio. Secondo questo studio, la maggior parte delle strategie di dimostrazione dei soggetti coinvolti è di tipo empirico e la preoccupazione principale degli studenti è di convalidare regole e modelli rispetto ad alcuni esempi. Anche questi due autori indagano nel proprio lavoro tre funzioni della dimostrazione, rifacendosi al lavoro di Bell (1976): *verifica o giustificazione*, *illuminazione e sistematizzazione*. Anche queste categorie si possono ricondurre alla classificazione di de Villiers (1990), in quanto si sovrappongono ad alcune delle funzioni della dimostrazione già individuate da quest'ultimo.

Un'altra indagine di rilievo è quella di Healy e Hoyles (2000) che hanno analizzato le concezioni di studenti nella fascia d'età 14-15 anni sulla dimostrazione in Algebra. Individuano tre forme di dimostrazione: empirica, formale (algebrica) e narrativa. Dal loro studio emerge che c'è una differenza nella valutazione da parte degli studenti delle dimostrazioni che loro ritengono siano valutate in maniera positiva da un docente e quelle che loro reputano le migliori per sé stessi. Le prime sono quelle formali, cioè scritte in linguaggio algebrico, mentre le seconde sono quelle in forma narrativa e legate all'esperienza empirica, in particolare alla verifica su alcuni esempi, in linea con quanto individuato da Coe e Ruthven (1994). Infine, le ricercatrici codificano le descrizioni scritte dagli studenti sugli scopi della dimostrazione in tre categorie, seguendo e semplificando quelle esposte da de Villiers (1990): *verità*, *spiegazione* e *scoperta*.

Balacheff (1988) distingue le produzioni di dimostrazioni di quattordicenni tra *pragmatic proofs* e *intellectual proofs*. La prima tipologia di dimostrazione fa riferimento a un'azione efficiente fondata sulla manipolazione di oggetti concreti, mentre la seconda si basa sulla verbalizzazione di proprietà e sulle

⁵ Si fa riferimento al Cockcroft Report, risalente al 1982, che è il rapporto della Commissione d'Inchiesta sull'insegnamento della Matematica nelle scuole primarie e secondarie in Inghilterra e Galles, presieduta da Sir W. H. Cockcroft.

relazioni tra esse.⁶ Inoltre, Balacheff (1988) identifica quattro tipologie di approccio alla prova: *naïve empiricism*, secondo il quale la validità generale di un enunciato è dedotta dall'osservazione di alcuni singoli casi; *crucial experiment*, la cui origine potrebbe essere vista nella consapevolezza dell'insufficienza di una mera verifica basata su alcuni esempi che, però, si trova ancora all'interno di un limite cognitivo e di linguaggio che non consente allo studente di andare oltre; *generic example*, che è la generalizzazione di un esempio, sulla base di operazioni su un oggetto considerato come rappresentante di una classe; *thought experiment*, che è il risultato di un processo di decontestualizzazione, depersonalizzazione e detemporalizzazione a partire dall'esempio generico, in cui sono stati eliminati i riferimenti al particolare). Notiamo come soprattutto la tipologia del *naïve empiricism* sia stata riscontrata molto di frequente nelle ricerche citate in precedenza, come per esempio quella di Coe e Ruthven (1994) e in quella di Healy e Hoyles (2000). Anche nel caso di Balacheff, pur non trattandosi di una ricerca mirante ad individuare esplicitamente le concezioni degli studenti, gli approcci alla prova emersi forniscono degli strumenti operativi utili per indagare il modo di vedere la dimostrazione, in quanto il tipo di approccio alla prova è indice di una concezione implicita, più o meno distante dall'idea di dimostrazione in Matematica.

È rilevante in questo contesto anche il ben noto studio di Harel e Sowder (1998), il quale si focalizza sullo sviluppo della comprensione, della produzione e della valutazione delle dimostrazioni da parte degli studenti universitari. I due autori danno priorità alla dimostrazione come strumento di convinzione e derivano un sistema di categorie, dette 'schemi di dimostrazione', utili per classificare i comportamenti argomentativi degli individui. Harel e Sowder (1998) distinguono in prima istanza tra *schemi di prova di convinzione esterna* (suddivisi a loro volta in *schema di prova autoritario*, *schema di prova rituale* e *schema di prova simbolico*), *schemi di prova empirici* (suddivisi in *schema di prova induttivo* e *schema di prova percettivo*) e *schemi di prova analitici* (suddivisi in *schema di prova trasformatzionale*, a sua volta suddiviso in *schema di prova internalizzato*, *interiorizzato* e *restrittivo*, e *schema di prova assiomatico*, a sua volta suddiviso in *schema di prova intuitivo-assiomatico*, *schema di prova strutturale* e *schema di prova assiomatizzante*). Tali categorie rappresentano elementi utili alla determinazione di categorie tratte dalla letteratura, in quanto, come anche nel caso delle funzioni della dimostrazione, anche uno schema di prova che un soggetto adotta nella produzione di dimostrazioni è un elemento che incide sulla sua concezione di quest'ultima. Nella classificazione proposta da Harel e Sowder diventa anche chiaro come i *belief* possono rientrare in quelli relativi alle *conception*. Questo è particolarmente evidente nella caratterizzazione degli schemi di prova di

⁶ Per una trattazione più approfondita delle tipologie di dimostrazione rimandiamo al paragrafo 5.2. della quinta sezione, dedicata alla schematizzazione del sistema di categorie.

convinzione esterna, che fanno riferimento ad aspetti del pensiero umano che non riguardano la pura cognizione.

Infine, citiamo lo studio di Dettori e Morselli (2010) sui *belief* di insegnanti in formazione riguardo alla dimostrazione, dal quale emerge un aspetto 'funzionale' della dimostrazione, già rilevato da Polya (1967), ovvero quello della dimostrazione come *accorgimento mnemotecnico*, nel senso che conoscere i passaggi dimostrativi aiuta a ricordare meglio ciò che si vuole dimostrare e apprendere.

3.2.2. *Fonti per Categorie di Concezioni già Emerse dalle Indagini Teoriche di Natura Epistemologica sulle Funzioni della Dimostrazione in Matematica*

Nella determinazione di questo tipo di categorie, abbiamo considerato anche la classificazione delle funzioni della dimostrazione secondo Lolli (2005), che in questo contesto assume la prospettiva dell'epistemologo della Matematica.

Evidenziamo che, a differenza di quelle esaminate in precedenza, le funzioni messe in evidenza da Lolli non sono state dedotte sperimentalmente e non rientrano nella letteratura in Didattica della Matematica. Tuttavia, esse possono risultare utili ai fini della presente ricerca, in quanto è possibile che gli studenti di Matematica universitari facciano riferimento anche a funzioni della dimostrazione che non sono emerse dagli studi esaminati in precedenza, molti dei quali relativi a studenti più giovani. Riportiamo di seguito le funzioni individuate da Lolli (2005), mettendo in evidenza che alcune di esse si sovrappongono con quelle evidenziate da de Villiers (1990); in particolare *fornire spiegazioni, spiegare mediante riconduzione agli assiomi, spiegare mediante generalità, spiegare mediante sussunzione, spiegare mediante la semantica e spiegare 'perché non'* rientrano nella categoria *Spiegazione* (De Villiers, 1990); *stabilire collegamenti* rientra nella categoria *Sistematizzazione* (De Villiers, 1990); *provare la correttezza* rientra nella categoria *Verifica* (De Villiers, 1990); *scoprire controesempi* rientra nella categoria *Scoperta* (De Villiers, 1990); le funzioni individuate da Lolli (2005) che non si sovrappongono con quelle evidenziate da de Villiers (1990) sono: *evitare i calcoli; predire i risultati; controllare lo strumento; aumentare l'affidabilità; fare economia; suggerire generalizzazioni; trasportare risultati; fare due passi invece di infiniti; definire la semantica; risolvere problemi; esplicitare il contenuto costruttivo; estrarre algoritmi; fare umorismo; semplificare la vita; risparmiare risorse; sprecare risorse; creare concetti; inventare forme di ragionamento; resuscitare; refutare; suggerire teoremi; suggerire assiomi; suggerire le ipotesi giuste; vedere i risultati; sostituire l'intuizione; permettere l'intuizione; vedere quel che non c'è; raffinare l'intuizione; confermare l'intuizione; definire l'intuizione.*

Tutte le funzioni di Lolli (2005) appena riportate, contrassegnate con nomi che consideriamo autoesplicativi, sono rilevanti ai fini di questo studio, il cui

obiettivo è individuare tutte le categorie che emergono dai dati raccolti, riconoscendo eventuali categorie già presenti in letteratura, e individuandone delle nuove.

3.2.3. *Fonti per Categorie di Concezioni Tratte da Indagini Storico-Epistemologiche che Mirano all'Individuazione di Possibili Ostacoli Epistemologici*

L'epistemologo della scienza Bachelard (1938) afferma che le cause della stagnazione, o addirittura regresso, dell'evoluzione del pensiero scientifico in alcuni momenti della sua storia, sono da ricercarsi nelle difficoltà intrinseche del processo conoscitivo. Egli chiama la resistenza psicologica all'atto del conoscere in tali contesti *ostacolo epistemologico*.

Brousseau (1989), mutuando l'idea di ostacolo epistemologico da Bachelard, introduce questo concetto nell'ambito della Didattica della Matematica, attribuendogli il significato di conoscenza, invece che di mancanza di conoscenza, che, da un certo punto in poi dell'evoluzione della comprensione di un concetto, porta a generare contraddizioni e risposte false o inadeguate.

Come è ben noto dalla ricerca (p.e. Brousseau, 1989; D'Amore et al., 2006) gli ostacoli epistemologici evidenziati nel percorso dello sviluppo della disciplina si riscontrano spesso anche nelle concezioni degli studenti. L'individuazione degli ostacoli epistemologici è dunque utile per la presente ricerca perché categorie di concezioni ad essi collegate potrebbero emergere nelle concezioni degli studenti coinvolti nell'indagine. Tuttavia, l'analisi dell'evoluzione storico epistemologica è utile non solo nell'individuazione di eventuali ostacoli epistemologici, ma serve anche per l'identificazione di eventuali concezioni basate su di essi. Per individuare possibili ostacoli epistemologici sulla dimostrazione, facciamo riferimento a Asenova (2019). L'autrice, prendendo spunto da Barbin (1994/1988), evidenzia tre importanti ostacoli epistemologici in questo ambito, basati sulle seguenti convinzioni:

- la convinzione che il concetto di dimostrazione in Geometria Euclidea possa essere utilizzato per spiegare il ragionamento matematico; questa convinzione viene fatta risalire all'influenza del pensiero parmenideo, secondo cui la 'via della verità', cioè il processo dimostrativo basato sul ragionamento logico, è l'unica via che può convincere, in quanto è l'unica che conduce alla verità;
- la convinzione che la contraddizione in Matematica abbia il ruolo di convincere e che dimostrare significhi convincere qualcuno della verità di un enunciato, piuttosto che di stabilire la coerenza in un sistema assiomatico, cioè la validità dell'enunciato in esso; questa convinzione viene fatta risalire all'influenza delle innovazioni del XVII secolo che hanno portato alla nascita di numerosi metodi matematici, caratterizzati da una grande forza esplicativa, ma ancora privi di una dimostrazione di validità, come per esempio il metodo degli indivisibili; il culmine della cristallizzazione di tale

convinzione si trova nell'opera *Discorso sul Metodo* di Descartes (2002/1637);

- la convinzione che la Matematica non sia un discorso in sé ma uno che tratta di qualcosa che esiste davvero e che dimostrare significhi provare la verità di un'affermazione e non la sua validità in un metalinguaggio, così come la supposizione dell'unitarietà tra linguaggio naturale e linguaggio matematico, con la conseguente mancanza di consapevolezza della complessa relazione tra essi; questa convinzione è legata all'emergere dei moderni sistemi assiomatici, in cui viene esclusa qualsiasi evidenza non puramente logica.

Il superamento dei primi due ostacoli richiede l'accesso a una specifica cultura di pensiero matematico che fonda le sue radici nella tradizione della Grecia Antica. Il superamento del terzo necessita di una trasposizione specifica che dipende dalle peculiarità del linguaggio naturale di riferimento. L'individuazione di questi ostacoli epistemologici ha consentito di categorizzare molte delle categorie di concezioni emerse dai dati, come verrà mostrato nella parte dedicata alla discussione dei risultati.

4. Metodologia Generale della Ricerca

4.1. Caratterizzazione Generale della Raccolta Dati

I soggetti coinvolti nella ricerca sono studenti del primo e del terzo anno della laurea triennale e studenti della laurea magistrale del corso di laurea in Matematica di un'università italiana. Il campione è stato così scelto per comprendere come cambia la concezione sulla dimostrazione da parte degli studenti universitari durante il corso di studi in Matematica. Nessuno dei soggetti coinvolti ha seguito un corso di Logica e nessuno degli studenti della laurea triennale ha seguito un corso di Didattica o di Fondamenti della Matematica. I dati sono stati raccolti nel mese di maggio, a conclusione dell'anno di studi, quindi le concezioni emerse dagli studenti del primo anno della laurea triennale non sono unicamente frutto dei loro precedenti studi scolastici, ma hanno risentito dell'influenza dei primi corsi frequentati.

I dati per la ricerca qui esposta sono stati raccolti nel 2019 sotto forma di *TEP* da parte del secondo autore dell'articolo e sono stati inquadrati teoricamente e analizzati nell'ambito della tesi magistrale del primo autore. I *TEP* sono produzioni nelle quali lo studente si libera da condizionamenti linguistici e usa espressioni il più possibile spontanee, volendosi esprimere in modo a parer suo comprensibile per il destinatario e con linguaggio personale (D'Amore & Maier, 2002).

La raccolta dati è avvenuta durante le ore di lezione degli studenti, con l'autorizzazione dei docenti dei corsi. Specifichiamo che chi ha raccolto i dati non era docente dei corsi frequentati dagli studenti coinvolti. Gli studenti sono

stati informati che la raccolta dati fa parte di una ricerca nell'ambito della Didattica della Matematica.

In totale hanno partecipato 71 studenti e studentesse: 47 del primo anno di laurea triennale; 16 del terzo anno della laurea triennale; 8 della laurea magistrale. Specifichiamo che uno dei 71 *TEP* non è risultato utile ai fini di questa ricerca, dato che non rispondeva alla domanda della consegna del *TEP*, volta a far emergere le concezioni sulla dimostrazione. Si tratta di quello di uno studente del primo anno della laurea triennale.

Per la realizzazione del *TEP* è stato stimato un tempo di svolgimento di circa 20 minuti che si è rivelato sufficiente per tutti gli studenti coinvolti nell'indagine.

4.2. Testo della Richiesta del *TEP*

Riportiamo di seguito il testo della richiesta del *TEP*, rivolta agli studenti.

Giada, una studentessa di quarta superiore che l'anno prossimo vorrebbe iscriversi a Matematica, ti chiede di spiegarle che cos'è una dimostrazione e a che cosa serve in Matematica.

Finora lei ne ha viste davvero poche a scuola e non è riuscita a farsi un'idea al riguardo, ma ha sentito dire che nel corso di laurea in Matematica le dimostrazioni si usano tantissimo.

Potresti aiutarla con una spiegazione?

Sentiti libero/a di usare il metodo e il linguaggio che preferisci e che ti sembrano i più efficaci per aiutarla a capire.

Puoi consegnare il tuo foglio in maniera anonima, senza scrivere il tuo nome; è sufficiente che tu scriva se sei maschio o femmina.

Grazie per la collaborazione, anche a nome di Giada.

I soggetti coinvolti nella ricerca, avendo scelto di intraprendere il percorso degli studi universitari in Matematica, si sono trovati pochi anni prima nella stessa situazione in cui ora si ritrova Giada, ma nel frattempo hanno avuto modo di incontrare e studiare una grande quantità di dimostrazioni, già dal primo anno e a maggior ragione fino al corso di laurea magistrale. Chiedere a questi studenti di 'aiutare' Giada nel comprendere meglio che cosa sono e a che cosa servono le dimostrazioni in Matematica, rappresenta una scelta mirata.

Infatti, la scelta del tipo di destinatario (una studentessa più giovane che si trova in una situazione simile a quella da loro vissuta), la scelta di raccogliere i dati per mezzo di una produzione scritta che dà il tempo per riflettere ed eventualmente riformulare la propria risposta, la specificazione nella consegna del fatto che si è liberi di scegliere il metodo e il linguaggio da usare, sono tutti fattori che hanno contribuito a creare delle condizioni favorevoli all'emergere delle concezioni autentiche degli studenti universitari sulla dimostrazione, in linea con le caratteristiche dei *TEP* precedentemente evidenziate.

4.3. *Metodi Qualitativi e Quantitativi*

L'analisi dei dati è stata condotta ricorrendo in prima istanza a un metodo qualitativo, in particolare definendo delle categorie per via deduttiva (chiamate di seguito 'categorie deduttive'), cioè tratte a-priori dalla letteratura, e per via induttiva (chiamate di seguito 'categorie induttive'), cioè definite a partire dai dati raccolti, in accordo con il metodo di *Qualitative Content Analysis* (QCA, Mayring, 2015).

La scelta dell'uso di questo metodo è strettamente legata alle due domande di ricerca che sono state formulate. Infatti, dato che l'obiettivo è quello di studiare le concezioni degli studenti sulla dimostrazione, è significativa un'analisi che ne studi e interpreti le caratteristiche e dunque le qualità che emergono dal testo, piuttosto che le quantità.

Secondo Mayring (2015), il sistema di categorie, la cui definizione è riassunta in una agenda di codifica (Mayring, 2000), rappresenta lo strumento centrale della QCA ed esso è stato usato in questo senso nella presente ricerca.

Una volta individuate le categorie, l'analisi dei dati è di tipo quantitativo nell'indagare la frequenza delle diverse categorie.

5. **Analisi dei Dati**

5.1. *Metodo di Analisi dei Dati*

Per realizzare l'analisi dei dati sono stati letti tutti i *TEP* prodotti dagli studenti coinvolti, nel seguente ordine: primo anno di laurea triennale, terzo anno di laurea triennale e laurea magistrale. Lo scopo di questa prima lettura è stato quello di individuare la presenza di eventuali categorie definite per via deduttiva, sulla base degli elementi teorici emersi dalle analisi descritte nel paragrafo 3.2., cioè attraverso lo studio della letteratura di riferimento.

Sulla base di questa prima lettura, sono state riorganizzate le categorie deduttive, raggruppandole su più livelli, in una struttura gerarchica. In particolare, ne è stata realizzata una schematizzazione sulla base dei termini linguistici che sono stati considerati come indicatori della presenza di tali categorie (in linea con la QCA, Mayring, 2015). La ripartizione su più livelli è stata concepita per far sì che le concezioni degli studenti emerse dai *TEP* potessero rientrare in categorie più ampie, sulla base di determinate caratteristiche in comune.

Si è poi proceduto con una seconda lettura al fine di ricercare parole chiave per la creazione di nuove categorie induttive. La schematizzazione delle categorie deduttive è stata ampliata aggiungendo le nuove categorie induttive, creando un unico schema onnicomprensivo. Lo schema completo delle categorie è disponibile in Bertolini (2024), mentre in questa sede ci si focalizza solo sulle categorie effettivamente riscontrate durante l'analisi.

Grazie al lavoro di intreccio tra letture ripetute e strutturazione progressiva

dello schema di categorie descritto in precedenza, è stato possibile isolare gli elementi più significativi dei *TEP* che hanno permesso di ‘ritrovare’ degli elementi riconducibili a delle categorie deduttive e/o di mostrare l’emergenza di nuove categorie induttive. In linea con quanto richiesto dalla metodologia della QCA, è stata elaborata l’agenda di codifica (Mayring, 2000), nella quale sono riportate le categorie, la loro definizione, degli esempi per ciascuna di esse, nonché le regole di codifica seguite. Un estratto di tale agenda di codifica è riportato a titolo esemplificativo nell’appendice.

Nei paragrafi successivi presentiamo in maniera dettagliata le modalità con cui sono state individuate e denominate le categorie induttive emerse (paragrafo 5.2.) nonché un’analisi dettagliata di tre *TEP* per esemplificare l’emergere di queste categorie (paragrafo 5.3.).

5.2. Categorie Induttive

Per completezza, riportiamo nel seguito la schematizzazione dettagliata ed esclusiva delle categorie induttive, ovvero contenente solamente le nuove categorie definite a partire dai *TEP* raccolti per questa ricerca.⁷ Abbiamo stabilito di definire delle nuove categorie per via induttiva anche nel caso in cui esse siano state riscontrate solamente in un testo. Una tale categorizzazione è utile a classificare e a caratterizzare in maniera accurata e completa le concezioni degli studenti.

Le categorie sono state organizzate su più livelli: uno rappresentato dai punti e l’altro dai trattini nell’elenco puntato. Abbiamo inserito un primo livello (quello rappresentato dai punti), perché abbiamo osservato che alcune categorie induttive rientrano in categorie deduttive relative alle funzioni della dimostrazione, in particolare *Verifica*, *Spiegazione* e *Scoperta* (De Villiers, 1990), e ne rappresentano una particolare nuova specificazione.

Nell’analisi, la sigla LT1 indica che si tratta del *TEP* di uno studente o di una studentessa del primo anno della laurea triennale; LT3 indica che si tratta di uno studente o di una studentessa del terzo anno, mentre LM indica uno studente o una studentessa della laurea magistrale.

CATEGORIE RELATIVE ALLE FUNZIONI DELLA DIMOSTRAZIONE

- *Verifica*

- *Dimostrazione come garanzia di rigore.* La Matematica è vista come il fondamento delle altre scienze; perciò, è importante che essa goda di un elevato rigore, garantito dalla dimostrazione. Esempio: *Proprio perché la Matematica è un importante appoggio per molte altre scienze è necessario che tali fondamenta siano solide. Per questo motivo sono*

⁷ Dal link [Tabella completa delle categorie](#) è possibile accedere a una tabella riassuntiva completa delle categorie riscontrate nei *TEP*, con riferimenti espliciti a esempi riscontrati nei *TEP*.

importanti le dimostrazioni (LT1, M).

- *Spiegazione*
 - *Dietro le quinte*. Fuor di metafora, la dimostrazione è tutto ciò che si cela dietro ad un'affermazione matematica. Esempio: *La dimostrazione è il dietro le quinte di uno spettacolo* (LT1, F).
 - *Didattica*. La dimostrazione ha una funzione didattica, in particolare quella di far capire agli studenti il 'metodo matematico'. Esempi: *Si tratta di strumenti fondamentali non solo per capire come si è potuti giungere a un determinato risultato ma anche per comprendere a fondo il metodo di ragionamento dell'ambito di studio* (LT1, F); *[Le dimostrazioni] sono inoltre utili dal punto di vista didattico per farci capire come si è arrivati a una certa verità che ci sembra magari scontata ma che così scontata non è* (LT3, M).
- *Dimostrazione come strumento di scelta*. La dimostrazione è vista come uno strumento di selezione di verità matematiche. Consente di distinguere 'ciò che è', ovvero un risultato dimostrato, da ciò che potrebbe essere, ovvero una congettura. Esempi: *Chiunque potrebbe inventarsi una formula [...] ma solo se può dimostrare che questa è matematicamente corretta può usarla* (LT1, F); *In Matematica, se non esistessero le dimostrazioni, ognuno potrebbe dire la sua, creare teoremi, definizioni* (LT1, F).
- *Scoperta*
 - *Dimostrazione come mezzo per aprire gli occhi*. La Matematica senza dimostrazione sarebbe come percorrere un sentiero con gli occhi bendati, rischiando di inciampare. Esempio: *Se non sei a conoscenza della dimostrazione che ci sta dietro è come se stessi percorrendo un sentiero con gli occhi bendati* (LT1, M).
- *Concretizzazione*. La dimostrazione ha la funzione di concretizzare un'idea, rappresentata da una congettura. Esempio: *Il teorema è l'idea e la dimostrazione è la concretezza dell'idea* (LT1, F).
- *Ossatura della Matematica*. Le dimostrazioni consentono di costruire la Matematica; ne sono le basi solide, ne costituiscono 'l'ossatura'. Non si fa riferimento all'organizzazione in un sistema deduttivo di assiomi, bensì al fatto che la dimostrazione è l'essenza della Matematica e consente di costruirne le fondamenta. Esempi: *Le dimostrazioni sono alla base della Matematica, senza di esse non sarebbe la stessa* (LT1, F); *Le dimostrazioni, in poche parole, danno una base solida su cui poggiare le proprie nozioni* (LT3, F; per maggiori dettagli si veda il paragrafo 5.3.).

CATEGORIE RELATIVE ALLA STRUTTURA LOGICA DELLA DIMOSTRAZIONE

- *Ricetta*. La dimostrazione è quel procedimento (ricetta) che a partire dalle ipotesi (ingredienti) consente di arrivare ad affermare la tesi (torta). Esempio: *Una dimostrazione potrebbe essere paragonata, anche se in modo semplificato, ad una ricetta* (LT1, F; per maggiori dettagli si veda il

paragrafo 5.3.).

- *Catena di implicazioni.* La dimostrazione è una catena di implicazioni logiche del tipo ‘se...allora...’, le quali, partendo dalle ipotesi, conducono alla tesi. Esempio: *Teoremi, corollari, lemmi forniscono ipotesi e tesi e nella dimostrazione vengono usate le prime per arrivare al risultato, tramite una serie di passaggi logici e l’uso di risultati già presenti e dimostrati all’interno dell’ambiente matematico* (LM, M; per maggiori dettagli si veda il paragrafo 5.3.).
- *Linguaggio matematico.* La dimostrazione rigorosa è caratterizzata da un certo formalismo, in particolare è scritta in linguaggio matematico che è diverso dal linguaggio naturale. Esempio: *mettendo insieme linguaggio naturale (l’italiano di tutti i giorni), linguaggio matematico e altri elementi, come gesti, disegni, ecc....* (LM, M; per maggiori dettagli si veda il paragrafo 5.3.).

CATEGORIE EPISTEMICHE

- *Creatività.* Per essere in grado di condurre una dimostrazione, è necessario essere creativi, avere intuizione e avere capacità di *problem solving*. Esempio: *In sostanza, le dimostrazioni richiedono anche inventiva e creatività per riuscire ad ottenere il risultato sperato* (LT1, F; per maggiori dettagli si veda il paragrafo 5.3.).
- *Apprendimento non mnemonico della dimostrazione.* Questa categoria riguarda l’apprendimento della dimostrazione, la quale non deve essere appresa a memoria, bensì (ri)creata facendo leva sulla comprensione, in modo che con il passare del tempo risulti sempre meno complicato studiare nuove dimostrazioni. Esempio: *Ricordati che una dimostrazione non si impara a memoria, ma bisogna imparare a farla* (LT1, F).
- *Passaggi logici a volte banali.* Durante lo studio o la produzione di una dimostrazione può capitare di percepire alcuni passaggi logici come banali e quindi di pensare che non sia necessario compierli. Esempio: *Le dimostrazioni possono essere più o meno difficili e a volte sembrano superflue (a tutti capita di leggere un’affermazione e dire ‘ovvio!’), ma anche in quei casi bisogna dimostrare* (LT3, F; per maggiori dettagli si veda il paragrafo 5.3.).
- *Giudicare con criticità.* Tutte le volte che ci si imbatte in una dimostrazione, è bene giudicarla con spirito critico, ponendosi domande; questo può contribuire a sviluppare la capacità di dimostrare e ad arricchire la propria conoscenza. Esempio: *Giudicare con criticità ciò che ha dimostrato il professore* (LT1, M).
- *Processo che richiede tempo.* La realizzazione e lo studio di una dimostrazione richiedono tempo, il quale tuttavia diminuisce a mano a mano che si procede e si diventa più esperti. Esempio: *Ci misi un sacco di tempo a capire a fondo la prima dimostrazione* (LT1, F).

- *Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente.* La dimostrazione è vista come quello strumento che consente allo studente di risolvere gli esercizi proposti dall'insegnante e quindi di soddisfare le sue aspettative. Esempio: *Ci sono quelle [dimostrazioni] che forniscono un vero e proprio iter che ci permette di risolvere la maggior parte degli esercizi* (LT1, F, si veda il paragrafo 5.3.).

5.3. *Analisi dei TEP*

Di seguito presentiamo, a titolo esemplificativo, le analisi di tre *TEP* ritenuti particolarmente significativi per esemplificare l'emergere degli indicatori di alcune categorie induttive. Alcune di queste categorie si ritrovano in più di un *TEP*. Abbiamo messo in luce anche le categorie deduttive rilevate in queste stesse produzioni scritte, in modo da esemplificare come si sono estrapolate tutte le componenti delle concezioni sulla dimostrazione in casi specifici. Tali componenti emergono come tratti distintivi dello stato di equilibrio prodotto dal soggetto coinvolto nella ricerca, ottenuto tramite la stesura del *TEP*, in risposta alla perturbazione causata dalla sua consegna.

Per ciascun dei tre *TEP* vengono riportati dei frammenti ritenuti rilevanti per l'individuazione delle categorie di concezioni (sottolineati in rosso), evidenziando in tonalità di blu i termini usati per formulare la regola di codifica e in verde l'eventuale termine che ha dato origine alla definizione della categoria. Per ciascuno dei tre *TEP* vengono prima presentate le eventuali categorie induttive emerse e successivamente quelle deduttive.

I tre *TEP* da cui sono tratti i frammenti esaminati sono di una studentessa del primo anno della laurea triennale, di una studentessa del terzo anno della laurea magistrale e di uno studente della laurea magistrale. Mentre per i frammenti del primo *TEP* vengono mostrati, a titolo esemplificativo, i protocolli con la relativa trascrizione, per il secondo e terzo *TEP* si riportano, per motivi di spazio, solo le trascrizioni dei passaggi significativi.

TEP del primo anno della Laurea Triennale (LT1)

Figura 1

Frammento di protocollo in cui emerge la categoria induttiva “Ricetta”, in cui sono messi in evidenza: la parte del TEP ritenuto rilevante per la definizione della categoria (sottolineato in rosso); i termini che sono stati usati per la codifica (sottolineati in azzurro); il termine che ha dato origine al nome della categoria (inquadrato in verde)

Cara Giada,
posso confermarti che nel Corso di Laurea in
Matematica le dimostrazioni si usano
veramente molto, alcune sono belle e
utili, altre un po' più noiose e laboriose.
Ma passiamo alla tua vera domanda, cos'è
una dimostrazione? Una dimostrazione
potrebbe essere paragonata, anche se in modo
semplificato, ad una ricetta. Immagina di
avere un certo numero di ingredienti, che
in gergo si chiamano IPOTESI, e di voler
arrivare a cucinare una torta, la TESI.
Ecco, una dimostrazione è un po' come
inventare un modo per usare tutti gli ingredienti
a tua disposizione per ottenere la torta
desiderata. Ovviamente, come accadebbe
per la metafora della torta, a volte ci sono
più metodi / procedimenti per ottenere la
tesi (alcuni più semplici, altri magari più contorti).
Altre volte, invece, può accadere che alcuni
ingredienti siano "superflui" per la torta, ma
che ci permettano di ottenere un risultato migliore.
~~Se un certo numero di ingredienti è superfluo, non~~
~~potremmo~~. In sostanza, le dimostrazioni
richiedono anche inventiva e creatività per
riuscire ad ottenere il risultato sperato.

[Una dimostrazione potrebbe
essere paragonata, anche se in
modo semplificato, ad una ricetta.
Immagina di avere un certo
numero di ingredienti, che in gergo
si chiamano IPOTESI, e di voler
arrivare a cucinare una torta, la
TESI. Ecco, una dimostrazione è
un po' come inventare un modo per
usare tutti gli ingredienti a tua
disposizione e ottenerne la torta
desiderata. Ovviamente, come
accadrebbe per la metafora della
torta, a volte ci sono più
metodi/procedimenti per ottenere
la tesi (alcuni più semplici, altri
magari più contorti). Altre volte,
invece, può accadere che alcuni
ingredienti siano 'superflui' per la
torta, ma che ci permettano di
ottenere un risultato migliore.]

Dalle parole della studentessa (Fig. 1) emerge una concezione legata alla struttura e modalità di composizione degli elementi della dimostrazione. La studentessa ritiene che la dimostrazione sia una ricetta, ovvero quell'insieme di passaggi che consentono, a partire dagli ingredienti (ipotesi), di ottenere la torta (tesi).

Un aspetto su cui porre l'attenzione riguarda le parole *un modo per usare TUTTI gli ingredienti*: la studentessa, già al primo anno della laurea triennale, ha compreso l'importanza di usare tutte le ipotesi di un enunciato per ricavare la tesi. Gli enunciati dei teoremi, infatti, elencano tutte e sole le ipotesi che sono necessarie per ricavare la tesi, mentre ipotesi in più potrebbero portare a un risultato più circoscritto, proprio come dice anche la studentessa, *può accadere che alcuni ingredienti siano superflui per la torta, ma che ci permettano di ottenere un risultato migliore*. La studentessa, inoltre, dichiara che possono esistere più strategie di dimostrazione per ottenere la tesi a partire dalle stesse

ipotesi: *a volte ci sono più metodi/procedimenti per ottenere la tesi (alcuni più semplici, altri magari più contorti)*. Questa idea è probabilmente anche legata alle diverse tipologie di dimostrazione, ad esempio dimostrazioni effettuate per via diretta o indiretta.

Richiamandosi al termine usato nel *TEP*, abbiamo scelto di etichettare questa nuova categoria induttiva con *Ricetta*.

Figura 2

Frammento di protocollo in cui emerge la categoria induttiva “Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente”, in cui sono messi in evidenza: la parte del *TEP* ritenuto rilevante per la definizione della categoria (sottolineato in rosso); i termini che sono stati usati per la codifica (sottolineati in azzurro)

~~category~~ categorie: ci sono quelle che
forniscano un vero e proprio iter che ci
permette di risolvere la maggior parte degli
esercizi; ci sono poi quelle che forniscono

[Ci sono quelle
[dimostrazioni] che
forniscono un vero e
proprio iter che ci
permette di risolvere
la maggior parte
degli esercizi.]

L'idea che pare emergere dal *TEP* in Fig. 2 è che la dimostrazione è quello strumento che consente di risolvere la maggior parte degli esercizi, proponendo un vero e proprio *iter* che potrebbe essere quello fornito in aula dal docente. La dimostrazione, in questo caso, è vista come l'applicazione di uno schema preciso, in modo da raggiungere il risultato atteso dal docente. La produzione scritta di questa studentessa ci ha permesso dunque di definire un'altra categoria induttiva: *Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*.

Figura 3

Frammento di protocollo in cui emerge la categoria “Creatività”, in cui sono messi in evidenza: la parte del *TEP* ritenuto rilevante per la definizione della categoria (sottolineato in rosso); i termini che sono stati usati per la codifica (sottolineati in azzurro)

Altre volte invece, può accadere che alcuni
ingredienti siano "superflui" per la torta, ma
che ci permettano di ottenere un risultato migliore.
~~Altre volte invece, può accadere che alcuni
ingredienti siano "superflui" per la torta, ma
che ci permettano di ottenere un risultato migliore.~~
In sostanza, le dimostrazioni
richiedono anche inventiva e creatività per
riuscire ad ottenere il risultato sperato.

[In sostanza, le dimostrazioni
richiedono anche inventiva e
creatività per riuscire ad
ottenere il risultato sperato.]

Secondo questa studentessa, per dimostrare è necessario essere creativi, avere l'intuizione e capacità di *problem solving*. Dalla concezione espressa in queste

parole abbiamo definito la categoria induttiva *Creatività* che rientra tra le categorie epistemiche, perché legata a ciò che secondo lo studente è necessario sapere o saper fare per dimostrare.

In questo testo sono state individuate tre categorie induttive, mentre non sono state riscontrate categorie deduttive, ovvero già note in letteratura. È possibile notare come la studentessa abbia fatto ricorso a tre diverse categorie di concezione di dimostrazione per risolvere il problema che le era stato posto, cioè quello di spiegare a una studentessa più giovane che cosa sia una dimostrazione. La prima categoria (*Ricetta*) è di tipo metaforico e ha la funzione di rendere il contenuto accessibile al destinatario; la seconda categoria (*Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*), ha una funzione ‘pragmatica’, che mira a rendere il destinatario consapevole dell’utilità delle dimostrazioni come strumenti per soddisfare le richieste dei docenti; infine, l’ultima categoria (*Creatività*), ha la funzione di rendere il destinatario del testo consapevole del fatto che produrre una dimostrazione non è un semplice esercizio, ma un atto creativo. Tutte e tre queste concezioni svolgono dunque un ruolo specifico nel riequilibrio del sistema studente-*milieu*, perturbato dalla presa in carico della consegna del *TEP*.

TEP del terzo anno della Laurea Triennale (LT3)

Riportiamo di seguito la trascrizione del frammento del *TEP* ritenuto significativo (in corsivo), in cui sono evidenziati in tonalità di blu i termini che sono stati utili per formulare le regole di codifica (azzurro per la prima categoria, di tipo induttivo; blu scuro per la seconda, di tipo deduttivo), per poi presentare le categorie che sono state ricavate dall’analisi del frammento.

[...] La dimostrazione è fatta solo per proposizioni o teoremi, non per le definizioni: infatti, le definizioni danno i nomi alle cose (ci dicono che se una struttura matematica è fatta in un certo modo o ha certe caratteristiche, possiamo darle un nome specifico, per semplificarci la vita) mentre i teoremi ci dicono che al verificarsi di determinate situazioni (ipotesi) ci devono essere delle specifiche conseguenze. Quindi le dimostrazioni, in poche parole, danno una base solida su cui poggiare le proprie nozioni; a volte sono anche utili per capire cosa dice il teorema. [...]

La studentessa vede la dimostrazione come strumento per costruire la Matematica, la sua ossatura, le sue basi. Si potrebbe sottolineare il legame tra questa concezione e quella che rientra nella categoria induttiva *Dimostrazione come garanzia di rigore*; tuttavia, il ruolo della dimostrazione nella concezione della studentessa è legato unicamente alla struttura della Matematica in sé. Manca la visione della Matematica come base delle altre scienze e l’idea, secondo la quale la dimostrazione consente alla Matematica di rivestire questo ruolo, grazie al suo rigore.

L’analisi di questo passaggio ha portato perciò alla creazione di una nuova categoria induttiva: *Ossatura della Matematica*. Rientra tra le categorie sulle

funzioni della dimostrazione e viene codificata a partire da termini come *base solida* o *poggiare[su]*, nonché da frasi come *al verificarsi di determinate situazioni (ipotesi) ci devono essere delle specifiche conseguenze* (sottolineati in azzurro), che mettono in evidenza come le dimostrazioni creano i legami tra i risultati in matematica, producendo quella che abbiamo chiamato la sua ‘ossatura’.

[...] *Le dimostrazioni possono essere più o meno difficili e a volte sembrano superflue (a tutti capita di leggere un'affermazione e dire 'ovvio'), ma anche in quei casi bisogna dimostrare ('non si sa mai'; una cosa può sembrare ovvia, ma perché funziona? Sei in grado di farmi vedere in modo certo che le cose siano come dice il teorema?) [...].*

Da questo frammento di *TEP* diventa evidente che la studentessa ritiene che, nonostante alcune affermazioni possano sembrare ovvie e alcuni passaggi siano percepiti come superflui, sia necessario dimostrare sempre tutto, perché solo tramite la dimostrazione si può essere certi che le cose vadano secondo l'enunciato del teorema. Questo passaggio, e in particolare il riferimento all'apparente banalità di alcune dimostrazioni, ha portato alla definizione di una nuova categoria induttiva. Essa rientra tra le categorie epistemiche, perché riguarda un aspetto dell'apprendimento della dimostrazione da parte del soggetto, ed è stata etichettata con l'espressione *Passaggi logici a volte banali*, codificata tramite riferimenti ai termini sottolineati in azzurro.

Per quanto concerne le categorie deduttive, in questo *TEP* ritroviamo la categoria *Provare la correttezza* (Lolli, 2005). Infatti, la studentessa afferma che una dimostrazione serve per essere sicuri al 100% che un'affermazione matematica (quindi un teorema, una proposizione) è corretta. Risulta chiaro che tale categoria rientra in quella più ampia, etichettata con il termine *Verifica* (De Villiers, 1990), secondo la schematizzazione del sistema di categorie a cui ci stiamo riferendo (Bertolini, 2024).

Si osserva che dalle parole *Sei in grado di farmi vedere in modo certo che le cose siano come dice il teorema?* Si deduce la concezione della studentessa, secondo la quale la dimostrazione consente di ‘vedere’ i risultati. Tale concezione rientra nella categoria deduttiva *Vedere i risultati* (Lolli, 2005), codificata tramite i termini sottolineati in blu scuro nell'estratto del *TEP*. Essa riguarda una funzione della dimostrazione e rientra anch'essa nella categoria più ampia *Verifica*.

Con *a volte sono anche utili per capire meglio cosa dice il teorema* si ritrova invece la categoria deduttiva *Spiegazione* (De Villiers, 1990). Secondo questa concezione, la dimostrazione ha la funzione di spiegare il significato del teorema in questione.

In questo testo sono state individuate due categorie induttive e tre categorie deduttive. Anche in questo caso, le categorie induttive sembrano avere la funzione di rendere il contenuto (meta)matematico accessibile al destinatario, mentre quelle deduttive forniscono informazioni sulle funzioni della

dimostrazione che la studentessa ritiene importanti nella dimostrazione.

TEP della Laurea Magistrale (LM)

Anche in questo caso, riportiamo prima i frammenti del *TEP* ritenuti significativi per la definizione di una o più categorie (in corsivo), in cui sono evidenziati in tonalità di blu i termini che sono stati usati per formulare la regola di codifica, per poi presentare le categorie stesse e mettere in evidenza il ruolo che esse sembrano svolgere nel *TEP*.

[...] Mettendo *insieme linguaggio naturale* (l'italiano di tutti i giorni), *linguaggio matematico e altri elementi, come gesti, disegni, ecc.* [...]

Da queste parole emerge una concezione sull'uso del linguaggio matematico nelle dimostrazioni e in Matematica in generale, secondo cui il linguaggio matematico si distingue dal linguaggio naturale che nell'esperienza dello studente in questione è la lingua italiana. Grazie a ciò è stato possibile definire la categoria induttiva *Linguaggio matematico* che caratterizza una concezione che si focalizza in maniera esplicita sull'uso del linguaggio matematico e sul suo ruolo nelle dimostrazioni, piuttosto che ricorrere implicitamente a esso in contesti considerati più formali, come nel caso degli studenti coinvolti nella ricerca di Healy e Hoyles (2000).

[...] *Teoremi, corollari, lemmi forniscono ipotesi e tesi e nella dimostrazione vengono usate le prime per arrivare al risultato, tramite una serie di passaggi logici e l'uso di risultati già presenti e dimostrati all'interno dell'ambiente matematico.* [...]

Dalle parole di questo estratto del *TEP* emerge la concezione secondo la quale una dimostrazione, a partire dalle ipotesi, porta al risultato attraverso una serie di passaggi logici. Tale concezione fa parte della categoria *Catena di implicazioni* che riguarda la struttura logica della dimostrazione e che è già stata definita in precedenza.

[...] *Una tesi potrebbe essere valida per un numero finito di casi empirici oppure ci si può convincere della sua validità con la semplice lettura del testo ('è ovvio che sia vero', 'ho trovato esempi per cui vale quindi vale sempre' sono frasi che si sentono), ma senza dimostrare formalmente e quindi generalizzare la tesi non possiamo usare quel risultato o porlo nel mondo dei risultati matematici validi* [...]

Da questo estratto, in particolare dalla frase riportata *è ovvio che sia vero*, abbiamo ricavato una concezione già incontrata nel precedente *TEP* che rientra nella categoria *Passaggi logici a volte banali*. Lo studente, infatti, fa intendere che ci si potrebbe convincere erroneamente della verità di una tesi per il semplice fatto che esistono casi per i quali essa vale; egli afferma che, in realtà, un risultato può essere considerato valido e può essere usato solo se lo si è dimostrato formalmente.

Per quanto riguarda le categorie deduttive, ci focalizziamo sul seguente frammento del *TEP*:

[...] *La dimostrazione non solo deve convincere, deve anche formalizzare un'idea, un risultato, sistemare una conoscenza all'interno di un ambito scientifico ben preciso.* [...]

Con *La dimostrazione non solo deve convincere* emerge la concezione dello studente, secondo la quale la dimostrazione ha la funzione di convincere. Essa fa dunque parte della categoria *Prove per convincere* (Alibert, 1988), la quale a sua volta rientra nella categoria più ampia *Verifica* (De Villiers, 1990) che riguarda una delle funzioni della dimostrazione.

Dalle affermazioni *deve anche formalizzare un'idea, un risultato, sistemare una conoscenza all'interno di un ambito scientifico ben preciso* e *l'uso di risultati già presenti e dimostrati all'interno dell'ambiente matematico si deduce la concezione di dimostrazione che rientra nella categoria Sistematizzazione* (De Villiers, 1990), un'altra categoria relativa alle funzioni della dimostrazione. Lo studente, infatti, con tali affermazioni rivela di vedere la dimostrazione come uno strumento che consente di organizzare i risultati matematici in un sistema deduttivo, all'interno del quale si ricorre ad altri risultati già noti e dimostrati in precedenza.

Inoltre, tornando al frammento usato per definire le categorie induttive, nelle parole ma senza dimostrare formalmente e quindi generalizzare la tesi non possiamo usare quel risultato o porlo nel mondo dei risultati matematici validi, è possibile ritrovare la categoria deduttiva *Suggerire generalizzazioni* (Lolli, 2005). Questa rientra nella categoria *Esplicitazione*, secondo cui la dimostrazione è quello strumento che consente di rendere esplicito e vero in generale un risultato matematico, e riguarda una delle funzioni della dimostrazione. Secondo l'idea dello studente, la dimostrazione consente di fornire quella generalizzazione necessaria a far sì che il risultato sia valido. I risultati matematici sono validi per tutti i casi che soddisfano le ipotesi del teorema e non solo per alcuni esempi specifici.

Si osserva che lo studente, affermando che *Una tesi potrebbe essere valida per un numero finito di casi empirici e dimostrare formalmente e quindi generalizzare*, mette in contrapposizione tra loro due delle quattro tipologie di approccio alla prova, identificate da Balacheff (1988). Queste rientrano tra le categorie epistemiche, perché riguardano l'approccio all'apprendimento da parte del soggetto, e in questo caso specifico sono il *naïve empiricism*, in riferimento ai casi empirici, e il *generic example*, in riferimento alla generalizzazione. Lo studente si pone in modo critico rispetto all'approccio del *naïve empiricism*; infatti, egli afferma che mostrare che un enunciato è vero per alcuni casi non è una dimostrazione matematica.

Nel *TEP* di questo studente sono state individuate tre categorie induttive e tre categorie deduttive. A differenza dei due *TEP* esaminati in precedenza, le categorie induttive usate da questo studente non sembrano avere la funzione di

rendere il contenuto (meta)matematico più accessibile al destinatario, ma forniscono comunque indicazioni utili, agli occhi dello studente che scrive, a individuare una dimostrazione e comprendere il significato che essa ha nella produzione della conoscenza matematica. Le categorie deduttive, invece, sembrano avere anche qui il ruolo di evidenziare le funzioni che l'autore del *TEP* ritiene importanti per la dimostrazione.

6. Risultati

Passiamo ora alla discussione dell'analisi dei dati in riferimento alle domande di ricerca che, per comodità del lettore, riportiamo qui di seguito:

- DR1: Quali concezioni sulla dimostrazione manifestano gli studenti di un corso di laurea in Matematica?
- DR2: Quale influenza ha il percorso di studi universitari in Matematica sulle concezioni sulla dimostrazione?

6.1. Risposta alla DR1

Dall'analisi dei dati raccolti è emerso che dalle 71 produzioni scritte totali sono state ricavate 195 concezioni sulla dimostrazione, raggruppate in 42 categorie sia deduttive sia induttive, individuate e schematizzate in un unico schema e riassunte in un'agenda di codifica riportata in appendice (Tabella 2).

Di seguito riportiamo una tabella riassuntiva che riporta il numero di volte che ciascuna delle categorie individuate compare nei *TEP* analizzati, per poi procedere con la discussione dei risultati e la risposta alle domande di ricerca. Specifichiamo che ogni concezione o sotto-concezione, facendo riferimento all'organizzazione esposta nel paragrafo 5.2., ha lo stesso peso nell'analisi. Infatti, il focus qui non è sulla struttura gerarchica delle categorie, che è stata necessaria per individuare le relazioni tra le concezioni già presenti in letteratura, evitando di considerare come diverse delle categorie che in realtà sono identiche, ma che non è determinante per l'individuazione delle diverse categorie di concezioni riscontrate nei dati.

Tabella 1

Rappresentazione riassuntiva delle categorie individuate e del numero di occorrenze di ciascuna di esse nei 71 TEP analizzati sul totale di 195 concezioni emerse (130 dagli studenti del primo anno della laurea triennale, 41 dagli studenti del terzo anno della laurea triennale e 24 dagli studenti della laurea magistrale); i nomi delle categorie induttive sono sottolineati

<i>Categorie</i>	<i>Numero di volte che la categoria appare nei TEP degli studenti del I anno della laurea triennale</i>	<i>Numero di volte che la categoria appare nei TEP degli studenti del III anno della laurea triennale</i>	<i>Numero di volte che la categoria appare nei TEP degli studenti della laurea magistrale</i>
Accorgimento mnemotecnico (Dettori & Morselli, 2010)	1	/	/
Aumentare l'affidabilità (Lolli, 2005)	1	/	/
Confermare l'intuizione (Lolli, 2005)	/	/	1
Esplicitare il contenuto costruttivo (Lolli, 2005)	/	1	/
Generic example (Balacheff, 1988)	/	/	2
Illuminazione (Coe & Ruthven, 1994)	1	/	/
Inventare forme di ragionamento (Lolli, 2005)	1	1	/
Provare la correttezza (Lolli, 2005)	2	1	1
Prove per convincere (Alibert, 1988)	/	/	1
Raffinare l'intuizione (Lolli, 2005)	1	2	/
Risolvere problemi (Lolli, 2005)	1	1	/
Schema di prova simbolico (Harel & Sowder, 1998)	3	/	/
Scoperta (De Villiers, 1990)	1	/	/

Scoprire controesempi (Lolli, 2005)	2	/	/
Semplificare la vita (Lolli, 2005)	1	/	/
Sistematizzazione (De Villiers, 1990)	8	2	2
Spiegare ‘perché non’ (Lolli, 2005)	2	/	/
Spiegare mediante generalità (Lolli, 2005)	2	1	/
Spiegazione (De Villiers, 1990)	18	7	/
Stabilire collegamenti (Lolli, 2005)	/	1	1
Suggerire generalizzazioni (Lolli, 2005)	1	/	1
Suggerire le ipotesi giuste (Lolli, 2005)	/	1	/
Suggerire teoremi (Lolli, 2005)	4	/	/
Vedere i risultati (Lolli, 2005)	1	3	/
Verifica o giustificazione (Coe & Ruthven, 1994)	3	/	/
Verifica/Convincimento (De Villiers, 1990)	19	6	5
<u>Apprendimento non mnemonico della dimostrazione</u>	4	1	/
<u>Catena di implicazioni</u>	7	3	3
<u>Concretizzazione</u>	1	/	/
<u>Creatività</u>	3	1	1
<u>Didattica</u>	2	1	/
<u>Dietro le quinte</u>	3	/	/
<u>Dimostrazione come garanzia di rigore</u>	3	/	2
<u>Dimostrazione come mezzo per aprire gli occhi</u>	2	/	/

<u>Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente</u>	5	/	/
<u>Dimostrazione come strumento di scelta</u>	9	3	/
<u>Giudicare con criticità</u>	1	/	/
<u>Linguaggio matematico</u>	5	/	1
<u>Ossatura della Matematica</u>	3	2	1
<u>Passaggi logici a volte banali</u>	4	2	2
<u>Processo che richiede tempo</u>	3	1	/
<u>Ricetta</u>	2	/	/

Le due categorie riscontrate con maggiore frequenza tra le produzioni scritte degli studenti coinvolti sono state, prima tra tutte, quella etichettata con *Verifica/Convincimento* e subito a seguire quella di *Spiegazione*, la prima con una frequenza di 30 su 195, la seconda di 25 su 195.⁸ Si tratta in entrambi i casi di categorie deduttive, in particolare tratte dai lavori di de Villiers (1990). Questo risultato conferma che si tratta di concezioni diffuse tra gli studenti, anche a livello universitario.

Ripercorrendo la storia della dimostrazione, è possibile evidenziare che la concezione sulla dimostrazione come strumento per verificare/convincere può essere fatta risalire al pensiero di Parmenide, secondo cui l'unica via affidabile e convincente di acquisizione di conoscenza, nonché la sola a condurre alla verità, è quella basata sul ragionamento logico, su cui si basa il processo dimostrativo. Le concezioni che rientrano in questa categoria così frequente, rispecchiano, dunque, una delle prime concezioni nella storia della Matematica sull'idea di dimostrazione. Inoltre, per la maggior parte degli studenti che attribuiscono alla dimostrazione il ruolo di verificare e convincere, dimostrare significa convincere qualcuno della verità di un enunciato, piuttosto che della sua validità, legata alla non-contraddittorietà del sistema assiomatico in cui esso si dovrebbe inserire. Questo è il secondo ostacolo epistemologico legato al concetto di dimostrazione. Tuttavia, questo non vale per tutti i partecipanti alla sperimentazione. Infatti, a titolo di esempio, in due *TEP* si legge: *Una dimostrazione è un procedimento che permette di poter considerare valida*

⁸ Osserviamo che con *Verifica/Convincimento* si intende la categoria deduttiva definita da de Villiers (1990), secondo cui la dimostrazione serve a convincere della verità di un risultato matematico, e si distingue dalla categoria *Verifica o giustificazione* definita da Coe e Ruthven (1994), secondo cui invece la dimostrazione è una pura giustificazione di un'affermazione matematica senza lo scopo di convincere. Entrambe rientrano nella categoria più ampia *Verifica*, secondo la schematizzazione del sistema di categorie (Bertolini, 2024).

un'affermazione (LT1, F) o ancora *Una dimostrazione [...] stabilisce la validità di tutte le formule o proprietà che prendiamo per note* (LM, M); in questi casi si parla infatti di validità e non di verità.

Notiamo che, soprattutto nel secondo caso, il concetto di validità sembra abbastanza vicino a quello con cui esso è usato nella logica moderna ed esplicitato in riferimento al secondo ostacolo epistemologico, mentre nel primo caso non è chiaro se questo termine è usato con la stessa accezione oppure con un significato più legato al contesto quotidiano, in cui 'valido' sta per 'utile' o 'adatto all'uso'.

Le concezioni che rientrano nella categoria *Spiegazione*, seconda per frequenza in questa ricerca, sono legate a un altro momento storico nell'evoluzione del pensiero matematico, come esposto nel paragrafo 3.2.3., ovvero l'ingresso in campo di grandi scoperte e innovazioni in ambito scientifico, a partire dal secolo XVII. In questo contesto hanno fornito importanti contributi in ambito matematico Galilei, Newton, Descartes, Cavalieri e altri, i quali idearono dei metodi operativi e delle dimostrazioni costruttive, volte soprattutto ad arrivare a un determinato risultato spiegando anche come lo si raggiunge; tale spinta innovatrice trovò poi il suo apice nell'opera *Discorso sul metodo* di Descartes (2002/1637). In linea con questo pensiero, a partire dalle concezioni rientranti nella categoria *Spiegazione* possiamo affermare che la dimostrazione è vista come quello strumento che consente di spiegare il ragionamento matematico che porta all'affermazione di un risultato matematico. In due *TEP* si legge, ad esempio, che *Una dimostrazione è una spiegazione in termini matematici del significato di un teorema o una proposizione* (LT1, F) o anche che *Una dimostrazione è una spiegazione formale e rigorosa* (LT1, M). Abbiamo potuto osservare che in questa categoria rientrano solo concezioni di studenti della laurea triennale e non della laurea magistrale. Questo aspetto è approfondito più avanti nella trattazione, in particolare nella risposta alla seconda domanda di ricerca.

Il periodo di innovazioni e scoperte in ambito scientifico menzionato poc'anzi, ha portato a una prima crisi, in particolare inducendo i matematici dell'epoca ad esprimere alcune critiche al modo di condurre le dimostrazioni degli antichi greci. Uno dei 'difetti', elencati da Arnauld e Nicole (1850/1662), è il fatto di aver voluto dimostrare cose che non avevano bisogno di prova. Legate a tale questione, sono state individuate otto concezioni su 195 che ricadono nella categoria induttiva *Passaggi logici a volte banali*. Osserviamo, però, che tali concezioni sono in contrapposizione con la critica mossa agli antichi greci. Dai *TEP* raccolti, infatti, si deduce l'idea che, nonostante l'apparente banalità di alcune affermazioni, è sempre necessario e importante dimostrare la legittimità di ogni passaggio. Si legge, infatti che *Dare la giustificazione a quasi tutti i teoremi o frasi mi sembrava abbastanza superfluo, ma con il tempo ne ho capito l'importanza* (LT3, M) o ancora *Le dimostrazioni possono essere più o meno difficili e a volte sembrano superflue (a tutti capita*

di leggere un'affermazione e dire 'ovvio!'), ma anche in quei casi bisogna dimostrare (LT3, F). Notiamo che, mentre nel primo caso questa convinzione sembra supportata anche da una convinzione (*belief*) della studentessa, nel secondo caso questo non è chiaro e potrebbe essere riconducibile ad aspetti legati al contratto didattico. Queste concezioni sembrano tuttavia essere basate più su un'idea della Matematica come corpus logico-deduttivo che come strumento di costruzione di conoscenza.

Un'altra categoria deduttiva ritrovata in molti testi è quella identificata con *Sistematizzazione* (De Villiers, 1990); essa è presente 12 volte su 195. Anche in questo caso si può evidenziare un legame tra le concezioni degli studenti e l'evoluzione verificatasi nel corso della storia della Matematica. In particolare, nel periodo storico in cui sono stati redatti gli *Elementi* di Euclide, sembra essere stata fondamentale la dimostrazione, in particolare nella sua forma indiretta. L'idea secondo la quale la dimostrazione è lo strumento che permette di sistematizzare i risultati in un sistema deduttivo di assiomi, definizioni e teoremi, emerge anche da alcuni *TEP* analizzati in questa ricerca; in uno dei testi, infatti, uno studente afferma: *La dimostrazione utilizza o assiomi o proposizioni più elaborate che si danno già per dimostrate* (LT1, M), mentre un'altra studentessa scrive: *Talvolta si ricorre ad alcuni teoremi per verificarne altri e questa catena di verifiche mostra come sia fondamentale aver già verificato i passaggi precedenti* (LT1, F).

Due concezioni emerse dall'analisi dei *TEP* rientrano nella categoria *Spiegare 'perché non'*, che è strettamente collegata alla più ampiamente nota tipologia di dimostrazione indiretta, ovvero la dimostrazione per assurdo. In questo caso è naturale il riferimento storico alla *reductio ad absurdum* di Zenone. Per esempio, due studentesse del primo anno della laurea triennale scrivono quanto segue: *Quelle [le dimostrazioni] 'per assurdo' in cui parti negando la tua ipotesi iniziale e mostri che si arriva a qualcosa di impossibile o contraddittorio* (LT1, F) e *Ragionando per assurdo, suppongo che la tesi non sia vera e per dimostrare che il teorema è giusto devo ottenere nel procedimento un'incongruenza logica* (LT1, F). Nonostante la prima studentessa sembri confondere tra loro i termini tesi e ipotesi, il suo ragionamento è coerente con la categoria in questione. Si trova quindi un'ulteriore corrispondenza tra le concezioni degli studenti sulla dimostrazione e la sua evoluzione nel corso della storia.

Dall'analisi dei dati raccolti risulta che sei concezioni su 195 sulla dimostrazione rientrano nella categoria induttiva *Linguaggio matematico* e questo collega nuovamente la discussione a uno dei tre più importanti *ostacoli epistemologici* evidenziati nel paragrafo 3.2.3.: la mancata consapevolezza riguardo al legame tra il linguaggio naturale e il linguaggio matematico. Uno studente della laurea magistrale, scrivendo che *Mettendo insieme linguaggio naturale (l'italiano di tutti i giorni), linguaggio matematico e altri elementi* (LM, M), espone l'idea, secondo la quale in una dimostrazione si usano sia il

linguaggio naturale sia il linguaggio matematico. Anche uno studente del primo anno della laurea triennale, scrivendo *Uso costante del linguaggio matematico per esprimere teoremi e dimostrazioni. Le parole vengono usate comunque, a volte, ma molto più di rado* (LT1, M), evidenzia che secondo questo studente, in una dimostrazione sono coinvolti entrambi questi linguaggi, anche se quello naturale in misura inferiore. Da queste concezioni emerge la consapevolezza che si tratta di due linguaggi differenti. Tuttavia, in nessuno di questi *TEP* si fa riferimento esplicito al rapporto tra tali linguaggi, a cui abbiamo fatto cenno nel paragrafo 3.2.3., e al ruolo del linguaggio naturale nel far emergere quello matematico in maniera significativa (D'Amore & Santi, 2018), mentre si fa riferimento a una loro generica commistione. È importante notare che in questo caso il riferimento ai linguaggi è esplicito, mentre nel caso degli studenti che hanno partecipato alle ricerche di Healy e Hoyles (2000) e Stylianou et al. (2015), il ricorso ai differenti linguaggi è implicito e dettato dal contesto.

Da questo studio è risultata abbastanza frequente (13 casi su 195) anche la categoria induttiva *Catena di implicazioni* che raccoglie concezioni legate alla struttura logica della dimostrazione. Questo aspetto è a sua volta direttamente collegato all'apprendimento di quest'ultima; infatti, quando si studia una dimostrazione si tende a decomporla nei 'mattoncini' che la costituiscono e che rappresentano i passaggi logici intermedi, mettendo in luce la sua struttura consequenziale e deduttiva.

Dall'analisi dei dati è emerso che cinque concezioni su 195 rientrano nella categoria induttiva *Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente*. Si è deciso di etichettare questa categoria come categoria epistemica perché essa riguarda le modalità con cui gli studenti si avvicinano alla dimostrazione, anche se tali modalità non si riferiscono agli aspetti cognitivi ma ad aspetti legati al contratto didattico (Brousseau, 1986).

In particolare, secondo questa concezione, la dimostrazione è lo strumento che permette allo studente di soddisfare le aspettative del proprio insegnante, in quanto rappresenta quel procedimento, quell'*iter*, che porta alla risoluzione di esercizi, magari dati per compito. Nei *TEP* si legge, infatti che [La dimostrazione serve] *per affrontare gli esercizi, i problemi che ci vengono proposti* (LT1, F) o ancora [Le dimostrazioni] *sono utili per svolgere gli esercizi. Forniscono una scaletta su come svolgere l'esercizio* (LT1, F). Può essere che tale procedimento sia proprio quello esposto in aula dal docente e che lo studente si senta in dovere di seguirlo fedelmente. Anche se queste concezioni riguardano aspetti per così dire 'metadidattici', essi influiscono sul modo in cui lo studente approccia la dimostrazione e quindi anche sul modo in cui la concepisce; per questo motivo esse sono considerate concezioni epistemiche.

Abbiamo potuto osservare che dodici concezioni su 195 rientrano nella categoria *Dimostrazione come strumento di scelta*, secondo la quale la dimostrazione permette di distinguere un risultato matematico da una congettura che, se dimostrata, potrebbe diventare a sua volta un risultato matematico, ma

che fino ad allora non è tale. In molti casi è emerso che la dimostrazione è quello strumento che fa sì che una determinata affermazione matematica, una volta dimostrata, possa effettivamente essere ‘presa sul serio’. Si legge, ad esempio, che *In poche parole tutti possono scrivere un teorema ma se non lo riescono a dimostrare, in alcuni casi, non verrà considerato* (LT1, F)⁹ o anche che *In Matematica ogni affermazione va giustificata per poter essere presa sul serio* (LT1, M). Lo sviluppo di concezioni appartenenti a questa categoria potrebbe essere legato al modo stesso in cui le dimostrazioni vengono esposte, o ancora di più richieste, dai docenti in aula. Spesso, infatti, capita che, nel momento in cui uno studente riporta un enunciato matematico, l’insegnante chieda di dimostrarlo e di provare che ‘le cose stanno effettivamente così’. Anche queste concezioni sono, dunque, legate al contratto didattico, in quanto lo studente non vede l’importanza della dimostrazione per sé, bensì come strumento per soddisfare le aspettative del docente che ha posto particolare attenzione sul fatto che la dimostrazione permette di selezionare le affermazioni che possono essere considerate risultati matematici effettivi.

6.2. Risposta alla DR2

Di seguito riportiamo i risultati relativi alla distribuzione delle concezioni degli studenti sulla dimostrazione in base all’anno di frequenza del corso di laurea. Questa analisi, condotta in una prospettiva longitudinale, è stata realizzata principalmente con lo scopo di fornire una risposta alla seconda domanda di ricerca (DR2) che per maggiore chiarezza riportiamo di seguito:

DR2: Quale influenza ha il percorso di studi universitari in Matematica sulle concezioni sulla dimostrazione?

Abbiamo potuto osservare un cambiamento delle concezioni sulla dimostrazione soprattutto tra gli studenti della laurea triennale e quelli della laurea magistrale. Infatti, le concezioni di studenti sia del primo anno sia del terzo anno della laurea triennale rientrano in modo vario in tutte le categorie individuate con questa ricerca e coprono dunque una vasta gamma di categorie. Le concezioni degli studenti della laurea magistrale, invece, sono più simili tra loro e sono distribuite su un numero inferiore di categorie. Questo può essere in parte dovuto al minor numero di studenti della laurea magistrale ma, come vedremo in seguito, appare chiaramente legato al percorso seguito.

Abbiamo osservato una lieve differenza anche tra le concezioni degli studenti del primo anno della laurea triennale e quelle degli studenti del terzo anno della laurea triennale. È emerso, infatti, che dagli studenti del primo anno della laurea triennale si sono ricavate concezioni in alcuni casi originali rispetto a quanto noto in letteratura ed espresse attraverso metafore. Si pensi, ad

⁹ Notiamo che la studentessa usa in maniera impropria il termine ‘teorema’, in quanto un enunciato è un teorema se e solo se è stato dimostrato, e che molto probabilmente usa questo termine per riferirsi all’enunciato.

esempio, alla metafora della dimostrazione come ricetta o come modo per rivelare il ‘dietro le quinte di uno spettacolo’, oppure ancora come mezzo ‘per aprire gli occhi’. L’uso di metafore nelle concezioni degli studenti sembra dunque diminuire con l’avanzamento degli studi matematici e questa può essere considerata una prima componente di evoluzione delle concezioni in questo senso, anche se supportata da pochi dati.

Dall’analisi dei dati abbiamo invece riscontrato un’evoluzione significativa delle concezioni sulla dimostrazione nel passaggio dalla laurea triennale alla laurea magistrale. Da alcune delle concezioni degli studenti della laurea triennale è emerso che la dimostrazione è vista come quello strumento che consente di ottenere i risultati attesi dal docente e, ancora, come quel mezzo che fa sì che una determinata affermazione matematica, una volta dimostrata, possa effettivamente essere presa sul serio. Concezioni di questo tipo sono probabilmente dovute al contratto didattico e in questo caso lo studente apprende la dimostrazione per soddisfare le aspettative dell’insegnante più che per una esigenza personale.

Nel passaggio alla laurea magistrale si è osservato un significativo cambiamento nelle concezioni degli studenti in questo senso. La categoria più frequente è quella di *Verifica/Convincimento*. Su 130 concezioni degli studenti del primo anno di laurea triennale 19 rientrano in tale categoria, degli studenti del terzo anno della laurea triennale ne rientrano 6 su 41 e degli studenti della laurea magistrale ne rientrano 5 sul totale di 24. Gli studenti della laurea magistrale tendono a vedere la dimostrazione come mezzo di verifica e convincimento piuttosto che come strumento di spiegazione. Nella categoria *Spiegazione* non si trova infatti nemmeno un’affermazione di studenti della laurea magistrale che abbia condotto all’individuazione di tale concezione, mentre nella categoria più ampia *Verifica*, secondo la schematizzazione del sistema di categorie (Bertolini, 2024), rientrano nove concezioni su 195. La maggior parte di queste ultime ricade nella sottocategoria *Verifica/Convincimento*, una in *Provare la correttezza*, una in *Prove per convincere* e un paio nella categoria induttiva *Dimostrazione come garanzia di rigore*. Le altre due principali categorie, nelle quali rientrano concezioni sulla dimostrazione di studenti della laurea magistrale, sono *Sistematizzazione* e *Catena di implicazioni*. Si ritrovano anche affermazioni sulla generalità della dimostrazione, in particolare sul fatto che un determinato risultato valga in generale e non solo per alcuni casi specifici, e anche sul fatto che essa possa suggerire generalizzazioni. Da queste considerazioni emerge che questi studenti vedono la dimostrazione come strumento che consente, attraverso passaggi logici, di convincere e di convincersi della validità di un’affermazione all’interno di un sistema deduttivo.

Possiamo dunque affermare che c’è un’evoluzione delle concezioni nel passaggio dalla laurea triennale alla laurea magistrale. Per gli studenti della laurea magistrale, infatti, la dimostrazione assume un significato intrinseco, in

quanto essa non è più percepita come qualcosa che viene imposto dall'esterno. Ci si allontana dalle regole del contratto didattico e la dimostrazione viene maggiormente vista come uno strumento di acquisizione di conoscenza.

In questo senso, la presente ricerca conferma quanto ci si potrebbe aspettare; infatti, gli studenti universitari dei primi anni risentono ancora dell'influenza delle modalità di insegnamento-apprendimento tipico della scuola secondaria, attribuendo alla dimostrazione un ruolo legato al contratto didattico. Durante il corso degli studi universitari, gli studenti hanno la possibilità di approfondire il modo con cui la disciplina si sviluppa e assumere sempre più la prospettiva del matematico che vede la dimostrazione come strumento per sé, per acquisire ulteriore conoscenza, e dunque come vero e proprio strumento di lavoro. Questo fatto può essere anche dovuto al crescente livello di socializzazione (Schoenfeld, 1992) nel contesto culturale in cui sono immersi gli studenti per un lungo periodo: quattro o cinque anni, se lo studente frequenta rispettivamente il primo o il secondo anno della laurea magistrale. Si evince quindi che, rispetto a quanto già noto in letteratura da studi condotti su studenti più giovani, in particolare su studenti della scuola secondaria di secondo grado, la presente ricerca ha consentito di ottenere informazioni su una prospettiva longitudinale più ampia.

7. Discussione

Riassumendo, in risposta alla prima domanda di ricerca, tra tutti gli studenti coinvolti sono state individuate 195 concezioni che sono state suddivise su 42 categorie, 16 induttive e 26 deduttive. La categoria con la maggior frequenza è stata quella sulla funzione della dimostrazione come verifica o convincimento, nella quale sono rientrate 30 concezioni in totale. La seconda categoria per frequenza è stata quella sulla funzione della dimostrazione come spiegazione.

Si sono ritrovate in diversi *TEP* anche categorie definite a partire dai dati, a conferma del fatto che sono concezioni condivise tra più soggetti. Tra le categorie induttive la più frequente è stata quella sulla struttura logica della dimostrazione, secondo la quale quest'ultima è una sequenza di passaggi logici che a partire dalle ipotesi permette di ottenere la tesi. Un dato interessante è che la seconda categoria induttiva per frequenza è quella in cui rientrano le concezioni sul fatto che la dimostrazione è lo strumento che consente di rendere una congettura un vero e proprio risultato matematico, in modo che sia riconosciuto come tale; dall'analisi è emerso che tali concezioni potrebbero essere conseguenza del contratto didattico.

In riferimento alla risposta alla seconda domanda di ricerca, possiamo riassumere che abbiamo effettivamente riscontrato un'evoluzione nelle categorie di concezioni degli studenti dei corsi universitari in Matematica della stessa istituzione universitaria, in particolare nel passaggio dalla laurea triennale alla laurea magistrale, confermando quanto ci si potrebbe aspettare. Da alcuni

TEP della laurea triennale sono emerse concezioni, molto probabilmente dovute alle conseguenze del contratto didattico secondo le quali la dimostrazione è vista come strumento per soddisfare le aspettative del docente. Gli studenti della laurea magistrale si discostano invece da questa visione e sviluppano concezioni sulla dimostrazione come strumento che assume un significato personale, più vicine alla prospettiva del matematico che usa la dimostrazione come strumento di lavoro, per acquisire nuova conoscenza. Inoltre, il ricorso a metafore nella formulazione delle concezioni sembra essere caratteristica all'inizio del corso di studi, mentre scompare quasi del tutto con l'avanzamento del percorso.

Dall'analisi dei dati abbiamo potuto constatare che nelle concezioni degli studenti coinvolti si riscontrano diversi elementi emersi dall'analisi dell'evoluzione storico-epistemologica del concetto di dimostrazione. In alcuni casi queste concezioni possono essere considerate in termini di ostacoli epistemologici, in altri casi non necessariamente. In ogni caso, l'analisi storico-epistemologica è stata molto utile per mettere in evidenza le basi epistemologiche su cui si potrebbero fondare molte concezioni, ma anche per guidare la discussione dei risultati delle analisi dei dati. Tale aspetto costituisce un risultato rilevante di questo studio, non contemplato finora in letteratura.

La scelta di raccogliere i dati da analizzare sotto forma di *TEP* è stata efficace, in quanto ha indotto gli studenti a sentirsi liberi di esprimersi spontaneamente, facendo così emergere più chiaramente le loro concezioni. L'uso di metafore, soprattutto da parte degli studenti della laurea triennale, sembra confermare questo aspetto. Si pensi, ad esempio, alla descrizione della dimostrazione come una ricetta, come il dietro le quinte di uno spettacolo, come mezzo per aprire gli occhi, come struttura (ossatura) della Matematica e altre ancora, che testimoniano il ricorso a un linguaggio spontaneo e non usuale in testi destinati al docente. Naturalmente, non in tutti i casi è possibile avere la certezza che la produzione scritta degli studenti sia effettivamente un *TEP*, nel senso che lo studente lo abbia scritto affrancandosi da condizionamenti di natura didattica e in alcuni casi questi aspetti potrebbero aver influito sulle risposte. Tuttavia, è possibile affermare che non sono state riscontrate delle evidenze in questo senso, mentre le numerose metafore presenti nei testi degli studenti della laurea triennale, alcuni più o meno espliciti riferimenti ad aspetti legati al contratto didattico nei testi, nonché la grande varietà di categorie individuate sembrano testimoniare a favore dell'ipotesi che le produzioni scritte esaminate si possano considerare dei *TEP*, almeno nella stragrande maggioranza dei casi.

Inoltre, la scelta di ricorrere ai *TEP* ha permesso di mostrare come i soggetti partecipanti tendono a ricorrere a categorie più personali e poco o per nulla documentate in bibliografia, nel momento in cui sono confrontati con una richiesta di spiegazione destinata a una persona che non possiede ancora gli strumenti linguistici e concettuali per comprendere ciò che loro considerano sia una dimostrazione in matematica, con la funzione di rendere il contenuto affrontato accessibile al destinatario. La richiesta del *TEP* ha rappresentato un

vero e proprio problema che i soggetti partecipanti hanno cercato di risolvere attraverso la stesura dei *TEP* stessi, al fine di ristabilire l'equilibrio del sistema studente-*milieu* che tale richiesta ha turbato. Per questo motivo, riferendosi alla definizione fornita da Balacheff e Gaudin (2010), i *TEP* stessi, rappresentati dalle concezioni in essi emerse, sono classificabili come concezioni. Lo sforzo fatto dai soggetti partecipanti nell'individuare una strategia risolutiva adatta per ristabilire l'equilibrio del sistema soggetto-*milieu*, diventa evidente dal fatto che molte delle categorie induttive si basano su delle metafore o su rappresentazioni mentali personali, fornendo una rappresentazione genuina delle immagini mentali che la persona che ha prodotto il *TEP* associa al concetto di dimostrazione. Le categorie deduttive, soprattutto quelle basate sulle funzioni della dimostrazione (De Villiers, 1990), sembrano invece essere usate in molti casi con una funzione diversa, legata più all'intenzione di evidenziare gli elementi più significativi del processo di socializzazione nel contesto culturale, secondo Schoenfeld (1992), di un percorso di studi in Matematica. Questa tipologia di categorie risulta molto utile per comprendere quali funzioni della dimostrazione sono state recepite e percepite come importanti da parte degli studenti nel loro percorso universitario. Di conseguenza, la mancanza di ricezione del ruolo di altre funzioni della dimostrazione (p.e. *Eстетica*, di *Comunicazione* e di *Autorealizzazione*, de Villiers, 1990), può essere un segnale importante da tenere in conto nella riflessione sulla formazione dei futuri matematici e in particolare dei futuri docenti di matematica.

La frequenza e varietà nella scelta delle descrizioni metaforiche ci ha permesso di definire nuove categorie sulle concezioni sulla dimostrazione che arricchiscono la letteratura di ricerca in Didattica della Matematica su questo argomento e contribuiscono alla costruzione di una mappatura più esaustiva delle possibili concezioni. Infatti, un risultato 'secondario' della presente ricerca, in quanto esso non ricadeva tra gli obiettivi esplicitati nelle domande di ricerca, è la produzione di una struttura delle possibili concezioni che mette in evidenza categorie e sottocategorie sia tratte dalla letteratura sia individuate a partire dai dati. Tale struttura, presentata nella sua forma integrale in Bertolini (2024), può essere uno strumento metodologico utile per 'navigare' le ricerche sull'argomento e per classificare le concezioni degli studenti in futuri studi, come sollecitato da Ouvrier-Buffet (2023). Inoltre, in riferimento a quanto noto in letteratura dalla ricerca di Jones (1998), è possibile notare che proprio grazie al ricorso ai *TEP* è stato possibile individuare aspetti originali e inediti di concetti e termini che contribuiscono a formare l'idea che lo studente si fa del concetto di dimostrazione. Infatti, i termini usati dai partecipanti nello studio di Jones (1998) appartengono tutti al linguaggio accademicamente accettabile (p. e. tesi, ipotesi, esempio, controesempio, contraddizione, teorema, lemma etc.), mentre sono del tutto assenti elementi che esprimano le immagini mentali che gli studenti attivano quando pensano alla dimostrazione, ma che probabilmente ritengono non adatti a un contesto istituzionalizzato, come è quello di un corso

universitario. Anche in riferimento alla classificazione degli schemi di prova noti in letteratura (Harel e Sowder, 1998), la presente ricerca può fornire degli esempi inediti di concezioni di soggetti che sembrano aderire a un dato schema di prova. A tale proposito sarebbe tuttavia necessario analizzare i risultati in una prospettiva classificatoria differente, che esula dallo scopo della presente ricerca.

8. Conclusioni

Nella parte introduttiva di questo articolo abbiamo messo in luce il fatto che in letteratura sono presenti numerosi lavori che hanno come soggetti studenti della scuola secondaria di secondo grado oppure insegnanti e docenti in formazione, mentre molto più rare sono le ricerche svolte coinvolgendo studenti universitari di un corso di laurea in Matematica. La presente ricerca ha consentito di mettere in evidenza un'ampia gamma di concezioni che questo tipo di studenti usa nel momento in cui si sente autorizzato a ricorrere a modalità di spiegazione e forme linguistiche che ritiene più opportuni, facendo emergere tali concezioni come autentici strumenti di 'rimessa in equilibrio' del sistema soggetto-*milieu* in risposta alla perturbazione prodotta dalla consegna del *TEP*.

La presente ricerca ha tuttavia anche alcune limitazioni che riteniamo importante evidenziare soprattutto in riferimento a tre aspetti. Una prima limitazione riguarda il fatto che non trattandosi degli stessi studenti seguiti negli anni, non è stato possibile fare affermazioni sull'evoluzione delle concezioni personali di ciascuno studente. Una ricerca longitudinale che consenta di studiare il fenomeno in questo senso potrebbe fornire informazioni utili per comprendere l'evoluzione delle concezioni degli studenti più in profondità, ma richiederebbe un arco temporale di almeno cinque anni. Essa potrebbe essere strutturata in maniera tale da coinvolgere delle osservazioni di attività svolte in risposta a task appositamente predisposti, il che consentirebbe di ricorrere anche al modello cK ϕ (Balacheff, 2013), rendendo l'indagine sulle concezioni più operativa e utile per tracciare anche i processi in tali setting. Una seconda limitazione riguarda il fatto che la ricerca non ha tenuto conto del curriculum di studio seguito dagli studenti, soprattutto per quanto riguarda gli studenti della laurea magistrale. Per esempio, non si è potuto distinguere tra studenti della laurea magistrale che hanno seguito un corso di Didattica della Matematica e studenti che non l'hanno fatto, ma esso potrebbe aver influito sul loro modo di vedere la dimostrazione. Tuttavia, anche in questo caso è importante sottolineare che il focus della presente ricerca non è sulle concezioni individuali del singolo studente, ma sulle tipologie di concezioni degli studenti che seguono un percorso di formazione altamente specializzato in Matematica.

Infine, la terza limitazione riguarda il campione ridotto di partecipanti che provengono tutti dalla stessa università italiana; questo potrebbe aver fatto sì che alcune categorie si presentassero con un numero di occorrenze limitato.

Un possibile spunto per future ricerche sull'argomento discende direttamente dalla prima limitazione delineata in precedenza. Riteniamo che sarebbe interessante condurre in futuro una ricerca simile a quella esposta in questo studio, quindi sulle concezioni degli studenti di un corso di laurea in Matematica, che consenta di seguire gli stessi studenti nel corso degli anni, intervistandoli all'inizio, in alcuni momenti intermedi e alla fine del loro percorso di studi universitari. Questo consentirebbe di analizzare l'evoluzione delle concezioni sulla dimostrazione con una prospettiva verticale e darebbe la possibilità di tenere conto anche del percorso universitario individuale di ogni singolo studente, superando contemporaneamente la seconda limitazione evidenziata in precedenza.

Un'altra direzione per sviluppi di ricerca futuri è quella di partecipare alla progettazione e/o implementazione del questionario proposto da Ouvrier-Buffet (2023), innescando collaborazioni in Europa sulle concezioni degli studenti sulla dimostrazione, in particolare nel passaggio dall'istruzione secondaria a quella terziaria e approfondendo qui le caratteristiche nazionali italiane in riferimento a quelle degli altri Paesi partecipanti. Eventuali future ricerche, come quelle descritte in precedenza, incrementerebbero anche il campione da cui sono tratti i dati, consentendo di rendere i risultati anche statisticamente più significativi.

Ringraziamenti

Un sentito grazie a tutti gli studenti delle lauree triennale e magistrale dell'Università di Modena che hanno partecipato a questo studio e ai loro docenti che hanno consentito che i dati fossero raccolti durante le loro ore di lezione.

Si ringraziano i referee e l'editor incaricato dell'articolo per averci dato l'occasione di approfondire alcuni aspetti del quadro teorico e per i suggerimenti utili a migliorare la presentazione della ricerca.

Riferimenti

- Abelson, R. (1979). Differences between belief systems and knowledge systems. *Cognitive Science*, 3(4), 355–366. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0304_4
- Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 31–35.
- Antonini, S. (2019). Intuitive acceptance of proof by contradiction. *ZDM—Mathematics Education*, 51(5), 793–806. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01066-4>
- Arnauld, A., & Nicole, P. (1850). *Logic, or the art of thinking: being the Port-Royal Logic*. (T. S. Baynes, Trans.) Sutherland and Knox. (Original work published 1662).

- Asenova, M. (2019). Epistemological obstacles in the evolution of the concept of proof in the path of ancient Greek tradition. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)* (pp. 120–127). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin.
- Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 284–298). NCTM.
- Balacheff, N. (2013). cK ϵ , A Model to Reason on Learners' Conceptions. In M. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.). (2013). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2–15). University of Illinois at Chicago.
- Balacheff, N., & Gaudin N. (2010). Modeling students' conceptions: The case of function. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 16, 183–211.
- Barbin, E. (1994). La dimostrazione in Matematica: significati epistemologici e questioni didattiche. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 17B(3), 209–249. [Original work: Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin APMEP*, 366, 591–620].
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics*, 7(1–2), 23–40. <https://doi.org/10.1007/BF00144356>
- Bertolini, T. (2024). *Un'Analisi delle Concezioni sulla Dimostrazione di Studenti di un Corso di Laurea in Matematica* [Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia]. MoReThesis.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz, & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits* (pp. 41–63). Les Editions Agence d'Arc Inc.
- Cabassut, R., Conner, A., Işçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., & Morselli, F. (2012). Conceptions of Proof - In Research and Teaching. In Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.), *New ICMI Study Series* (Vol. 15, pp. 169–190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_20
- Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41–53. <https://doi.org/10.1080/0141192940200105>
- D'Amore B., Radford L., & Bagni G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 29B(1), 11–40.
- D'Amore, B., & Santi, G. (2018). Natural language and “mathematics languages”: Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La Matematica e la sua Didattica*, 26(1), 57–82.

- D'Amore, B., & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La Matematica e la sua Didattica*, 16(2), 144–189.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di “misconcezione”. *La Matematica e la sua Didattica*, 19(2), 139–163.
- De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24(24), 17–24.
- Descartes, R. (2002). *Discorso sul Metodo. Testo francese a fronte*. L. U. Ulivi (a cura di). Bompiani. (Lavoro originale pubblicato nel 1637).
- Dettoni, G., & Morselli, F. (2010). Un'attività narrativa per far emergere i beliefs sulla dimostrazione. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 33B(4), 434–456.
- Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education* (pp. 39–57). Kluwer.
- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137–161. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281>
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Issues in mathematics education. Research in collegiate mathematics education III* (Vol. 7, pp. 234–283). American Mathematical Society.
- Healy, L., & Hoyle, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428. <https://doi.org/10.2307/749651>
- Heinze, A., Reiss, K., & Rudolph, F. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *ZDM—Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), 212–220. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0011-7>
- Hoyle, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 7–16.
- Jones, K. (1998). Mathematics graduates' conceptions of mathematical proof. In *Pre-Proceedings of ICMI Study Conference on the teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 161–164). NIE
- Lolli, G. (2005). *QED. Fenomenologia della dimostrazione*. Bollati Boringhieri.
- Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum: Qualitative Social Research*, 1(2), Art. 20, 1–10.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures*. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education – Examples of Methodology and Methods* (pp. 365–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13
- MIUR - Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i Licei (Allegato B)*. MIUR.
- Ouvrier-Buffet, C. (2023). Exploring students' conceptions of proof in high-school and university: A proposal for collaborations in Europe. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztönyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp.

- 240–247). Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Eötvös Loránd University of Budapest.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). NCTM/Information Age Publishing. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_20
- Polya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica*. Feltrinelli Editore.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334–370). Macmillan.
- Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *New ICMI Study Series* (Vol. 15, pp. 391–420). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>
- Stewart, S., & Thomas, M. O. (2019). *Student perspectives on proof in linear algebra*. *ZDM—Mathematics Education*, 51(7), 1069–1082. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01087-z>
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91–134. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0>
- Thurston, W. P. (2006). On Proof and Progress in Mathematics. In R. Hersh (Ed.), *Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp. 37–55). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-29831-2_3

Appendice

A titolo esemplificativo riportiamo nel seguito un estratto dell'agenda di codifica (Tabella 2), nella quale sono inserite alcune delle concezioni più significative tra tutte le 195 concezioni ricavate dai 70 *TEP* (ricordiamo che i *TEP* erano in totale 71, ma uno non è risultato utile ai fini della ricerca). Sottolineiamo inoltre che in ciascun *TEP* di solito è stata riscontrata più di una singola concezione sulla dimostrazione.

La tabella è organizzata come segue: nella prima colonna a sinistra sono riportati nomi delle categorie sia induttive sia deduttive riscontrate nei *TEP* e la frequenza di ciascuna di esse, ovvero il numero di volte che tale categoria è stata individuata; nella seconda colonna è contenuta la definizione esplicita della specifica categoria; nella terza colonna sono inseriti alcuni esempi tratti dai testi che sono stati classificati come appartenenti a tale categoria. Ogni affermazione è seguita dalle sigle LT1, LT3 oppure LM (a seconda che si tratti di uno studente o una studentessa del primo anno della laurea triennale, del terzo anno della laurea triennale o della laurea magistrale rispettivamente), M (se si tratta di uno studente) oppure F (se si tratta di una studentessa); nessuna sigla sul genere se questo non è specificato. Mettiamo tuttavia in evidenza che il dato relativo al genere non è stato rilevante ai fini della ricerca. Infine, nella quarta colonna sono riassunte le regole di codifica.

Tabella 2

Estratto dell'agenda di codifica delle concezioni sulla dimostrazione degli studenti coinvolti nella ricerca

<i>Categoria Frequenza</i>	<i>Definizione</i>	<i>Esempi tratti dai testi</i>	<i>Regole di codifica</i>
<i>Accorgimento mnemotecnico (Dettori & Morselli, 2010) 1</i>	<i>Dimostrazione come strumento di memorizzazione di risultati e relazioni tra essi.</i>	<i>Una dimostrazione dovrebbe in sostanza aiutarti a capire il 'retroscena' di un enunciato e a ricordarlo più facilmente una volta studiata (LT1, F).</i>	<i>Si fa esplicitamente riferimento ad aspetti legati alla memorizzazione della dimostrazione come supporto all'apprendimento.</i>
<i><u>Apprendimento non mnemonico della dimostrazione</u> 5</i>	<i>Dimostrazione come uno strumento di lavoro che va compreso e non appreso a memoria.</i>	<i>Un matematico non deve saperle [le dimostrazioni] a memoria, ma deve saperle fare (LT1, F); Ti consiglio di non impararle [le dimostrazioni] a memoria, rischiaresti di dimenticare anche un piccolo dettaglio che invece si potrebbe rivelare fondamentale (LT3, F).</i>	<i>Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva, p.e. quella dell'accorgimento mnemonico, e si nega esplicitamente l'utilità della memorizzazione per un apprendimento efficace e autentico.</i>

<u>Catena di implicazioni</u> 13	<i>Dimostrazione come uno strumento logico deduttivo che, attraverso dei passaggi logici, conduce da una o più affermazioni, dette ipotesi, a un'affermazione finale, detta tesi.</i>	<i>In generale una dimostrazione è dunque una catena di implicazioni logiche del tipo se allora che partendo dall'ipotesi arrivano alla tesi (LT1, M); Una dimostrazione può essere vista come una successione ordinata di operazioni logico-matematiche (LT3, M); Teoremi, corollari, lemmi forniscono ipotesi e tesi e nella dimostrazione vengono usate le prime per arrivare al risultato, tramite una serie di passaggi logici e l'uso di risultati già presenti e dimostrati all'interno dell'ambiente matematico (LM, M).</i>	<i>Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa esplicitamente riferimento a dei passaggi logico-deduttivi come caratterizzanti per la dimostrazione.</i>
<u>Creatività</u> 5	<i>Dimostrazione come ciò per cui, se la si vuole condurre, è necessario essere creativi, avere intuizione e capacità di problem solving.</i>	<i>Le dimostrazioni richiedono anche inventiva e creatività (LT1, F); Ti capiterà di rimanere affascinata dalla creatività di alcuni matematici, che per dimostrare i loro teoremi hanno fatto incredibili ragionamenti (LT1, F); Le dimostrazioni di solito risultano più semplici per le persone con maggiore capacità di problem solving (LT3, M).</i>	<i>Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento esplicito alla creatività e all'inventiva.</i>
<u>Didattica</u> 3	<i>Dimostrazione come strumento che consente di far capire il 'metodo matematico'.</i>	<i>Si tratta di strumenti fondamentali non solo per capire come si è potuti giungere a un determinato risultato ma anche per comprendere a fondo il metodo di ragionamento dell'ambito di studio (LT1, F); Una dimostrazione dovrebbe insegnarti il metodo per ragionare su qualcosa e renderti autonoma nel caso volessi provarci da sola (LT1, F).</i>	<i>Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa esplicitamente riferimento all'utilità didattica della dimostrazione nel mostrare il metodo di ragionamento ritenuto adeguato al contesto di riferimento.</i>

<u>Dimostrazione come mezzo per ottenere i risultati attesi dal docente</u> 5	<i>Dimostrazione come strumento che consente di soddisfare le aspettative del docente.</i>	<i>Ci sono quelle [dimostrazioni] che forniscono un vero e proprio iter che ci permette di risolvere la maggior parte degli esercizi (LT1, F); [Le dimostrazioni] sono utili per svolgere gli esercizi. Forniscono una scaletta su come svolgere l'esercizio (LT1, F).</i>	<i>Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento alla dimostrazione come iter per risolvere gli esercizi proposti dall'insegnante, soddisfacendone le aspettative.</i>
<u>Ossatura della Matematica</u> 6	<i>Dimostrazione come strumento che consente di costruire la Matematica; ne costituisce 'l'ossatura', la base solida.</i>	<i>Le dimostrazioni sono alla base della Matematica, senza di esse non sarebbe la stessa (LT1, F); Le dimostrazioni, in poche parole, danno una base solida su cui poggiare le proprie nozioni (LT3, F); Le dimostrazioni sono fondamentali in Matematica (LT1, F).</i>	<i>Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento al fatto che le dimostrazioni costituiscono la base della Matematica.</i>
<u>Processo che richiede tempo</u> 4	<i>Dimostrazione come processo la cui realizzazione e il cui studio necessitano tempo.</i>	<i>Con il bisogno di doverci ragionare [sulle dimostrazioni] per molto tempo (LT1, M); Fare una dimostrazione richiede conoscenza dell'argomento e tempo a disposizione (LT3, M).</i>	<i>Non è possibile riferirsi a una categoria deduttiva e si fa riferimento esplicito al tempo necessario da dedicare a una dimostrazione.</i>

Processi Semiotici Cognitivi nel Ragionamento Matematico: Il Pensiero di Raymond Duval alla Luce delle Teorie Semiotiche di Charles Sanders Peirce

Cognitive Semiotic Processes in Mathematical Reasoning: Raymond Duval's Thought in Light of Charles Sanders Peirce's Semiotic Theories

Procesos Semióticos Cognitivos en el Razonamiento Matemático: El Pensamiento de Raymond Duval a la Luz de las Teorías Semióticas de Charles Sanders Peirce

Asia Della Bruna

Dipartimento di Filosofia, Università degli Studi di Bologna, Italia

Sunto. *Il confronto tra le teorie di Raymond Duval e Charles Sanders Peirce permette di indagare il ruolo delle rappresentazioni nel ragionamento matematico. La prospettiva peirciana, incentrata sul valore cognitivo dei segni e sul ruolo inferenziale del diagramma, offre una chiave interpretativa capace di superare il dualismo tra oggetto e rappresentazione, nucleo del paradosso cognitivo messo in luce da Duval.*

Parole chiave: rappresentazione, diagramma, registri di rappresentazione, Duval, Peirce.

Abstract. *The comparison between the theories of Raymond Duval and Charles Sanders Peirce offers a way to investigate the role of representations in mathematical reasoning. Peirce's perspective, centered on the cognitive function of signs and the inferential power of diagrams, provides an interpretative key to overcoming the object–representation dualism, which lies at the heart of Duval's cognitive paradox.*

Keywords: representation, diagram, semiotic representation registers, Duval, Peirce.

Resumen. *La comparación entre las teorías de Raymond Duval y Charles Sanders Peirce permite explorar el papel de las representaciones en el razonamiento matemático. La perspectiva peirceana, centrada en la función cognitiva de los signos y en el valor inferencial del diagrama, ofrece una clave interpretativa para superar el dualismo entre objeto y representación, núcleo del paradigma cognitivo señalado por Duval.*

Palabras clave: representación, diagrama, registros de representación semiótica, Duval, Peirce.

1. Premessa

L'apprendimento e la costruzione della conoscenza iniziano attraverso l'imitazione e l'interazione corporea con l'ambiente circostante. Il linguaggio svolge infatti un ruolo marginale nelle prime fasi dello sviluppo: il contatto con il mondo avviene attraverso il corpo e la manipolazione degli oggetti, in un rapporto diretto, sensoriale e concreto (Violi, 2012; Duval, 2009). Un analogo approccio esperienziale caratterizza anche le scienze empiriche, dove l'accesso all'oggetto di studio permette al ricercatore di condurre osservazioni ed esperimenti basati su un'interazione tangibile con il fenomeno analizzato.

Questa modalità di accesso diretto non è applicabile in matematica, disciplina in cui gli oggetti di studio non possiedono un referente empirico. L'indagine matematica si fonda infatti su rappresentazioni, che costituiscono l'unico canale cognitivo per accedere a tali oggetti e per operare su di essi.

Nella letteratura di ricerca in Didattica della Matematica, diversi approcci teorici sono stati sviluppati per analizzare i processi semiotico-cognitivi coinvolti nel ragionamento matematico. In questo contributo si propone un percorso teorico che prende forma nel confronto tra il pensiero di Raymond Duval e quello di Charles S. Peirce, autori dei quadri concettuali più frequentemente richiamati in questo campo di studi. Il contributo di Duval è discusso a partire dalla sua teoria dei registri di rappresentazione, secondo cui la comprensione matematica richiede la capacità di operare tra diversi sistemi semiotici, evitando la sovrapposizione tra oggetto e rappresentazione. A questa prospettiva si affianca l'analisi del pensiero di Peirce, in particolare della sua teoria dei segni e del ruolo centrale del diagramma come strumento inferenziale nella pratica matematica.

Il contributo di questo articolo consiste nel mostrare come la prospettiva diagrammatica peirciana permetta di reinterpretare il paradosso cognitivo individuato da Duval non come un dualismo irrisolto tra oggetto e rappresentazione, ma come una dinamica inferenziale interna alle rappresentazioni stesse. Tale prospettiva consente di mettere in luce affinità teoriche e potenzialità integrative tra i due modelli, chiarendo il ruolo operativo delle trasformazioni semiotiche nel ragionamento matematico.

2. L'Approccio di Raymond Duval

L'assenza di un accesso diretto agli oggetti matematici ha generato un ampio dibattito, specialmente nell'ambito della Didattica della Matematica, riguardo alla loro natura e alle modalità attraverso cui possono essere compresi e appresi. La riflessione di Raymond Duval, che si inserisce in questo contesto, propone una teoria dal forte impatto didattico-pedagogico. Il suo approccio consente di individuare in modo efficace i principali ostacoli di natura semiotico-cognitiva che gli studenti incontrano nel loro percorso di apprendimento matematico. Come osserva lo stesso Duval, «non abbiamo alcun accesso percettivo o

strumentale agli oggetti matematici [...]. L'unico modo per accedervi è utilizzare segni» (Duval, 2000, p. 61; trad. mia).

In uno scritto successivo, Duval affronta questa problematica evidenziando come la difficoltà nel cogliere la natura degli oggetti matematici sia amplificata anche dalla tendenza, nel contesto educativo, a confondere e sovrapporre diversi tipi di oggetti: i) l'oggetto come cosa, cioè ciò che esiste nel mondo reale; ii) l'oggetto intenzionale, cioè ciò che un individuo percepisce soggettivamente; iii) l'oggetto fenomenologico, cioè l'oggetto che appare alla coscienza del soggetto in base alla propria esperienza e percezione; iv) infine l'oggetto di conoscenza, cioè l'invariante di conoscenza che trascende l'individualità (Duval, 2009).

All'interno degli oggetti di conoscenza, Duval distingue fra oggetti sperimentali, legati a invarianti di tipo causale relative a fenomeni osservabili, e oggetti matematici, che si caratterizzano proprio per l'assenza di un referente empirico diretto e per la loro dipendenza da rappresentazioni semiotiche (Duval, 2009; 2009–2010). Questa distinzione offre un quadro epistemologico che permette di rileggere analisi già presenti nei lavori degli anni Novanta (Duval, 1993, 1995, 2000), nei quali l'accesso cognitivo agli oggetti matematici è descritto come strutturalmente mediato da sistemi di rappresentazione. Nei termini di Duval, non vi è attività noetica in matematica senza processi semiotici: il pensiero matematico e la manipolazione delle rappresentazioni sono indissociabili.

La comprensione del pensiero matematico implica dunque la produzione e la trasformazione di rappresentazioni all'interno di sistemi semiotici diversi. Tali rappresentazioni possono appartenere allo stesso tipo — come diverse versioni di una stessa equazione (ad esempio, $2x - y = 3$ e $y = 2x - 3$) — oppure a tipi differenti, come la forma algebrica e quella grafica di una medesima funzione. Ogni sistema semiotico possiede potenzialità e limiti specifici, per cui non tutte le rappresentazioni sono in grado di rendere visibili le stesse proprietà dell'oggetto matematico. Quest'ultimo, tuttavia, resta invariato attraverso le diverse forme rappresentative: è proprio questa invarianza concettuale che gli studenti devono imparare a cogliere, evitando la confusione tra l'oggetto matematico e le sue rappresentazioni semiotiche.

Da qui deriva quello che Duval definisce il “paradosso cognitivo della matematica”: da un lato le rappresentazioni sono imprescindibili per l'attività matematica, perché costituiscono l'unico accesso possibile agli oggetti; dall'altro lato esiste il rischio che esse vengano erroneamente identificate con gli oggetti cui si riferiscono. La specificità della conoscenza matematica consiste proprio in questa «esigenza contrastante» tra necessità delle rappresentazioni e necessità di non confonderle con ciò che rappresentano (Duval, 2000, p. 61). Superare tale ostacolo richiede la capacità di gestire e coordinare diversi registri di rappresentazione, riconoscendo l'invarianza concettuale che si mantiene al di là delle singole forme rappresentative.

L'approccio semiotico di Duval ruota attorno ai concetti di sistema semiotico e di registro di rappresentazione semiotica. Un sistema semiotico è composto da segni in rapporto opposizionale e da regole interne che ne determinano le possibilità operative (Duval, 2006a). Un registro di rappresentazione è quel tipo particolare di sistema semiotico che permette le tre attività cognitive fondamentali legate alla semiosi: (i) produrre una traccia percepibile come rappresentazione di qualcosa in un sistema determinato; (ii) trasformare le rappresentazioni seguendo esclusivamente le regole proprie del sistema; (iii) permettere l'elaborazione di nuove conoscenze rispetto alle rappresentazioni iniziali (Duval, 1993, 2017). In questo quadro, «solo le rappresentazioni semiotiche consentono di svolgere alcune funzioni cognitive essenziali, come quella di elaborazione» (Duval, 1993, p. 39; trad. mia).

Duval distingue quindi tra produzione di rappresentazioni, trasformazione interna allo stesso registro (trattamento) e passaggio tra registri diversi (conversione). Il trattamento è definito come «la trasformazione di una rappresentazione considerata come dato iniziale in una rappresentazione ritenuta terminale rispetto a una domanda, un problema o un bisogno [...]; una trasformazione interna a un registro di rappresentazione» (Duval, 1995, p. 39; trad. mia).

La conversione consiste invece nella trasformazione di una rappresentazione da un registro a un altro, mantenendo, in tutto o in parte, il contenuto iniziale (Duval, 1993). È in queste trasformazioni che si gioca, per l'autore, il primato cognitivo delle rappresentazioni: «Ciò che conta, nelle rappresentazioni semiotiche, è innanzitutto il loro potenziale intrinseco di essere trasformate in altre rappresentazioni semiotiche nuove ed equivalenti» (Duval, 2017, p. 21, trad. mia).

Duval insiste nel distinguere la conversione da operazioni affini come l'interpretazione e la codifica. L'interpretazione comporta un cambiamento di quadro teorico mantenendo lo stesso registro, mentre la codifica è una trascrizione regolata da corrispondenze esplicite fra sistemi semiotici (Duval, 1993). La conversione, al contrario, «è irriducibile a queste, perché, da una parte, non si basa su alcuna analogia, come nel caso dell'interpretazione, e, dall'altra, non può essere ottenuta tramite l'applicazione di regole di codifica» (Duval, 1993, p. 43; trad. mia).

Queste distinzioni emergono con particolare evidenza nella transizione fra algebra e geometria: uno studente può essere in grado di costruire correttamente la curva corrispondente a una funzione nel piano cartesiano, ma non saper risalire alla sua espressione algebrica, o viceversa. In questi casi, il problema non riguarda solo la padronanza procedurale, ma la capacità di riconoscere uno stesso oggetto matematico attraverso registri diversi (algebrico, grafico, verbale). La vera padronanza si raggiunge quando si è capaci di coordinare tali registri, cogliendo l'invarianza concettuale che li attraversa.

Il contributo di Duval consente dunque di collegare teorie semiotiche e

processi cognitivi, mostrando come la comprensione matematica dipenda essenzialmente dalla possibilità di operare trasformazioni tra rappresentazioni. L'assunzione del pensiero peirciano da parte di Duval emerge già in *Sémiosis et pensée humaine* (1995), dove l'autore richiama la tripartizione icona–indice–simbolo come strumento per distinguere differenti funzioni rappresentative. A partire da questo riferimento, Duval sottolinea come la classificazione peirciana metta in luce la varietà dei fenomeni semiotici, pur senza affrontare in dettaglio le relazioni operative tra sistemi semiotici distinti:

Peirce è il primo ad avere riconosciuto l'importanza di questo fenomeno, distinguendo tre tipi di segni: le icone, i simboli e gli indici [...]. Questa prima classificazione [...] ha contribuito alla fondazione della semiotica. Ma lascia in ombra ciò che fa la fecondità e la complessità di questa varietà: le possibili relazioni tra differenti sistemi semiotici e la possibilità di convertire una rappresentazione formata in un sistema in una rappresentazione di un altro sistema. (Duval 1995, pp. 19–20; trad. mia)

Questa lettura,¹ focalizzata sulla tripartizione dei segni come schema tipologico utile a distinguere funzioni rappresentative differenti, si mantiene anche nelle opere più recenti. Duval dichiara infatti che le proprie riflessioni si fondano sugli insegnamenti di Saussure per quanto riguarda la struttura opposizionale dei sistemi semiotici, su Frege per la sostituibilità dei segni e la produzione di nuove inferenze, e su Peirce, richiamato nuovamente soltanto per la classificazione delle tipologie di rappresentazioni (Duval, 2017).

Il riferimento di Duval a Peirce va dunque inteso come un utilizzo mirato di alcuni elementi della sua semiotica, che si integrano nella teoria dei registri senza implicare l'adozione dell'intero impianto peirciano. Nel presente contributo non si intende ricostruire in modo esaustivo il pensiero di Duval, ma concentrarsi sugli elementi che convergono nella formulazione del paradosso cognitivo e che risultano essenziali per il confronto con Peirce. Come si vedrà,

¹ È possibile indagare sulle fonti attraverso le quali Duval ricostruisce il pensiero di Peirce, osservando che egli fa esclusivo riferimento ai *Collected Papers* (CP, Peirce 1931–1958). Sebbene questa raccolta costituisca una fonte rilevante, presenta limitazioni significative: gli scritti non sono ordinati cronologicamente, alcuni testi centrali del pensiero peirciano risultano del tutto assenti e altri compaiono solo in forma frammentaria. Tali caratteristiche rendono difficile accedere alla struttura complessiva della teoria dei segni, in particolare alla classificazione ampliata che, nella fase più matura del pensiero peirciano, articola i segni in più dimensioni e ne analizza i parametri interni (relazione con l'oggetto, tipo di interpretante, modalità di manifestazione), offrendo così una visione molto più ricca dei segni complessi (Bellucci, 2023) e del loro comportamento inferenziale. L'unico riferimento diretto a Peirce nei lavori di Duval, presente sia in *Basic Issues for Research in Mathematics Education* (2000, p. 58) sia in *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics* (2006b, p. 109), riguarda il passo CP 2.228, un testo risalente al 1896. Esso è quindi anteriore agli sviluppi teorici che, negli anni successivi, portano Peirce a elaborare una classificazione molto più articolata dei segni, fondata su criteri multipli e non riducibile alla sola tripartizione icona–indice–simbolo.

la prospettiva diagrammatica peirciana permette di reinterpretare tale paradosso non come un dualismo irrisolto tra oggetto e rappresentazione, ma come una dinamica inferenziale interna alle rappresentazioni stesse.

3. Il Contributo di Charles Sanders Peirce

Le idee di Charles Sanders Peirce (1839–1914) offrono una chiave di lettura semiotica e cognitiva particolarmente feconda per analizzare il ruolo delle rappresentazioni nel pensiero matematico. Tuttavia, la ricezione del suo pensiero è stata complicata dalla modalità con cui i suoi scritti sono stati pubblicati e organizzati: molte opere sono rimaste inedite e i *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (1931–1958), pur avendo avuto un ruolo decisivo nella diffusione del suo lavoro, presentano limiti evidenti dal punto di vista cronologico e sistematico.

Su questo sfondo, la ricostruzione della grammatica speculativa proposta da Bellucci (2018) e gli studi di Stjernfelt (2007; 2011; 2022), Atkins e Hull (2017) e Moore (2014) offrono oggi un quadro coerente e aggiornato della semiotica peirciana, chiarendo in particolare i nessi tra classificazione dei segni, struttura dell'inferenza e ruolo dei diagrammi.

La logica di Charles Sanders Peirce si struttura in tre ambiti fondamentali: la grammatica speculativa (semiotica), la logica critica (studio del ragionamento) e la metodeutica (o retorica speculativa). All'interno della grammatica speculativa, Peirce propone la sua celebre classificazione dei segni in icone, indici e simboli, fornendo una definizione semiotica dei principali oggetti logici, come la proposizione, e ampliando il campo della logica per includere elementi tradizionalmente esclusi (come gli atti linguistici).

Secondo Peirce, la logica coincide con la semiotica: nella sua fase iniziale, egli interpreta le premesse di un argomento come segni della conclusione, definendo la logica come la scienza degli argomenti e la semiotica come quella dei segni, stabilendo così un'equivalenza tra le due discipline. In una fase più matura del suo pensiero, a partire dal 1894, Peirce riformula questa concezione, considerando l'argomento come un insieme di proposizioni, le quali sono esse stesse segni. La proposizione, intesa come segno per eccellenza, assumerà infatti una posizione centrale nella grammatica speculativa.

In *On a New List of Categories* (1867) propone una prima articolazione della teoria dei segni distinguendo tre tipi fondamentali: icone, indici e simboli. Le icone rappresentano il loro oggetto in virtù di una qualità condivisa:

Le rappresentazioni la cui relazione con i loro oggetti consiste semplicemente nel fatto che rappresentazioni e oggetti hanno in comune qualche qualità, e queste rappresentazioni possono essere chiamate somiglianze. (CP 1.558; trad. it. in *Opere*, p. 68)

Gli indici, invece, instaurano con l'oggetto una relazione di effettiva contiguità:

Le rappresentazioni la cui relazione con i loro oggetti consiste in una corrispondenza di fatto, e queste rappresentazioni possono essere chiamate indici o segni. (CP 1.558; trad. it. in *Opere*, p. 68)

Infine, i simboli sono rappresentazioni la cui relazione con l'oggetto si fonda su un carattere imputato, connotando e denotando allo stesso tempo:

Le rappresentazioni che hanno per base della relazione con i loro oggetti un carattere imputato, rappresentazioni che sono segni generali, e possono essere dette simboli. (CP 1.558; trad. it. in *Opere*, p. 68)

I simboli si suddividono ulteriormente in termini, proposizioni e argomenti:

- 1) simboli che direttamente si riferiscono [...] alle loro basi o qualità imputate [...] sono termini;
- 2) simboli che si riferiscono ai loro oggetti definendoli mediante uno o più termini [...] sono proposizioni;
- 3) simboli che determinano i loro interpretanti e costringono le menti cui si rivolgono ad ammettere certe premesse [...] sono argomenti. (CP 1.559; trad. it. in *Opere*, p. 69)

È importante sottolineare che il simbolo non si definisce primariamente come segno convenzionale, ma come segno generale: denota un oggetto generale, attraverso la connotazione di un certo carattere. La convenzionalità riguarda solo una parte dei simboli (per esempio le parole), ma Peirce distingue esplicitamente tra simboli naturali (come i concetti) e simboli convenzionali. Il punto decisivo è che il simbolo è di per sé un tipo generale, che esiste attraverso le sue repliche.

Un simbolo [...] non può indicare nessuna cosa particolare, bensì denota un genere di cose, e non solo, ma è esso stesso un genere e non una cosa singola. [...] La parola vive nella mente di coloro che la usano. (EP 2, pp. 9–10; trad. mia)

In questa prospettiva, il simbolo è generale in sé stesso: non è un esistente, ma ciò che regola gli esistenti.

Questa prima articolazione della semiotica — icone, indici, simboli — appartiene alla fase iniziale del pensiero peirciano. Pur non corrispondendo ancora alla complessità della teoria matura, resta essenziale per cogliere la struttura elementare dei segni e fornisce il punto di partenza per comprendere la relazione tra segni e inferenza. In effetti, Peirce intende ogni forma di ragionamento — abduzione, deduzione, induzione — come una trasformazione segnica: un argomento è un insieme ordinato di segni in cui le premesse determinano un interpretante (la conclusione). La logica diventa così una teoria dei segni in azione, e la struttura inferenziale dipende da come i segni vengono costruiti, combinati e trasformati.

Nel decennio 1885–1895, la teoria dei segni di Peirce si articola principalmente attorno alla distinzione tra icone, indici e simboli e alla differenziazione tra termini, proposizioni e argomenti. Questo schema, tuttavia,

si rivela presto insufficiente: alcuni segni — come pronomi o fotografie — mostrano comportamenti non riconducibili a una classificazione rigida, rivelando la necessità di un quadro più flessibile.

Nella *Minute Logic* del 1902, Peirce introduce una riforma decisiva: le tricotomie non sono più divisioni dirette delle classi di segni, ma parametri che permettono di classificarli. La semiotica diventa così una teoria combinatoria dei parametri-segno, più che un sistema di etichette (Bellucci 2018).

Una seconda riforma, presentata nel *Syllabus* del 1903, chiarisce la distinzione tra generalità e occorrenza attraverso i concetti di qualisegno, sinsegno e legisegno. Peirce definisce infatti:

Un qualisegno è una qualità che è Segno [...]

Un sinsegno è una cosa o un evento effettivamente esistente che è un segno [...]

Un legisegno è una legge che è un segno [...]. Ogni legisegno significa quando è applicato in una sua occorrenza, che può essere detta una sua Replica. (CP 2.246; trad. it. in *Opere*, p. 153)

Questa distinzione permette di comprendere che la presenza di repliche non è una prerogativa esclusiva dei simboli, ma riguarda il rapporto tra type e token, cioè tra generalità e occorrenze. Tale chiarimento riordina definitivamente i problemi posti dagli indici e dai simboli nelle fasi precedenti del pensiero peirceiano. In questo contesto matura anche la definizione relazionale di segno proposta nella *Minute Logic*:

Un Segno è qualsiasi cosa riferita a una Seconda cosa, il suo Oggetto, rispetto a una Qualità, in modo tale da portare una Terza cosa, il suo Interpretante, in rapporto con lo stesso oggetto [...] ad infinitum. (CP 2.92; trad. it. in *Opere*, p. 123)

La semiosi è dunque una relazione triadica irriducibile e dinamica, in cui segno, oggetto e interpretante non sono entità stabili ma posizioni in una struttura relazionale, riorganizzabili attraverso il processo interpretativo (Paolucci 2010). La semiosi peirciana non descrive quindi una relazione statica tra segno e oggetto, ma una logica delle relazioni in cui ogni interpretante può a sua volta funzionare come segno in una catena potenzialmente illimitata di determinazioni.

Le precisazioni introdotte da Peirce all'inizio del Novecento consentono di delineare la struttura matura della sua teoria dei segni: una teoria fondata su relazioni triadiche, sulla distinzione tra generalità e occorrenze e su criteri classificatori che specificano i modi in cui un segno può rappresentare il proprio oggetto. Questo assetto concettuale chiarisce il legame tra semiotica e attività di pensiero e permette di comprendere come, per Peirce, il ragionamento consista in operazioni condotte su rappresentazioni. È a partire da queste basi che diventa possibile analizzare la natura della matematica e il ruolo che essa attribuisce alle forme rappresentative nella costruzione delle inferenze.

Sul piano epistemologico, Peirce riformula anche la definizione di matematica. Riprendendo la formula del padre Benjamin — la matematica come

scienza che trae conclusioni necessarie — egli ne modifica l'accento: la matematica diventa una “scienza condizionale o ipotetica”, che non si occupa di come le cose sono realmente, ma di come potrebbero essere supposte:

Scienza Condizionale o Ipotetica della Matematica Pura, il cui unico scopo è scoprire non come le cose siano realmente, ma come potrebbero essere supposte, se non nel nostro universo, allora in qualche altro. (EP 2, p. 144; trad. mia)

La matematica è quindi definita dal metodo ipotetico-deduttivo, non dal riferimento a un oggetto empirico. Di conseguenza, Peirce può parlare della matematica come scienza delle icone:

La matematica è puramente ipotetica, tutte le sue affermazioni sono nella forma “se-allora”; [...]. Ciò la rende una scienza delle icone, in quanto tutta questa inferenza riguarda strutture iconiche. Le icone non possono ingannare e farti credere in qualcosa di illogico (sebbene, ovviamente, in qualcosa di irreali), perché rappresentano sempre qualcosa di logicamente possibile [...]. La matematica è, per così dire, una mappatura del campo delle possibilità formali iconiche. (Stjernfelt, 2007, pp. 81–82; trad. mia, da NEM IV 242–243)

Le icone trasmettono proprietà e sono rappresentative di tutti gli oggetti che condividono tali proprietà, senza impegnarsi sulla loro esistenza. Per questo sono strumenti privilegiati del pensiero matematico: la matematica esplora possibilità attraverso strutture iconiche, senza richiedere un referente empirico.

In questa prospettiva, Peirce definisce la matematica anche come “arte della generalizzazione esatta” e “arte che traccia le conseguenze delle ipotesi” (Atkins & Hull, 2017, p. 160). Il lavoro del matematico consiste nel manipolare stati ipotetici rappresentabili: il ragionamento può essere condotto senza alcun riferimento a fatti esterni, purché le condizioni di esistenza degli oggetti ipotetici siano chiaramente specificate.

Questo non significa che la matematica sia meno “osservativa” delle altre scienze: essa osserva strutture formali rese percepibili dai diagrammi, strumenti che permettono di esplorare relazioni tra oggetti ipotetici (Bellucci, 2025). Tale ruolo osservativo è reso possibile proprio dalla natura ipotetica della matematica, che fonda il carattere diagrammatico del ragionamento peirciano.

All'interno del metodo scientifico, Peirce distingue tre forme di inferenza: abduzione, deduzione e induzione. L'abduzione rappresenta il punto di partenza del ragionamento, dove si formulano ipotesi esplicative, pur senza alcuna garanzia di verità. A questa fase segue la deduzione, che esplora le implicazioni necessarie delle ipotesi, derivando conclusioni logiche che, pur non aggiungendo nuove conoscenze empiriche, chiariscono le relazioni implicite nelle premesse. Infine, l'induzione verifica la validità delle conclusioni dedotte attraverso il confronto con i dati osservati, completando il ciclo inferenziale (Hoffmann, 2003, 2010).

L'abduzione è il processo di formazione di un'ipotesi esplicativa. È l'unica operazione logica che introduce un'idea nuova. [...]

La deduzione evolve semplicemente le conseguenze necessarie di un'ipotesi pura [...]

L'induzione consiste nel partire da una teoria, dedurre da essa previsioni sui fenomeni e osservare quei fenomeni per vedere quanto queste previsioni coincidano con la teoria. (EP 2, p. 216; trad. mia)

La deduzione si distingue per il suo carattere di necessità: se le premesse sono vere e la regola inferenziale è valida, la conclusione segue inevitabilmente. È per questo che, per Peirce, il ragionamento matematico è in primo luogo un ragionamento deduttivo, costruito a partire da ipotesi e sviluppato attraverso conseguenze necessarie.

Nella prospettiva peirciana, la deduzione si fonda a sua volta sull'uso di diagrammi. Peirce sostiene infatti che ogni inferenza necessaria consiste nel costruire una rappresentazione iconica di una situazione generale, nell'osservarne le relazioni e nel trarre conclusioni che emergono da tale osservazione strutturale. Il diagramma non è quindi un ausilio psicologico, ma la condizione di possibilità della deduzione.

Nella tassonomia matura dei segni, i diagrammi costituiscono una sottoclasse delle icone. Essi sono “icone scheletriche”, che analizzano l'oggetto nelle sue componenti e rendono percepibili le “relazioni razionali” tra esse — spaziali, logiche, quantitative o di altro tipo (Stjernfelt 2011): rappresentano forme di relazione. In tal modo, costituiscono il principale mediatore epistemico del pensiero sintetico, lo strumento che permette di produrre nuove informazioni sull'oggetto rappresentato.

Per chiarire il funzionamento cognitivo dei diagrammi, è decisivo ricorrere al concetto — elaborato nella letteratura contemporanea (Stjernfelt 2007, 2011) — di iconicità operativa. Un'icona è definibile operativa, quando, attraverso la manipolazione delle sue parti, consente di far emergere informazioni nuove (e tuttavia necessarie) sul proprio oggetto. L'iconicità, qui, non dipende da una somiglianza percettiva, ma dalla possibilità di trattare il segno come un modello manipolabile dal quale ricavare conseguenze deduttive. Per Peirce, ciò non è un fatto psicologico, ma trascendentale: i diagrammi non facilitano la deduzione, la rendono possibile. Un passaggio di Peirce riassume efficacemente questo ruolo:

«Il diagramma è l'interpretante di un simbolo in cui la significazione del simbolo diventa una parte dell'oggetto dell'icona» (SW, p. 173; trad. mia).

Prendiamo come esempio il concetto di triangolo, cioè il concetto di una figura piana con tre lati e tre angoli. Tale concetto è, in quanto generale, un simbolo. Affinché però questo concetto diventi oggetto del ragionamento matematico e si possano così dedurre verità riguardanti le sue proprietà, non è sufficiente limitarci a pensare al concetto di triangolo. È necessario invece rappresentarlo in forma iconica.

In questo processo, il diagramma svolge il ruolo di interpretante del simbolo

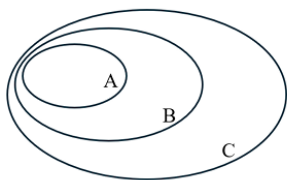
attraverso la sua trasformazione in un'icona. In altre parole, il simbolo viene interpretato iconicamente attraverso il diagramma, che conserva la generalità del simbolo ma la rappresenta in un'immagine. La significazione del simbolo diviene così parte della significazione dell'icona, permettendo di trarre informazioni aggiuntive sull'oggetto rappresentato.

L'iconicità operativa riguarda dunque la capacità del diagramma di essere manipolato per far emergere nuove informazioni sul suo oggetto. È questa la dimensione in cui il diagramma diventa il veicolo della deduzione: non rappresenta solo una situazione, ma permette di esplorarla. Un altro esempio è dato dalla rappresentazione della relazione d'inclusione tra insiemi. Le premesse simboliche:

A è contenuto in B

B è contenuto in C

richiedono un passaggio inferenziale per ottenere la conclusione "A è contenuto in C". Un diagramma di insiemi annidati rende invece tale proprietà immediatamente visibile: la relazione appare come parte della struttura iconica, prima ancora che come conclusione dedotta.



In questo senso, la deduzione coincide con l'osservazione delle relazioni interne al diagramma.

Accanto a questa dimensione operativa, Stjernfelt (2011) ha proposto di distinguere una seconda modalità del funzionamento iconico, che chiama iconicità ottimale, che riguarda il grado in cui una rappresentazione rende immediatamente percepibile la struttura che vuole mostrare. È il caso, ad esempio, della differenza tra la rappresentazione grafica e quella algebrica di una funzione: entrambe contengono le stesse informazioni (hanno quindi la stessa iconicità operativa), ma il grafico rende alcune proprietà globali immediatamente visibili, mentre l'espressione algebrica le richiede in forma deduttiva. Allo stesso modo, un'immagine pixelata e la sua codifica digitale sono equivalenti in termini informativi, ma non in termini percettivi.

Queste due dimensioni non sono categorie peirciane, ma strumenti ricostruttivi utili per chiarire perché i diagrammi, nella prospettiva di Peirce, non si limitino a rappresentare: essi rendono possibile la deduzione e allo stesso tempo modellano il modo in cui la struttura può essere percepita. Proprio questa duplice natura — inferenziale e percettiva — costituisce il punto di contatto privilegiato con il problema duvaliano delle trasformazioni tra registri di rappresentazione.

4. Dialogo fra i Due Pensieri

Quanto esposto finora permette di affrontare in modo più mirato un'analisi dialogica tra i due autori. Come discusso in precedenza, per Duval la specificità del pensiero matematico è legata alla necessità di operare con una pluralità di sistemi semiotici, ciascuno dei quali rende visibili solo alcune proprietà dell'oggetto: la comprensione richiede il coordinamento fra registri, affinché l'invariante concettuale possa essere distinto dalle sue rappresentazioni.

Peirce, invece, colloca il ruolo dei segni all'interno di una teoria generale del ragionamento: non solo distingue diverse funzioni rappresentative, ma mostra come ogni inferenza matematica sia resa possibile da una certa forma di iconicità operativa. La rappresentazione non è allora ciò che permette di accedere a un oggetto già costituito, ma ciò attraverso cui l'oggetto stesso viene determinato nel corso della semiosi.

Questa differenza di impostazione epistemologica — l'invariante che precede le rappresentazioni nel modello di Duval e l'oggetto che emerge dalle trasformazioni rappresentative in Peirce — permette di mettere meglio a fuoco la diversa impostazione teorica dei due autori. Entrambi attribuiscono un ruolo centrale ai segni nel pensiero matematico e riconoscono che le trasformazioni rappresentative possiedono una portata cognitiva fondamentale; tuttavia, ciò che in Duval è finalizzato a evitare la sovrapposizione tra oggetto e rappresentazione, in Peirce assume la forma di un meccanismo inferenziale che genera nuove informazioni. In modo analogo, se per Duval la complementarità tra registri permette di individuare un oggetto stabile attraverso prospettive differenti, per Peirce la pluralità rappresentativa apre invece a una riorganizzazione del campo inferenziale e a nuove modalità di osservare la struttura del problema.

Alla luce di questa distanza concettuale, il paradosso cognitivo duvaliano può essere letto in due modi diversi: come tensione epistemica tra l'oggetto matematico e le sue molteplici rappresentazioni, e come dinamica inferenziale interna alle rappresentazioni stesse. È questo secondo livello, reso possibile dal pensiero diagrammatico peirciano, che consente di reinterpretare il paradosso non come un dualismo irrisolto, ma come un problema relativo alle modalità con cui le rappresentazioni strutturano lo spazio delle inferenze.

Nel valutare la tricotomia peirciana, Duval ne sottolinea la “debole capacità discriminante”, sostenendo che essa si limita a descrivere ciò che segni e rappresentazioni hanno in comune — il “svolgere funzione di...” — trascurando la specificità del segno come relazione di riferimento e non di causa-effetto. In questo senso, egli giudica il modello di Peirce ancora dipendente da un “primo schema di analisi della conoscenza” e gli attribuisce una priorità cognitiva ed epistemologica dell'oggetto rispetto alle rappresentazioni che possono esserne prodotte. In continuità con la propria concezione, l'oggetto matematico viene così inteso come un invariante che permane dietro una molteplicità di rappresentazioni e che funge da riferimento

stabile per il coordinamento dei registri.

La debole capacità discriminante di questa tricotomia riflette la definizione di segno fornita da Peirce. Essa si limita a considerare la proprietà comune delle rappresentazioni e dei segni (“svolge la funzione di...”), trascurando la proprietà specifica del segno (ovvero il fatto che la sua relazione con l’oggetto sia una relazione di riferimento e non di causa-effetto). In questo senso, si può affermare che il modello di Peirce dipenda ancora dal primo schema di analisi della conoscenza. A conferma di ciò, basta ricordare che il suo modello triadico assume la priorità cognitiva ed epistemologica dell’oggetto rispetto a tutte le rappresentazioni che possono essere prodotte. Questo modello si fonda su un approccio pragmatico alla conoscenza e distingue tre fasi nella sua formazione: “la primità (Firstness), la secondità (Secondness) e la terzità (Thirdness)”. Queste fasi rappresentano, rispettivamente, l’interpretazione attraverso un inter oggetto, poi una rappresentazione dell’oggetto, e infine un interprete, che genera una nuova rappresentazione dell’oggetto trasformandola a sua volta in un nuovo oggetto. (Duval 2017, p. 15; trad. mia).

Questa lettura tende così a collocare Peirce su un terreno concettuale vicino a quello stesso di Duval: il rapporto oggetto–rappresentazione rimane centrale, e la dimensione propriamente triadica della semiosi viene in parte letta alla luce di una prospettiva ancora oggetto-centrica.

Se si torna ai testi peirciani, emerge un quadro differente. Peirce rifiuta esplicitamente ogni forma di intuizionismo: «non abbiamo capacità intuitive: ogni cognizione è determinata logicamente da cognizioni precedenti» (CP 5.265; trad. it. in Opere p. 83). La conoscenza non prende mai le mosse da un contatto immediato con un oggetto, ma da una rete pregressa di inferenze e di segni; l’oggetto non è un punto di partenza originario, ma il risultato di una determinazione progressiva all’interno del processo semiotico.

Nel caso della matematica, questo implica che gli oggetti non vengano concepiti come entità reali da rappresentare, ma come stati di cose ipotetici, le cui conseguenze logiche vengono esplorate attraverso sistemi di rappresentazioni. Il dominio della mediazione e dell’interpretazione è dunque il luogo in cui si costituisce il significato; è qui che il segno matematico opera, non come semplice “vestito” di un oggetto predefinito, ma come elemento di un sistema inferenziale che genera nuove connessioni.

In questo senso, la priorità epistemologica non spetta all’oggetto, ma al processo inferenziale: ciò che conta non è raggiungere un referente autonomo, bensì stabilire regolarità e relazioni all’interno di una pratica di ragionamento. L’interpretazione di Duval, centrata sulla priorità dell’oggetto, mette così in secondo piano questo spostamento di accento: in Peirce, ciò che assume rilievo primario non è l’oggetto in sé, ma il processo inferenziale che lo determina progressivamente.

Alla luce di questa differenza, il paradosso cognitivo di Duval può essere ricollocato. Nella sua formulazione originaria, esso nasce dal fatto che, da un lato, le rappresentazioni sono indispensabili per accedere agli oggetti

matematici; dall'altro, vi è il rischio di confondere le rappresentazioni con gli oggetti, che devono invece essere pensati come invarianti indipendenti rispetto ai segni che li presentano. La soluzione proposta da Duval consiste nel sottolineare la parzialità di ciascuna rappresentazione e nel fare del coordinamento tra registri la condizione per una comprensione più completa dell'oggetto: è attraverso la convergenza di più sistemi semiotici che si può stabilizzare l'invariante e separarlo dal segno.

Se però si assume la prospettiva peirciana, il problema cambia forma. In una matematica intesa come scienza ipotetica, la conoscenza non mira a "raggiungere" un oggetto autonomo, bensì a sviluppare sistemi di relazioni: dato uno stato di cose ipotetico, ciò che interessa è che cosa ne consegue, quali proprietà ulteriori possono essere inferite, quali connessioni si rendono visibili. L'oggetto matematico emerge dunque dal lavoro sulle rappresentazioni, non lo precede.

In questo quadro, il coordinamento fra registri non è più soltanto il mezzo per riconoscere un medesimo oggetto sotto forme diverse, ma diventa una modalità di costruzione inferenziale: ricostruire una rappresentazione in un altro sistema significa riorganizzare il campo delle relazioni accessibili. Il nuovo diagramma non si limita a "dire la stessa cosa" in un'altra forma, ma mette in evidenza strutture e proprietà che nel primo restavano implicite.

L'esempio della funzione è eloquente: seguendo Duval, si può dire che l'espressione algebrica e il grafico cartesiano rappresentano lo stesso oggetto concettuale e che lo studente deve imparare a coordinare i registri per coglierne l'invarianza; seguendo Peirce, le due rappresentazioni possono essere descritte come diagrammi che condividono una forma relazionale e che permettono di avanzare inferenzialmente nel processo conoscitivo, ciascuna mettendo in luce aspetti diversi della relazione funzionale. Dal punto di vista di Duval, l'attenzione è rivolta alla difficoltà cognitiva di riconoscere "lo stesso" oggetto funzione attraverso registri distinti; dal punto di vista di Peirce, lo stesso esempio mette in luce la diversa potenza inferenziale dei due diagrammi, evidenziando come il passaggio dall'uno all'altro modifichi il tipo di ragionamento reso disponibile allo studente.

Questa riformulazione trova un fondamento nella teoria matura dei segni peirciani. Nella prospettiva di Peirce, icona, indice e simbolo non sono classi rigide ma parametri secondo cui ogni segno può essere analizzato: una stessa rappresentazione comprende aspetti iconici, indicali e simbolici, che non operano allo stesso livello né nello stesso momento, ma possono essere messi in rilievo in fasi diverse del ragionamento. Questa caratterizzazione è innanzitutto teorica, ma chiarisce perché un diagramma possa funzionare inferenzialmente: nella manipolazione diagrammatica questi aspetti vengono modulati, e ciò permette di rendere visibili relazioni che nella rappresentazione precedente restavano implicite. L'articolazione parametrica del segno non introduce dunque sistemi eterogenei privi di comunicazione, ma offre la cornice

concettuale che rende intelligibile la continuità tra trasformazioni rappresentative diverse e la possibilità di riorganizzarle mettendo in evidenza differenti relazioni strutturali.

5. Conclusioni

Per concludere, è utile richiamare un caso didattico in cui le questioni teoriche discusse emergono con particolare chiarezza. Un ambito in cui ciò accade è quello dei grafici cartesiani, già affrontati in precedenza ma qui ripresi per mettere a fuoco, in modo conclusivo, la portata del problema.

Il contributo di Michale May, *Graphs as Images vs. Graphs as Diagrams: A Problem at the Intersection of Semiotics and Didactics* (Hull, K. A., Atkins, R. K, 2017), consente un approccio particolarmente utile per approfondire l'analisi. È possibile esplorare il modo in cui gli studenti affrontano lo studio introducendo il concetto di “approccio superficiale” (inteso come un approccio che rimane sulla superficie della comprensione). Questo tipo di apprendimento si basa principalmente sulla memorizzazione di grafici e schemi, scollegati dai modelli concettuali implicati. In questo modo, gli studenti tendono a concentrarsi sulle caratteristiche visive dei grafici, trattandoli come semplici immagini anziché come strutture relazionali. Tale atteggiamento può causare gravi difficoltà nella comprensione dei modelli che i grafici rappresentano.

Il concetto di graph as picture è stato introdotto da Claude Janvier e John Clement negli anni '80, identificandolo come un errore di comprensione comune tra gli studenti delle scuole secondarie nelle discipline scientifiche e matematiche. Questa dinamica emerge quando gli studenti cercano di associare le caratteristiche visive di una situazione, descritta in un problema, alle forme del grafico corrispondente da costruire, senza però considerare le relazioni concettuali e i vincoli simbolici presupposti. In termini peirciani, si tratta di una sovraestensione dell'aspetto iconico-percettivo e di quello indicale — che ancora il grafico alla situazione concreta — a scapito della componente simbolica che regola la sintassi cartesiana. Il risultato è che il grafico perde la sua funzione inferenziale: una rappresentazione costruita come immagine non consente di derivare nuove informazioni in modo controllato.

Il quadro peirciano permette di comprendere più precisamente perché ciò accade. Un diagramma è un segno complesso, nel quale aspetti iconici, indicali e simbolici convivono senza operare sullo stesso piano né nello stesso momento. È grazie a questa articolazione parametrica che la rappresentazione può rendere visibili certe relazioni, manipolarle e farne emergere di nuove. Ciò che deve essere preservato non è la forma della collina descritta nel problema, ma la struttura delle relazioni tra tempo e velocità, resa possibile dalle convenzioni del sistema cartesiano. L'errore del grafico come immagine mostra dunque l'incapacità di attivare correttamente il potenziale inferenziale del diagramma.

In questo quadro, il coordinamento tra registri — centrale per Duval — può

essere reinterpretato come una forma di riorganizzazione inferenziale: il passaggio da un registro all'altro non serve unicamente a riconoscere un medesimo oggetto stabile, ma a mettere in luce aspetti differenti di una stessa struttura relazionale e ad ampliare lo spazio delle inferenze possibili.

Da un punto di vista didattico, ciò suggerisce che il lavoro sulle rappresentazioni non debba limitarsi alla loro moltiplicazione o alla loro corretta lettura, ma debba mirare a rendere esplicita la funzione inferenziale di ciascun registro. Comprendere come e perché una rappresentazione permette certe operazioni — e non altre — è un elemento essenziale per sviluppare una padronanza flessibile dei segni matematici. L'integrazione tra Duval e Peirce permette così di spostare l'attenzione dall'accesso all'oggetto alla costruzione di reti di relazioni, offrendo una prospettiva dinamica che sostiene pratiche didattiche più sensibili alla funzione inferenziale delle rappresentazioni.

Riferimenti

- Bellucci, F. (2018). *Peirce's speculative grammar: Logic as semiotics*. Routledge.
- Bellucci, F. (2023). On mixed signs. *Versus*, 137(2), 357–372.
- Bellucci, F. (2025). *A scale of quantity: Kant and Peirce on mathematical reasoning* [in press].
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–16).
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 585–619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Duval, R. (2009). “Objet”: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). PUG.
- Duval, R. (2009–2010). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6(11–12), 127–131.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer.
- Hoffmann, M. H. G. (2003). Peirce's diagrammatic reasoning as a solution of the learning paradox. In G. Debrock (Ed.), *Process pragmatism: Essays on a quiet philosophical revolution* (pp. 121–143). Rodopi.
- Hoffmann, M. H. G. (2010). Theoric transformations and a new classification of abductive inferences. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 46(4), 570–590.

- Hull, K. A., & Atkins, R. K. (Eds.). (2017). *Peirce on perception and reasoning: From icons to logic*. Routledge.
- Moore, M. E. (Ed.). (2014). *Philosophy of mathematics: Selected writings*. Charles S. Peirce. Indiana University Press.
- Paolucci, C. (2010). *Strutturalismo e interpretazione*, Milano, Bompiani.
- Peirce, C. S. (1931–1958). *The collected papers of Charles Sanders Peirce* (C. Hartshorne, P. Weiss & A. W. Burks, Eds.; Vols. 1-8). Harvard University Press.
- Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce: Selected philosophical writings*, volume 2 (1893–1913) (Peirce Edition Project, Ed.). Indiana University Press. (citato come EP 2)
- Peirce, C. S. (2003). *Opere* (M. Bonfantini, Ed.). Bompiani. (citato come Opere)
- Peirce, C. S. (2020). *Selected writings on semiotics, 1894–1912* (F. Bellucci, Ed.). De Gruyter.
- Stjernfelt, F. (2007). *Diagrammatology: An investigation on the borderlines of phenomenology, ontology, and semiotics*. Springer.
- Stjernfelt, F. (2011). On operational and optimal iconicity in Peirce's diagrammatology. *Semiotica*, 186, 1–25. <https://doi.org/10.1515/semi.2011.005>
- Stjernfelt, F. (2022). *Sheets, diagrams, and realism in Peirce*. De Gruyter.
- Violi, P. (2012). Nuove forme di narratività. In A. M. Lorusso, C. Paolucci, & P. Violi (Eds.), *Narratività. Problemi, analisi, prospettive* (pp. 105–132). BUP.

Implementazione della Valutazione Formativa in Attività Argomentative per lo Sviluppo del Pensiero Algebrico: Indicatori e Dove Trovarli

Implementation of Formative Assessment in Argumentative Activities for the Development of Algebraic Thinking: Indicators and Where to Find Them

Implementación de la Evaluación Formativa en Actividades Argumentativas para el Desarrollo del Pensamiento Algebraico: Indicadores y Dónde Encontrarlos

Alessandra Boscolo, Francesca Morselli e Elisabetta Robotti

pp. 75–113

Un'Analisi delle Concezioni sulla Dimostrazione di Studenti di un Corso di Laurea in Matematica

An Analysis of Students' Conceptions of Proof in a Mathematics Degree Course

Un Análisis de las Concepciones de los Estudiantes sobre la Demostración en una Licenciatura de Matemáticas

Tania Bertolini e Miglena Asenova

pp. 115–159

Processi Semiotici Cognitivi nel Ragionamento Matematico: Il Pensiero di Raymond Duval alla Luce delle Teorie Semiotiche di Charles Sanders Peirce

Cognitive Semiotic Processes in Mathematical Reasoning: Raymond Duval's Thought in Light of Charles Sanders Peirce's Semiotic Theories

Procesos Semióticos Cognitivos en el Razonamiento Matemático: El Pensamiento de Raymond Duval a la Luz de las Teorías Semióticas de Charles Sanders Peirce

Asia Della Bruna

pp. 161–177
