

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La Matematica

e la sua Didattica

Anno 34, n. 1, 2026

Rivista di ricerca in Didattica della
Matematica fondata nel 1987

ISSN 3035-2940 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2026



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La Matematica

e la sua Didattica

Anno 34, n. 1, 2026

Rivista di ricerca in Didattica della
Matematica fondata nel 1987

ISSN 3035-2940 - Periodico semestrale - n.1 - Aprile 2026

In copertina:

Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La Matematica e la sua Didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).

Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Rivista di ricerca in Didattica della Matematica,
fondata nel 1987 da Bruno D'Amore,
direttore scientifico dal 1987 al 2021.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

<https://matdid-journal.unibo.it>

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Direttori:

Miglena Asenova, Maura Iori, Andrea Maffia, George Santi

Redazione:

Maura Iori

Proprietà Direzione Amministrazione Redazione:

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993

ISSN 3035-2940

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La Matematica e la sua Didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access e pubblicata sul seguente sito:

<https://matdid-journal.unibo.it>

La Matematica e la sua Didattica

NRD Università di Bologna, Italia.

Comitato di redazione

Direttore: Maura Iori (Italia)

Miglena Asenova (Italia)

Agnese Del Zozzo (Italia)

Alessandro Gambini (Italia)

Marzia Garzetti (Italia)

Comitato scientifico:

Samuele Antonini (Università di Firenze, Italia)

Luis Carlos Arboleda (Universidad del Valle, Cali, Colombia)

Luis Moreno Armella (Cinvestav, Ciudad de México, México)

Ferdinando Arzarello (Università di Torino, Italia)

Giorgio Bolondi (Università di Bolzano, Italia)

Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia)

Benedetto Di Paola (Università di Palermo, Italia)

Raymond Duval (Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale, Francia)

Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna, Italia)

Vicenç Font (Universitat de Barcellona, Spagna)

Athanasios Gagatsis (University of Cyprus, Nicosia, Cipro)

Juan D. Godino (Universidad de Granada, Spagna)

Colette Laborde (Université de Grenoble, Francia)

Salvador Llinares (Universidad de Alicante, Spagna)

Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena, Italia)

Luis Radford (Université Laurentienne, Canada)

Luis Rico (Universidad de Granada, Spagna)

Bernard Sarrazy (Université de Bordeaux, Francia)

Silvia Sbaragli (Dipartimento Formazione e Apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera)

Fernando Zalamea (Universidad Nacional, Bogotá, Colombia)

Indice

Editoriale

Miglena Asenova, Maura Iori, Andrea Maffia e George Santi

pp. 7–8

La Storia della Matematica in Classe: Una Proposta Didattica Ispirata a Johannes Kepler

History of Mathematics in the Classroom: A Didactic Proposal Inspired by Johannes Kepler

La Historia de las Matemáticas en el Aula: Una Propuesta Didáctica Inspirada en Johannes Kepler

Maria Giulia Lugaresi ed Elena Scalambro

pp. 9–54

Counting Squares or Measuring Length? Mathematics Teachers' Hermeneutical Competence

Contare i Quadretti o Misurare la Lunghezza? La Competenza Ermeneutica degli Insegnanti di Matematica

¿Contar Cuadritos o Medir la Longitud? La Competencia Hermenéutica de los Docentes de Matemática

Valentina Bernabè, Maria Chiara Cibien, Federica Ferretti e Serena Monica

pp. 55–81

The Philosophy and Ethics of Ethnomathematics: Rejecting the High versus Low Valuations

La Filosofia e l'Etica dell'Etnomatematica: Oltre la Distinzione tra Cultura Alta e Cultura Bassa

La Filosofía y la Ética de la Etnomatemática: Más allá de la Distinción entre Alta y Baja Cultura

Paul Ernest

pp. 83–99

Editoriale

Miglena Asenova, Maura Iori, Andrea Maffia e George Santi

Con questo numero, *La Matematica e la sua Didattica* continua a promuovere il dialogo tra prospettive teoriche, ricerca empirica e riflessione storico-culturale, offrendo ai lettori tre contributi che, pur affrontando temi differenti, condividono l'attenzione per la costruzione di significato e per il ruolo della matematica come pratica umana, culturale ed educativa.

Il fascicolo si apre con il lavoro di Maria Giulia Lugaresi ed Elena Scalambro, che propone un percorso didattico ispirato alla figura di Johannes Kepler. Attraverso l'impiego di fonti storiche originali, le autrici mostrano come la storia della matematica possa diventare un potente strumento per favorire una comprensione più profonda dei concetti matematici e per costruire percorsi interdisciplinari capaci di coinvolgere gli studenti.

Il secondo contributo, di Valentina Bernabè, Maria Chiara Cibien, Federica Ferretti e Serena Monica, affronta invece il tema dell'interpretazione degli errori degli studenti introducendo la nozione di competenza ermeneutica dell'insegnante. Lo studio evidenzia come la capacità di attribuire significato ai processi di pensiero degli allievi costituisca una componente fondamentale della professionalità docente e un promettente ambito di ricerca per la formazione degli insegnanti.

Desideriamo dedicare particolare attenzione al terzo articolo, firmato da Paul Ernest, una delle figure più autorevoli della filosofia dell'educazione matematica contemporanea. L'autore ha voluto offrire questo contributo come omaggio a Bruno D'Amore in occasione del suo ottantesimo compleanno. Non si tratta di una scelta casuale. L'articolo affronta infatti questioni epistemologiche ed etiche, proponendo una riflessione sul rapporto tra conoscenza matematica, giustizia epistemica e gerarchie culturali e mostrando come la distinzione tra cultura "alta" e cultura "bassa" attraversi non soltanto la matematica, ma anche altri ambiti della produzione culturale, tra cui la storia, il linguaggio e l'arte.

L'omaggio assume un significato particolare se si considera il percorso scientifico di Bruno D'Amore, che nel corso della sua carriera ha contribuito in modo decisivo allo sviluppo della ricerca sugli aspetti didattici ed epistemologici della didattica della matematica come disciplina di ricerca e, parallelamente, ha coltivato un profondo interesse per la critica e la storia dell'arte. Il dialogo ideale che si instaura tra il contributo di Paul Ernest e il percorso intellettuale di Bruno D'Amore rende questo articolo un riconoscimento particolarmente significativo, capace di testimoniare l'influenza che il suo pensiero continua a esercitare nella comunità scientifica internazionale.

Con l’augurio che questi lavori possano stimolare nuove riflessioni e nuovi percorsi di ricerca, ringraziamo gli autori, i revisori e tutti coloro che, con il loro lavoro, continuano a sostenere la crescita della nostra comunità scientifica.

La Storia della Matematica in Classe: Una Proposta Didattica Ispirata a Johannes Kepler

History of Mathematics in the Classroom: A Didactic Proposal Inspired by Johannes Kepler

La Historia de las Matemáticas en el Aula: Una Propuesta Didáctica Inspirada en Johannes Kepler

Maria Giulia Lugaresi¹ e Elena Scalambro²

¹ Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Ferrara, Italia

² Dipartimento di Biotecnologie Molecolari e Scienze per la Salute, Università di Torino, Italia

Sunto. *L'uso di fonti storiche primarie è uno strumento efficace per un insegnamento coinvolgente della matematica. Si propongono qui alcune attività laboratoriali, agevolmente implementabili in classe a livello di scuola secondaria, basate sulle opere di Johannes Kepler. Partendo da passi della Nova stereometria doliorum vinariorum sul calcolo dei volumi e della Strena seu de nive sexangula sulla geometria della neve, il percorso mira a consolidare argomenti matematici specifici, a incoraggiare il pensiero critico degli studenti e a favorire i collegamenti interdisciplinari.*

Parole chiave: J. Kepler, volumi, botti di vino, geometria esagonale, fiocchi di neve.

Abstract. *The adoption of primary historical sources is an effective tool for teaching mathematics in an engaging way. This paper proposes some workshop activities, easily implementable in secondary school classrooms, based on the works of Johannes Kepler. Starting from passages from the Nova stereometria doliorum vinariorum on the calculation of volumes and the Strena seu de nive sexangula on the geometry of snow, the approach aims to consolidate specific mathematical topics, encourage students' critical thinking, and foster interdisciplinary connections.*

Keywords: J. Kepler, volumes, wine barrels, hexagonal geometry, snowflakes.

Resumen. *El uso de fuentes históricas primarias es una herramienta eficaz para una enseñanza atractiva (o motivadora) de las matemáticas. Se proponen aquí algunas actividades de taller, fácilmente implementables en el aula a nivel de enseñanza secundaria, basadas en las obras de Johannes Kepler. Partiendo de pasajes de la Nova stereometria doliorum vinariorum sobre el cálculo de volúmenes y de la Strena seu de nive sexangula sobre la geometría de la nieve, la propuesta tiene como objetivo consolidar temas matemáticos específicos, fomentar el pensamiento crítico de los estudiantes y favorecer las conexiones interdisciplinarias.*

Palabras clave: J. Kepler, volúmenes, barriles de vino, geometría hexagonal, copos de nieve.

1. Introduzione

In questo contributo, incentrato sulla figura di Johannes Kepler (1571-1630), ci proponiamo di descrivere un possibile percorso tematico rivolto a studenti della scuola secondaria, basato su alcune opere matematiche del celebre scienziato tedesco. Le attività, facilmente riproducibili in classe, sono state elaborate a partire dalla lettura di alcuni brani tratti da due opere di Kepler: la *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615), riguardante il calcolo di volumi di particolari solidi di rotazione, e la *Strena seu de nive sexangula* (1611), dedicata alla forma dei fiocchi di neve.

L'uso di fonti originali tratte dalla storia della matematica rappresenta una pratica didattica consolidata e, a nostro avviso, preziosa per l'insegnamento della disciplina. La nostra proposta è concepita anche come possibile strumento per la formazione degli insegnanti e dei futuri insegnanti della scuola secondaria.¹ L'avvicinamento ai testi originali agisce infatti come un mediatore per superare una visione puramente trasmissiva dell'insegnamento, promuovendo uno stile più consapevole e mirato al recupero delle radici cognitive—intese come nuclei di conoscenza intuitiva dotati di potenziale per la successiva formalizzazione (Tall, 1989; Tall & Thomas, 1991)—dei concetti. Tale pratica permette a chi insegna di consolidare la propria preparazione culturale e di acquisire strumenti metodologici concreti per progettare, trasporre e sperimentare in aula percorsi laboratoriali efficaci (Furinghetti, 2007; Tournès, 2022). L'idea di 'laboratorio di matematica' a cui ci rifacciamo è quella presentata in UMI-CIIM (2003), in cui si chiarisce che:

il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche sperimentazioni). (UMI-CIIM, 2003, p. 28)

In un'ottica di insegnamento della matematica sempre più attento alla qualità dei processi di apprendimento e alla loro significatività per gli studenti, integrare la storia della matematica nella pratica didattica appare una prospettiva particolarmente efficace, capace di restituire alla disciplina non solo il suo carattere dinamico, ma anche il suo lato umano (Katz & Tzanakis, 2011; Fauvel

¹ Questo articolo amplia e rielabora un tema che è stato precedentemente presentato in occasione di due eventi scientifici, il Seminario Nazionale dei Licei Matematici (Salerno, 11-13 settembre 2024) e il convegno "Dalla storia della matematica all'aula" (Ferrara, 9 maggio 2025), i cui materiali sono disponibili alla pagina web <https://www.sism.unito.it/it/progetti-e-materiali>. Una versione preliminare e necessariamente più sintetica del presente contributo è stata pubblicata in (Lugaresi & Scalambro, 2025).

& Van Maanen, 2000). In questa dimensione, la storia della matematica non si configura soltanto come uno sfondo narrativo, ma come un vero e proprio strumento epistemologico e didattico. Essa permette di mettere in evidenza la genesi dei concetti, le rotture e le continuità nel loro sviluppo, nonché le condizioni che hanno reso possibile l'emergere di una certa scoperta. Integrata nella progettazione didattica, la storia della matematica costituisce uno strumento didattico in grado di favorire la costruzione di significati, di stimolare il confronto critico e di rendere più accessibili concetti spesso percepiti come astratti e/o decontestualizzati. Mediante l'approccio storico gli studenti si confrontano con problemi autentici e possono costruire progressivamente una comprensione più profonda e consapevole della disciplina. La lettura di testi storici (in lingua originale o in traduzione italiana) permette agli studenti di confrontarsi con forme di pensiero talvolta distanti dal formalismo a cui sono abituati e di esplorare i tentativi più o meno fruttuosi di dimostrazione proposti in epoche storiche spesso molto lontane nel tempo, ma non per questo meno significative o più semplici. Attraverso la lettura e l'interpretazione di tali fonti, gli studenti possono essere coinvolti in un processo di ricostruzione del sapere che mette in luce la natura problematica e situata della conoscenza matematica, favorendo una partecipazione più attiva e consapevole. Questa prospettiva trova un solido fondamento teorico nella teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (2002), che pone al centro dell'analisi il sistema di relazioni tra insegnante, studente e sapere. In tale quadro, l'apprendimento è concepito come il risultato dell'interazione dello studente con una situazione opportunamente progettata, in cui il sapere emerge come risposta a un problema significativo. L'introduzione della dimensione storica, e in particolare delle fonti originali, può contribuire a costruire situazioni a-didattiche (nelle parole di Brousseau) autentiche, nelle quali il sapere matematico non è semplicemente trasmesso, ma progressivamente negoziato e costruito. Gli ostacoli epistemologici (Brousseau, 1983) appaiono come passaggi necessari nello sviluppo della conoscenza, spesso radicati nella storia stessa della matematica.

Riteniamo utile premettere alla nostra esposizione un (breve) paragrafo in cui ripercorreremo le principali vicende biografiche di Kepler, utili per inquadrare il personaggio nel suo tempo. Il lettore sarà guidato alla scoperta di eventi importanti per lo sviluppo della storia della scienza, ma anche di episodi, apparentemente "minori", che sono stati occasione di nuove scoperte matematiche. Questa breve premessa biografica permette di collocare la figura di Kepler nel suo tempo e di cogliere i legami tra le vicende biografiche dell'astronomo tedesco e alcuni eventi particolarmente rilevanti nel periodo storico a cavallo tra XVI e XVII secolo.

2. Johannes Kepler: Una Vita Avventurosa in Giro per l'Europa

Johannes Kepler è ricordato principalmente per le tre leggi sul moto dei pianeti

che ancora oggi portano il suo nome, ma nel corso della sua vita ha avuto modo di avvicinarsi (spesso in maniera casuale e inaspettata) ad altri ambiti di ricerca, giungendo a risultati di un certo interesse scientifico. Queste scoperte si prestano ad essere raccontate e contestualizzate in un percorso didattico interdisciplinare in cui discipline umanistiche come la storia, la filosofia, l'arte e il latino, si intrecciano con materie scientifiche come l'astronomia, le scienze naturali e la matematica, in particolare la geometria.

Nell'avventurosa vita dello scienziato si possono individuare cinque periodi (Caspar, 1962; Lombardi, 2008). Nato nel 1571 nella cittadina di Weil der Stadt, vicino a Stuttgart, nel sud della Germania, quattro anni dopo Kepler si trasferisce con la famiglia a Leonberg e successivamente a Ellmendingen. Avviato agli studi ecclesiastici, nel 1589 viene ammesso allo *Stift*, il monastero di Tubinga, dove si trattiene per quattro anni e mezzo, dedicandosi a studi di filosofia, matematica e teologia. Il suo professore di matematica e astronomia è il copernicano Michael Maestlin (1550-1631), da cui apprende le prime notizie del nuovo sistema astronomico. Nel 1594 si trasferisce alla scuola protestante di Graz per occupare la cattedra di matematica divenuta vacante e qui rimane per i successivi sei anni, guadagnandosi una certa fama come astrologo. Nel 1596 Kepler pubblica la sua prima opera a stampa, il *Mysterium cosmographicum*, in cui elabora il suo modello cosmologico: un sistema solare 'ad incastro' in cui le semisfere che rappresentano le orbite dei pianeti sono alternate a solidi regolari, a ciascuno dei quali risulta tangente all'interno la semisfera relativa ad un pianeta e all'esterno la semisfera relativa al pianeta successivo nell'ordine di distanza dal Sole (Figura 1).

La Terra è un cerchio, misura di tutte le cose. A questo circoscrivi un dodecaedro: il cerchio che lo comprenderà sarà Marte. A Marte circoscrivi un tetraedro: il cerchio che lo comprenderà sarà Giove. A Giove circoscrivi un cubo: il cerchio che lo comprenderà sarà Saturno. Ora, nella Terra inscrivi un icosaedro: il cerchio inscritto in esso sarà Venere. A Venere inscrivi un ottaedro: il cerchio inscritto in esso sarà Mercurio.²

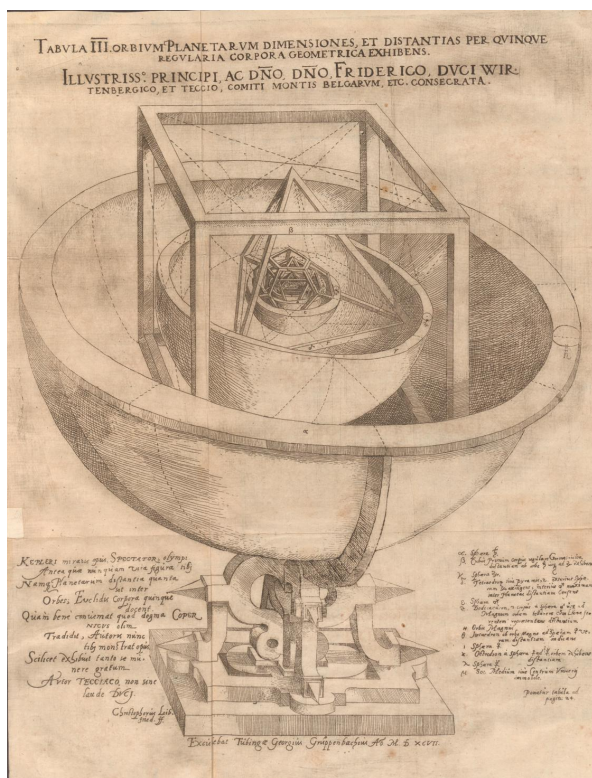
Nel 1597 sposa Barbara Muller, dalla quale avrà cinque figli. Nel 1600, obbligato a lasciare Graz per motivi religiosi, Kepler raggiunge Tycho Brahe (1546-1601) a Praga e nel 1601, alla sua morte, gli subentra nella carica di matematico dell'imperatore Rodolfo II. Il soggiorno nella città boema durerà dodici anni. Nel periodo trascorso a Praga Kepler pubblica alcune delle sue opere astronomiche più importanti, tra cui l'*Astronomia nova* (1609), nella quale sono formulate le prime due leggi planetarie. Nel 1611 dà alle stampe la

² La traduzione in italiano di questo passo è opera delle autrici a partire dal seguente testo originale in latino: *Terra est circulus mensor omnium: Illi circumscribe Dodecaedron: Circulus hoc comprehendens erit Mars. Marti circumscribe Tetraedron: Circulus hoc comprehendens erit Iupiter. Iovi circumscribe Cubum: Circulus hunc comprehendens erit Saturnus. Iam terra inscribe Icosaedron: Illi inscriptus Circulus erit Venus. Veneri inscribe Octaedron: Illi inscriptus Circulus erit Mercurius* (Kepler, 1596, c. 10).

Strena seu de nive sexangula; in quello stesso anno muore la moglie Barbara. In seguito alla cacciata dei luterani dalla città, spinto da difficoltà economiche, nel 1612 Kepler si trasferisce a Linz, con l'incarico di matematico provinciale. L'anno seguente si sposa con Susanna Reuttinger, da cui avrà altri sette figli. Il periodo trascorso nella città austriaca è molto produttivo dal punto di vista scientifico: qui, infatti, pubblica alcuni dei suoi lavori più importanti, tra i quali la *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) e l'*Harmonices mundi* (1619).³ Gli ultimi anni di vita sono particolarmente difficili: a causa delle persecuzioni religiose è costretto a spostarsi frequentemente. Durante uno di questi viaggi Kepler si ammala gravemente e muore a Ratisbona il 15 novembre del 1630.

Figura 1

Il sistema solare «ad incastro» di Kepler (Kepler, 1596, c. 25)



³ All'interno dell'*Harmonices mundi* (1619), che può essere considerato l'ultimo dei libri 'matematici' di Kepler, viene formulata la terza legge planetaria. Uno degli aspetti caratteristici delle sue opere è la continua ricerca di una perfetta armonia che per Kepler governa l'intero universo. Da questo punto di vista il primo e l'ultimo dei suoi libri 'matematici' risultano i più caratteristici: sia il *Mysterium cosmographicum* che l'*Harmonices mundi* testimoniano la costante ricerca di simmetrie da parte del matematico ed astronomo tedesco, confermata dallo studio di solidi e poligoni regolari, combinazioni di essi in modelli, numeri figurati e armonie musicali (Brigaglia, 2016; De Marchi, 2019, pp. 27-28).

3. Un Percorso Interdisciplinare sulla Matematica di Kepler

A partire da alcuni episodi emblematici della biografia di Kepler e in una prospettiva interdisciplinare, ci limitiamo a suggerire alcune riflessioni di più ampio respiro che possono coinvolgere l'insegnante di storia e filosofia.⁴ Queste nostre considerazioni prendono le mosse dalle *Indicazioni Nazionali per i licei 2010*, in cui si sottolineava la necessità per lo studente di acquisire “una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico” (MIUR, 2010, p. 337). Tale prospettiva trova oggi piena continuità e ulteriore conferma nel testo delle nuove *Indicazioni Nazionali*, recentemente pubblicato, in cui si ribadisce l'importanza di “analizzare tappe significative dello sviluppo del pensiero matematico in relazione al contesto storico e culturale” e di “riconoscere alcune connessioni tra matematica, filosofia e pensiero scientifico nella loro evoluzione storica”, promuovendo la consapevolezza del “ruolo della matematica nei diversi ambiti dell'attività umana” (MIM, 2026, p. 34). Un primo possibile collegamento riguarda la questione della riforma protestante e le sue ripercussioni sulle vicende biografiche dell'astronomo tedesco; un secondo spunto può derivare dal tema della rivoluzione astronomica che, a partire dall'opera di Niccolò Copernico (1473-1543) *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) e arrivando alla pubblicazione del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632) di Galileo Galilei (1564-1642), porta a mettere in discussione l'intera concezione cosmologica dell'universo.

Nel seguito di questo lavoro, come anticipato, presentiamo alcuni possibili approfondimenti sulla figura di Kepler, che intendono mettere in luce gli aspetti ‘matematici’ della sua biografia scientifica. Per fare questo prenderemo spunto da due opere meno note di Kepler, la *Nova stereometria doliorum vinariorum* e la *Strena seu de nive sexangula*, entrambe dedicate a questioni di carattere geometrico. Precisiamo che non tutte le attività sono state sperimentate in classe, ma sono concepite per guidare il docente nella scelta consapevole di testi da proporre ai propri studenti.

4. Primo Approfondimento: Botti di Vino e Calcolo di Volumi

Gli interessi geometrici di Kepler emergono, seppur marginalmente, già nella sua prima opera a stampa, il *Mysterium cosmographicum* (1596), e sono stati influenzati dall'attento studio delle opere dei suoi tre ‘maestri greci’: Euclide, Apollonio e, soprattutto, Archimede. L'omaggio al matematico siracusano risulta evidente, a distanza di quasi vent'anni, nella *Nova stereometria doliorum*

⁴ La nostra proposta si presta per essere attuata attraverso specifiche Unità di Apprendimento (UDA) interdisciplinari, concordate in sede di Consiglio di Classe, sia all'interno di contesti particolarmente favorevoli ai percorsi di natura interdisciplinare, come quelli che rientrano nella cornice del Liceo Matematico. Si veda, ad esempio, il convegno “Matematica e Storia nel Liceo Matematico”.

vinariorum (1615), ossia la *Nuova stereometria delle botti da vino*.

La peculiarità e la particolarità dell'opera emergono già dal titolo, su cui è opportuno soffermarsi per fare alcune considerazioni. Suggeriamo di partire da alcune domande stimolo da proporre agli studenti per avvicinarli al tema e per mettere in luce alcune parole chiave: “Che cosa intendiamo con *stereometria*?”, “Rispetto a cosa essa risulta *nuova*?”, “In che modo sono coinvolte le *botti da vino*?”. Per trovare risposta a queste domande, gli studenti, guidati dall'insegnante, possono leggere la prefazione, nella quale Kepler spiega la genesi dell'opera.⁵

Le scoperte scientifiche che Kepler si accinge a presentare al lettore sono state ispirate da un fatto apparentemente casuale, ossia l'acquisto di botti di vino per celebrare il matrimonio con la sua seconda moglie (Susanna), avvenuto il 30 ottobre 1613. Kepler racconta che la vendemmia in Austria in quell'anno era stata molto abbondante (“vindemia copiosa, nec minus generosa”) e i prezzi dell'uva erano molto bassi. Decide quindi di procurarsi una serie di botti con l'intenzione di farle riempire di vino. Osservando il venditore all'opera l'astronomo tedesco rimane colpito dalla semplicità della procedura usata per calcolare la capacità dei recipienti.

Dopo quattro giorni il venditore venne con un'asta di misurazione. Con quella e quella solamente egli indiscriminatamente e indifferentemente esplorò tutti i recipienti di vino trascurando la forma e senza raziocinio o calcolo. (De Marchi, 2019, p. 40)

Mediante un'asta rigida graduata posta all'interno della botte, in diagonale, il venditore riesce a dedurne la capacità.

Infatti, calata trasversalmente la punta di un'asta di bronzo nel foro di riempimento di una botte piena fino alla base [“calcem”] di entrambi i cerchi di legno—che chiamiamo comunemente fondi—dopo che da entrambe le parti apparve uguale la distanza dalla sommità della pancia [“a ventris summo”] fino al punto più basso di ciascuna tavola circolare [“ad utriusque circularis tabulae imum”]: dal segno del numero che era inciso sull'asta nel punto in cui terminava tale lunghezza, egli [il venditore] dichiarò il numero di anfore che la botte poteva contenere; e il prezzo fu calcolato secondo quel numero.

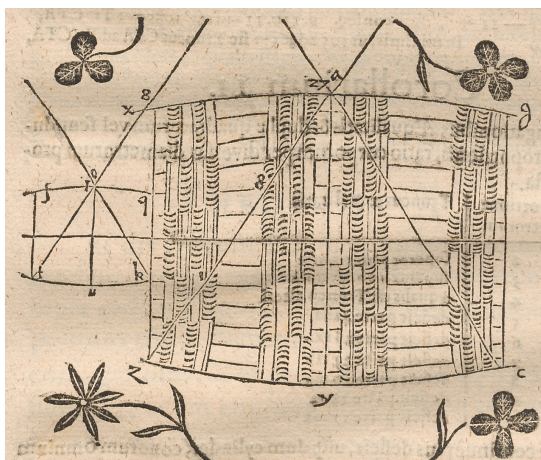
⁵ Per cogliere appieno le peculiarità del linguaggio dell'autore, l'opera può essere letta nella lingua originale (Kepler, 1615). Per le classi in cui non è previsto l'insegnamento del latino, si suggerisce il ricorso alla traduzione ‘ponte’ dall'inglese (Kepler, 2018). In questo secondo caso raccomandiamo al docente di prestare attenzione alle possibili ‘distorsioni’ che possono occorrere a seguito di una doppia traduzione (latino-inglese, inglese-italiano). In questa fase di analisi testuale e di traduzione il docente di matematica può lavorare in stretta collaborazione con il docente di latino (se previsto) o con quello di lingua inglese. Dal punto di vista etimologico-linguistico il docente di matematica può costruire un piccolo glossario in cui riportare non solo la traduzione dal latino all'italiano, ma anche il significato di alcuni termini matematici, oggi raramente utilizzati e dunque poco familiari agli studenti. Le traduzioni in italiano inserite all'interno di questo articolo sono state rielaborate a partire da (Kepler, 2018) e da (De Marchi, 2019).

Cominciai a meravigliarmi che una linea trasversale condotta attraverso il volume [“corpus”] di metà botte potesse essere indizio della capacità; e a dubitare anche dell’attendibilità di questa misurazione, poiché una botte molto corta tra i due fondi, solo con le imboccature [i fondi] un po’ più larghe, e perciò di capacità ridotta, potrebbe avere la medesima lunghezza dal foro di riempimento fino al punto più basso dell’uno o dell’altro cerchio [...]. (De Marchi, 2019, pp. 40-41)

Sulla base della descrizione fornita da Kepler, si comprende che la botte non poggia sulle basi circolari e che il foro di riempimento è collocato nel punto più alto della ‘pancia’ (Figura 2).⁶ Per stimare il volume delle botti di vino il venditore calcola il numero di anfore contenute nel barile utilizzando una semplice misurazione lineare: “la linea obliqua segnata attraverso il volume di metà del recipiente”.

Figura 2

A sinistra lo schema della botte descritta da Kepler (Kepler, 1615, c. 102), a destra alcuni esempi di botti



Stupito dall’immediatezza del metodo, ma dubbioso sull’affidabilità di tale misura, Kepler si propone di dare una giustificazione matematica a tale pratica: “sembrò non essere sconveniente per un nuovo marito esplorare, secondo leggi geometriche [«ad leges Geometricas»], un nuovo fondamento per la certezza matematica di questa misurazione [...]”.

È interessante far osservare agli studenti in che modo da un episodio casuale, come quello capitato a Kepler, possa scaturire la giusta intuizione per una nuova ricerca. Il problema in questo caso è quello della ricerca del barile che, a parità di diagonale, abbia la massima capacità. Il matematico scoprirà che la forma della botte è quella che permette di contenere la maggior quantità di vino.

Per addentrarci in questa ricerca e costruire il nostro percorso tematico sulle

⁶ Il foro praticato in corrispondenza del diametro massimo della botte, che serve per vuotarla o riempirla è detto cocchiere.

orme di Kepler è opportuno fornire qualche ulteriore dettaglio sull'opera. La *Nova Stereometria* è divisa in tre parti: nella prima, dedicata alla “geometria solida dei corpi curvi e regolari” (ossia ai solidi di rotazione), Kepler studia i rapporti tra aree e volumi di figure piane e solide e il volume di vari solidi di rotazione, riprendendo e ampliando alcuni risultati ottenuti da Archimede (III sec. a.C.) ed esposti nel trattato *De conoidibus et sphaeroidibus*.⁷ È esplicito l'omaggio al grande matematico siracusano: nella prima sezione (teoremi 1-17), Kepler riprende risultati di geometria piana e solida dovuti ad Archimede; nella seconda sezione, *Supplemento ad Archimede* (teoremi 18-30), dimostra alcuni teoremi riguardanti solidi di rotazione che applicano metodi dimostrativi diversi rispetto a quelli utilizzati nella stereometria archimedeica ed estende l'analisi ad altri 87 solidi, in aggiunta ai 5 studiati da Archimede, ottenuti mediante la rotazione delle sezioni coniche attorno ad assi di rotazione paralleli o perpendicolari a quello di simmetria. Si chiarisce a questo punto il significato del titolo dell'opera: Kepler si propone di recuperare e di dimostrare con un nuovo approccio alcuni teoremi di geometria solida scoperti da Archimede. Si tratta quindi di una “nuova stereometria”, ossia di una nuova geometria solida. La seconda parte dell'opera riguarda lo studio della forma della botte austriaca. Il calcolo del volume di questo particolare contenitore, infatti, rappresenta un perfetto campo di applicazione dei teoremi di Archimede riguardanti sferoidi e conoidi. Come sarà spiegato in seguito, Kepler inizialmente approssima la botte con un cilindro, osservando però che questa forma non tiene conto della ‘pancia’ della botte. In seconda approssimazione considera due tronchi di cono uguali che combaciano lungo la circonferenza maggiore, ma questa forma crea uno spigolo vivo al centro, mentre le doghe delle botti hanno una curvatura più arrotondata. Kepler immagina quindi un solido a forma di cedro, dal quale vengono eliminate le estremità appuntite, ottenendo la forma ‘tradizionale’ della botte, con curvatura convessa e basi piatte. Nella terza e ultima parte dell'opera spiega come utilizzare i risultati contenuti nelle parti precedenti: non tutti i recipienti, infatti, rispettano gli stessi rapporti che valgono per le botti austriache.

⁷ L'opera *De conoidibus et sphaeroidibus* (*Sui conoidi e gli sferoidi*) riguarda lo studio di tre solidi introdotti da Archimede: il conoide rettangolo (o parabolico, oggi denominato paraboloide di rotazione), il conoide ottusangolo (o iperbolico, oggi denominato iperboloide di rotazione) e lo sferoide (o ellissoide di rotazione), a sua volta distinto in sferoide allungato e sferoide schiacciato, a seconda che la rotazione dell'ellisse abbia luogo rispettivamente intorno all'asse maggiore o all'asse minore. Se l'ellisse generatrice è un cerchio, la rotazione genera la sfera. Il testo di Archimede consiste in un solo libro di 32 proposizioni, la cui prima traduzione latina è quella di (Geschauff, 1544) e, successivamente, è stata pubblicata in (Commandino, 1558). L'edizione completa in traduzione italiana delle *Opere* di Archimede si trova in (Frajese, 1974).

4.1. *Spunti Didattici per la Lettura della Nova Stereometria di Kepler*

Il metodo usato da Kepler, che consiste nell'immaginare che i solidi siano suddivisi in un certo numero di elementi infinitesimali, permette di annoverare la *Nova stereometria* tra i testi che si avvicinano ai metodi del calcolo infinitesimale. Cronologicamente il trattato di Kepler si può vedere come ideale collegamento tra l'opera *Sui conoidi e gli sferoidi* di Archimede (Geschauf, 1544; Commandino, 1558) e la *Geometria degli indivisibili* di Bonaventura Cavalieri (Cavalieri, 1635).⁸ I teoremi della *Nova stereometria* possono rappresentare un'occasione di approfondimento e/o di consolidamento di tematiche riconducibili alle origini del calcolo infinitesimale. Su questi presupposti è stato progettato il seguente percorso tematico, che illustreremo ora più in dettaglio inquadrandolo nel contesto didattico di riferimento. Questa attività è suddivisa in tre parti:

- *Due metodi, uno stesso teorema.* Kepler e Archimede a confronto.
- *Oltre Archimede.* Lo studio di alcuni solidi di rivoluzione in Kepler e Cavalieri.
- *Dalla teoria alla pratica.* Formalizzazione e soluzione di un problema di massimo a partire dallo studio di una botte da vino.

Il fulcro del primo approfondimento è la *Nova stereometria doliorum vinariorum*; sul piano didattico-epistemologico l'obiettivo è quello di riflettere sul concetto di dimostrazione. A partire da un'analisi linguistica e matematica dei testi proposti, l'attività si focalizza sul confronto tra dimostrazioni per stimolare la capacità critica degli studenti. Il paragone tra due o più tecniche dimostrative permette di vedere la matematica come una sorta di 'rete di idee', consente di cogliere la versatilità delle strategie di *problem solving*, collegare rami della matematica apparentemente distanti e superare possibili ostacoli cognitivi, proponendo una via alternativa che può risultare maggiormente inclusiva. In questo contesto, l'idea di proporre un confronto tra dimostrazioni è fortemente legata alla scelta dei teoremi della *Nova stereometria* di Kepler. L'opera del matematico tedesco, come si vedrà meglio nel seguito, consente in maniera piuttosto immediata, grazie agli espliciti riferimenti dell'autore, di creare un 'ponte ideale' con l'opera geometrica di Archimede. In modo altrettanto naturale, i teoremi della *Nova stereometria* possono essere messi a confronto con analoghi risultati presenti nella *Geometria degli indivisibili* di Cavalieri.

L'attività progettata, ma non ancora sperimentata, è rivolta ad una classe

⁸ Nel momento in cui Kepler compone la propria opera ha già avuto modo di leggere il trattato archimedeo su conoidi e sferoidi grazie alle traduzioni latine di (Geschauff, 1544) e (Commandino, 1558). La *Nova Stereometria* kepleriana sarà, a sua volta, fonte di ispirazione per Cavalieri per la stesura della *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Cavalieri, 1635). Per la traduzione italiana dell'opera di Cavalieri si rinvia a (Lombardo Radice, 1966).

quinta di scuola secondaria di secondo grado o, eventualmente, alla conclusione del secondo biennio. In linea con i documenti ministeriali, questa attività offre agli studenti la possibilità di inquadrare la teoria matematica qui presentata nel contesto storico entro cui si è sviluppata, permettendo di “discutere il ruolo della matematica in qualche ambito del sapere, con eventuali riferimenti allo sviluppo storico del pensiero e della società” (MIM, 2026, p. 41). È inoltre un’occasione per approfondire “i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni)” e per “applicare quanto appreso per la soluzione di problemi” (MIUR, 2010, p. 337). Tale attività è inoltre concepita come consolidamento degli obiettivi specifici di apprendimento legati ai principali concetti del calcolo infinitesimale, colti “anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (in particolare il calcolo di aree e volumi)” (MIUR, 2010, p. 341). A tal riguardo, le recenti *Indicazioni Nazionali* per il secondo ciclo pongono l’accento sulla necessità di precisare “l’idea intuitiva di area di una figura e di lunghezza di una curva”, introducendo una definizione di integrale basata sulla “nozione di area del sottografico e sull’approssimazione con funzioni costanti a tratti” (MIM, 2026, p. 39). L’analisi a priori richiede di tenere in considerazione i seguenti aspetti:

- Scelta dei materiali da fornire agli studenti. Il docente seleziona alcuni teoremi che ritiene efficaci per avviare la riflessione sul concetto di dimostrazione e, successivamente, per discutere il procedimento risolutivo proposto dai vari autori (Kepler, Archimede, Cavalieri).
- Possibili strategie risolutive. Lavorando a coppie o a piccoli gruppi, gli studenti analizzano i teoremi di Kepler, Archimede, Cavalieri e i loro diversi procedimenti dimostrativi, provando a riprodurli sul proprio quaderno e/o con l’utilizzo di un software di geometria dinamica (ad esempio *GeoGebra*).
- Possibili difficoltà, nodi concettuali e misconcetti. Tenendo conto del focus sull’utilizzo di fonti primarie, possono emergere difficoltà di carattere linguistico, sia a livello di traduzione della fonte (dal latino oppure dall’inglese), sia di carattere lessicale per la presenza di termini poco familiari agli studenti (ad esempio la parola ‘stereometria’).⁹ A questo scopo si suggerisce di costruire una piccola tabella-glossario in cui riportare il termine nella lingua originale con cui è presentata la fonte (italiano per Archimede e Cavalieri, latino o inglese per Kepler); il termine nella sua traduzione italiana (per Kepler); il suo significato. Un aspetto matematicamente e scientificamente significativo a cui prestare attenzione è il concetto di ‘rivoluzione’ (e, più in generale, l’idea di riscoperta dei

⁹ Sarebbe auspicabile, ma non vincolante la conoscenza del latino per poter lavorare, nel caso dell’opera di Kepler, direttamente sulla fonte originale. Nel caso in cui il latino non fosse materia di indirizzo, si può ricorrere alla traduzione ‘ponte’ offerta da (Kepler, 2018), tenendo conto delle difficoltà, già segnalate all’inizio di questo paragrafo, legate alle possibili modifiche o distorsioni derivanti da una doppia traduzione.

metodi di Archimede) tipico del XVII secolo, nel quale si inseriscono perfettamente le opere di Kepler e di Cavalieri. Un nodo concettuale che emerge dalla lettura delle fonti primarie è legato alle nozioni di ‘indivisibile’ e di ‘infinitesimo’. Il docente dovrebbe porre particolare attenzione a questo aspetto, che permette di riflettere sulle idee alla base della nascita del calcolo infinitesimale.

Per quanto riguarda le metodologie didattiche, si suggerisce di affiancare alla lezione frontale una didattica laboratoriale ispirata al “case-based learning” (Williams, 1992). In linea con i risultati di apprendimento attesi, il docente individua la tipologia di ‘caso’ più adatta: in questo contesto seleziona opportuni teoremi dalle opere di Archimede, Kepler, Cavalieri.

Il docente presenta alla classe la struttura dell’attività e la sua suddivisione, successivamente fornisce agli studenti i materiali per l’analisi e la valutazione (i testi possono essere in formato cartaceo oppure in versione digitale). Gli studenti, a coppie o a piccoli gruppi, analizzano il ‘caso’ proposto e si attivano per rispondere alle richieste del docente, ossia l’analisi e il confronto tra i teoremi di Archimede, Kepler e Cavalieri. Al termine di ogni fase è previsto un momento di riflessione e di presentazione, da parte degli studenti, dell’analisi effettuata. Il docente integra ed eventualmente corregge le risposte facendo emergere analogie e differenze tra le dimostrazioni fornite da Archimede e Kepler e successivamente tra quelle di Kepler e Cavalieri, portando gli studenti a riflettere sui concetti di ‘indivisibile’ e di ‘infinitesimo’. A conclusione il docente sollecita gli studenti in un processo di istituzionalizzazione del sapere, in cui si sintetizzano i punti salienti emersi nel corso delle attività.

Il percorso, se svolto nella sua interezza, richiede un impegno orario di almeno 6 ore in aula, tenendo conto di contestualizzazione storica, analisi linguistica e matematica dei testi, discussioni di classe sui significati emersi e sulle difficoltà incontrate e istituzionalizzazione del sapere costruito, ma può essere ridotto sulla base di specifiche esigenze didattiche, selezionando solo alcune delle attività proposte; viceversa, si presta ad un eventuale ampliamento in termini di orario e di contenuti, se inserito in una classe di Liceo Matematico.

Al termine dell’attività è prevista un’analisi a posteriori, mediante la somministrazione di una prova formativa, volta a verificare il raggiungimento dei risultati di apprendimento attesi (comprensione delle diverse tecniche dimostrative, applicazione dei metodi per la risoluzione di problemi). Si suggerisce di prevedere anche un questionario di gradimento, con cui sondare l’effettiva adeguatezza dei materiali a disposizione, individuare le possibili aree di miglioramento e verificare se gli ostacoli ipotizzati si siano rivelati reali o ne siano emersi altri. In Tabella 1 sono schematizzati i punti chiave di questa attività.

Tabella 1

Schema dell'attività

Titolo dell'attività	<i>Botti di vino e calcolo di volumi nell'opera di Kepler</i>
Ordine di scuola	Scuola secondaria di secondo grado
Classe	Quinta
Metodologie didattiche	Didattica laboratoriale; <i>case-based learning</i> .
Fasi del percorso e possibile suddivisione oraria	Si prevedono 1 o 2 ore di lavoro a casa (in preparazione) + 6 ore in classe, così ripartite: • Ricerca affidata agli studenti come compito a casa. Gli studenti raccolgono autonomamente materiale utile per costruire una biografia scientifica di Kepler allo scopo di arrivare in classe conoscendo già alcuni tratti della biografia del matematico. Il materiale può provenire dal web (fornendo precise indicazioni sui siti da utilizzare) oppure da testi suggeriti dal docente (tempo stimato: 1 o 2 ore) • Introduzione sulla figura di Kepler e breve contestualizzazione storica (1 ora). Il docente raccoglie le informazioni portate dagli studenti e finalizza il tutto con una presentazione della biografia di Kepler ed una breve contestualizzazione storica. • Attività 1. <i>Due metodi, uno stesso teorema</i> (1 ora). Si confrontano i metodi dimostrativi di Archimede e di Kepler per determinare l'area del cerchio. • Attività 2. <i>Oltre Archimede</i> (2 ore). Si introduce la figura di B. Cavalieri e si propone la lettura guidata di alcuni teoremi relativi allo studio di volumi di solidi di rotazione. • Attività 3. <i>Dalla teoria alla pratica</i> (1 ora). Si propone un problema di massimo, prendendo spunto dall'opera di Kepler. • Conclusione (1 ora). Somministrazione di una prova formativa e di un breve questionario di gradimento utile per la raccolta di feedback degli studenti.

4.2. Due Metodi, uno Stesso Teorema

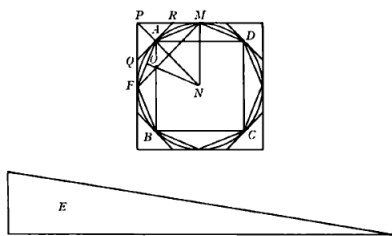
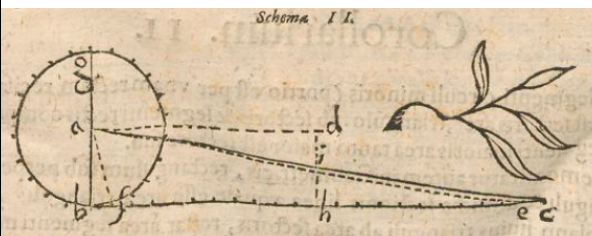
Obiettivo della prima parte è porre in evidenza la diversità tra i metodi dimostrativi di Archimede e Kepler per il calcolo di un'area o di un volume, ossia tra il cosiddetto “metodo di esaustione”, usato dal matematico siracusano, e quello basato sulla divisione di una figura piana o solida in corpuscoli infinitamente piccoli, ma non privi di larghezza o di spessore, adottato dall'astronomo tedesco. Un esempio che ci appare didatticamente efficace è la dimostrazione del teorema relativo all'area del cerchio. A tale scopo suggeriamo di proporre agli studenti le versioni archimedea e kepleriana di tale teorema, con l'intento di analizzare e confrontare le due dimostrazioni.¹⁰ Riportiamo in

¹⁰ Il confronto tra le due diverse dimostrazioni (Archimede e Kepler) consente di collegare due diversi rami della matematica: risolvere un problema geometrico usando l'analisi infinitesimale

Tabella 2, in traduzione italiana, le prime due proposizioni della *Misura del cerchio* di Archimede e il teorema II della *Nova stereometria* di Kepler e le figure corrispondenti.¹¹

Tabella 2

Proposizioni di Archimede e Kepler a confronto

Archimede, <i>Misura del cerchio</i>	Johannes Kepler, <i>Nova stereometria</i>
Proposizione 1. Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [= all'altro cateto] Proposizione 2. Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.	Teorema II. L'area del cerchio confrontata con quella del quadrato ha lo stesso rapporto di 11 a 14.
	

4.3. Oltre Archimede

Anche la seconda parte dell'attività è basata sulla lettura di fonti primarie in traduzione italiana e si propone, a partire da alcune riflessioni di carattere comparativo, di mettere in relazione la *Nova stereometria* di Kepler con la *Geometria degli indivisibili* di Cavalieri (1598-1647).

L'opera del matematico italiano, che segna un momento fondamentale nel lungo percorso di avvicinamento ai metodi infinitesimali, si presta per essere approfondita in un contesto didattico, offrendo agli studenti l'opportunità di scoprire (o riscoprire) alcuni interessanti teoremi di geometria piana e solida. È possibile contestualizzare la figura di Cavalieri e la sua opera matematica partendo dalla lettura della prefazione alla *Geometria degli indivisibili*. È lo stesso Cavalieri a spiegare ai lettori le motivazioni che lo hanno spinto ad elaborare la sua teoria: le parole dell'autore restituiscono una maggiore chiarezza e concretezza alla descrizione. In questo contesto riportiamo, a titolo esemplificativo, un estratto della prefazione, che può fungere da guida per gli

(o viceversa) mostra la coerenza della disciplina.

¹¹ Per Archimede si rinvia a (Frajese, 1974, pp. 225-228). Per Kepler si veda (De Marchi, 2019, p. 47).

studenti nell'approcciarsi alla successiva lettura di alcuni teoremi della geometria cavalieriana.¹²

Meditando un giorno sulla generazione dei solidi, che sono originati da una rivoluzione intorno ad un asse, e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati, mi stupivo moltissimo del fatto che le figure generate tralignassero a tal punto dalla condizione dei propri genitori, da mostrar di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. [...] pervenni finalmente a questa opinione, e precisamente che dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro ma paralleli. In questo modo, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane, quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee. [...] Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure quello di indagare prima i rapporti delle linee in luogo di quello dei piani, e i rapporti dei piani in luogo di quello dei solidi, per procurarmi poi la misura delle figure stesse. [...]

Mi sono invero proposto, o Geometra, in questi sette libri, di trovare la dimensione del maggior numero possibile di figure, tanto piane che solide; di queste alcune erano state studiate da Euclide e Archimede, le altre invece non erano state fino a qui affrontate da nessuno, che io sappia, con l'eccezione del solo Keplero, il quale, trattando della botte austriaca da misurarsi con una canna metrica, dopo aver passato sommariamente in rassegna le cose scoperte da Archimede che gli erano necessarie, giustappose quella parte che denominò *Supplemento alla Stereometria Archimedeae*, nella quale, dopo aver considerato la molteplice rivoluzione attorno ai diversi assi delle sezioni coniche, nonché di loro porzioni, comunicò ai geometri con un elegantissimo bando ottantasette solidi, oltre ai cinque Archimedei (e cioè la sfera, il conoide parabolico, il conoide iperbolico, lo sferoide oblungho e schiacciato).

Cavalieri spiega al lettore come la sua opera si ponga in continuità con quella di Kepler e sulla scia degli studi geometrici di Euclide e Archimede. È soprattutto quest'ultimo ad ispirare le ricerche di Cavalieri. Nell'opera su conoidi e sferoidi il matematico siracusano aveva considerato soltanto i solidi ottenuti dalla rotazione delle figure attorno al loro asse di simmetria ottenendo cinque solidi di rivoluzione: il conoide parabolico, il conoide iperbolico, lo sferoide allungato, lo sferoide schiacciato e la sfera. Il passo ulteriore compiuto da Cavalieri è quello di estendere lo studio dei solidi di rivoluzione, analogamente a quanto fatto da Kepler già vent'anni prima (nel *Supplemento ad Archimede della Nova Stereometria*), considerando figure generate dalla rotazione delle coniche attorno ad un asse in diverse posizioni possibili. Quello che differenzia Cavalieri da Kepler è il metodo utilizzato. L'idea sviluppata da Cavalieri è quella di considerare i solidi come composti da un numero infinito di elementi infinitesimali detti "indivisibili".¹³ Il metodo dimostrativo di

¹² Per la prefazione all'opera di Cavalieri si veda in particolare (Lombardo Radice, 1966, pp. 47-51).

¹³ Cavalieri immagina una figura piana come costituita da linee. Poiché tra due linee se ne può

Cavalieri differisce da quello infinitesimale di Kepler e si basa sul cosiddetto *Principio di Cavalieri*.¹⁴ Tale principio fornisce un modo per confrontare aree di figure piane o volumi di solidi affermando che è possibile dedurre il rapporto tra due aree o due solidi a partire dalle corrispondenti linee o sezioni piane. Cavalieri parla di confrontabilità tra due insiemi di indivisibili. La proporzione sussiste perché si tratta di insiemi infiniti per numero di elementi, ma non per l'estensione (superficie o volume) da essi occupata.¹⁵

sempre tracciare una terza, il numero di queste linee è infinito. Cavalieri non afferma che le linee hanno un'area, ma che l'insieme di tutte le linee è racchiuso entro i confini della figura. Egli confronta il modo in cui le linee cambiano da una figura all'altra. L'estensione totale è finita e determinata dal modo in cui queste linee variano: se in ogni singola altezza la linea della figura A sta alla linea della figura B in un certo rapporto, allora "tutte le linee di A" staranno a "tutte le linee di B" nello stesso rapporto. Per approfondire la teoria cavalieriana degli indivisibili si rinvia a (Giusti, 1980).

¹⁴ Il teorema, oggi noto come "Principio di Cavalieri", che riconduce il confronto tra due figure a quello dei rispettivi indivisibili, è enunciato nella Proposizione IV del Libro II della *Geometria degli indivisibili*: "Se due figure piane o solide hanno la stessa altezza; se poi, condotte nelle figure piane delle rette parallele e nelle solide dei piani paralleli, si troverà che i segmenti di retta tagliati dalle figure piane (o le superfici piane tagliate dalle solide) sono grandezze proporzionali, le due figure staranno tra loro come uno qualsiasi dei segmenti (o nei solidi una delle superfici) tagliati nella prima al corrispondente segmento tagliato nell'altra" (Giusti, 2007, pp. 18-19).

¹⁵ Cavalieri tenta di applicare la teoria delle proporzioni euclidea, pensata per grandezze finite e omogenee, agli indivisibili. Per maggior chiarezza riportiamo alcune considerazioni di natura epistemologica ricavate da (Lombardo Radice, 1966), che possono essere di aiuto anche per il docente che si appropria alla lettura della *Geometria degli indivisibili*. Nella Proposizione I (Libro II) Cavalieri afferma: "Tutte le linee di transito retto di figure piane quali si vogliano, e tutti i piani di [figure] solide quali si vogliano, sono grandezze che hanno un rapporto tra di loro [confrontabili]". Lombardo Radice riporta in nota alcune precisazioni. "L'idea che due insiemi infiniti siano confrontabili sembra a noi il grande, ardito passo in avanti compiuto da Cavalieri nel pensiero, oltre che il fondamento 'tecnico' della sua nuova Geometria. Il problema del rapporto tra infiniti si pose [...] non appena egli intuì la possibilità di dedurre il rapporto tra due solidi da quello di sezioni piane corrispondenti, sotto opportune ipotesi". Nell'enunciato Cavalieri dice testualmente "che hanno un rapporto tra di loro". Dalla dimostrazione risulta però che Cavalieri si riferisce alla definizione euclidea di grandezze che hanno tra di loro "proportione", e cioè che siano confrontabili (*Elementi*, libro V, def. IV). Cavalieri sosteneva che la proporzione esisteva perché si trattava di insiemi infiniti per numero di elementi (*numero*) ma non per l'estensione, superficie o volume, da essi occupato (*magnitudine*). Si trattava cioè di infiniti relativi (*secundum quid*) e associati a superfici e solidi di area e volume finiti, non di infiniti in senso assoluto (*simpliciter*) e illimitati da ogni parte (*undequaque*). Va precisato – continua Lombardo Radice – che Cavalieri in questo teorema parla della confrontabilità (*proportione*) tra due insiemi di indivisibili, non tra le somme degli elementi dei due insiemi (Lombardo Radice, 1966, p. 201, nota 7). Questo fatto è esplicitato ulteriormente nello Scolio seguente, di cui riportiamo un estratto: "Qualcuno può forse dubitare di questa dimostrazione, non comprendendo bene in qual modo linee, o piani, indefiniti di numero, quali possono essere stimati quelli che da me sono chiamati tutte le linee, oppure tutti i piani, di tali o talaltre figure, possano essere mutuamente confrontati. Per questo motivo mi sembra di dover accennare [al fatto] che, quando considero tutte le linee, oppure tutti i piani di una qualche figura, io non confronto il loro numero, che ignoriamo, ma soltanto la grandezza, che è uguale allo spazio

L'attività successiva è incentrata sull'analisi di alcuni solidi di rivoluzione, studiati da Kepler nel *Supplemento* alla stereometria archimedeica e successivamente ripresi da Cavalieri nella *Geometria degli indivisibili*. Un esempio che ci sembra particolarmente efficace è rappresentato dai solidi generati dalla rotazione di una circonferenza o di una sua parte attorno ad un asse. Proponiamo il seguente brano, in cui Kepler descrive i diversi modi in cui si generano i solidi di rotazione. Egli individua cinque possibili rotazioni, a cui corrispondono altrettante figure solide, che possono essere schematizzate come in Tabella 3.

Sui modi della generazione

Dalla rotazione circolare di queste quattro figure piane [cerchio, parabola, iperbole, ellisse], si creano infinite forme di solidi, le cui superfici non sono rettilinee da entrambi i lati come quelle del cono e del cilindro, sebbene lo siano secondo un grado maggiore o minore.

Le specie di rotazione sono generalmente cinque, ma che in seguito vengono suddivise più minuziosamente quando si giunge a figure più composte. Nello schema allegato queste specie sono espresse in questo modo.

- I. L'asse CB, attorno al quale la figura deve ruotare, sta più lontano dal centro F della figura ED da ruotare di quanto serva per incontrarsi con la figura stessa. Allora la figura DE, ruotata direttamente lungo il cerchio FCG con la sua larghezza in posizione eretta, crea un Anello [annulum] nel quale vi è uno spazio intermedio, il cui centro è A.
- II. Oppure questo asse della generazione, come AB, tocca la figura FD da far ruotare; la tocchi in A e, restando fisso il punto della circonferenza A, l'intero cerchio ruoti attorno a CB: allora si generano figure che potresti chiamare Angoli stretti [Angulos strictos].
- III. Oppure l'asse della generazione taglia la figura da far ruotare fuori dal centro, come se si dovesse far ruotare il segmento maggiore del cerchio MDN attorno alla sezione MN, cosicché il centro F passi per G; si genera allora una figura cava in due punti opposti, precisamente attorno a M e N, che ha la forma del frutto dell'albero del Melo [Mali fructus arborei forma].
- IV. Oppure l'asse della generazione passa per il centro stesso della figura, come se si dovesse far ruotare il semicerchio CDB attorno al diametro fisso CAB; e allora si genera la Sfera o globo perfetto.
- V. O infine, l'asse della generazione taglia la figura da far ruotare entro il centro [ovvero tra il centro e il bordo], come se si dovesse far ruotare il residuo, ossia il segmento minore CDE del cerchio MDN, attorno alla sua sezione CAD: e allora si genera una figura, acuta in due punti opposti, che potresti denominare dalla forma del frutto del Cedro [Citrii mali figura].

occupato dalle linee medesime, essendo congruente ad esso; e poiché quello spazio è racchiuso in confini, pertanto anche la loro grandezza è racchiusa nei medesimi confini, per la qual cosa ad essa può venire fatta un'addizione, o una sottrazione, sebbene ignoriamo il numero di esse; dico che ciò basta affinché siano mutuamente confrontabili, che altrimenti neppure gli spazi stessi delle figure sarebbero confrontabili" (Lombardo Radice, 1966, p. 205).

(Kepler, 1615, c. 37)

Tabella 3

Cinque possibili rotazioni di una circonferenza o di una sua parte e relative figure

- Rotazione attorno ad una retta esterna, parallela all'asse di simmetria. L'asse CB è distante dal centro F della figura ED e non la interseca. Si genera un **anello aperto**, nel quale c'è uno spazio di centro A (Figura I).
- Rotazione attorno ad una retta tangente alla figura e parallela all'asse. L'asse CB tocca la figura FD da ruotare. Si ottiene un **anello chiuso** (Figura II).
- Rotazione attorno ad una retta secante la figura, parallela all'asse. L'asse CB taglia la figura e la divide in due parti diverse:
 - ruotando il segmento circolare maggiore (MDN) si genera un solido a forma di **mela** (Figura III).
 - ruotando il segmento circolare minore (CDB), si genera un solido a forma di **cedro** (Figura V)
- Se l'asse CB passa per il centro, si ruota il semicerchio CDB e si genera la **sfera** (Figura IV).

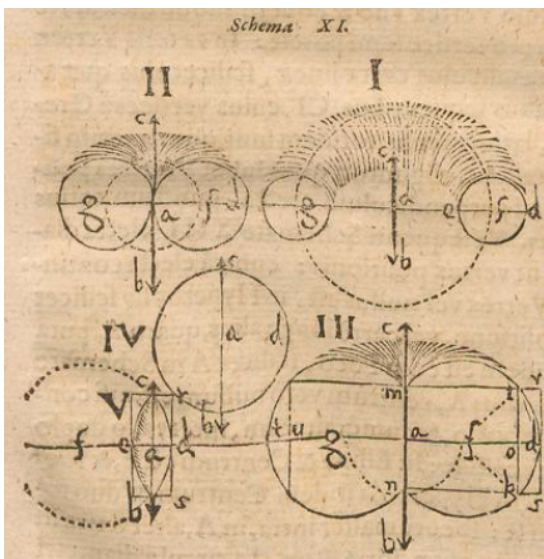


Figura di riferimento per i solidi ottenuti dalla rotazione della circonferenza (Kepler, 1615, c. 37).

Le figure solide ottenute da Kepler possono essere studiate e confrontate con le analoghe descritte da Cavalieri nel libro III della *Geometria degli indivisibili*.¹⁶ Proponiamo al lettore il testo della Proposizione XXXIV, che può essere letta in classe prima di analizzare alcuni dei suoi corollari:

Proposizione XXXIV. Solidi quali si vogliano mutuamente simili, generati dalle figure sopra considerata in questo libro III, rispetto ai riferimenti ivi stesso scelti, delle quali si sia trovato il rapporto di tutti i quadrati, hanno tra di loro un rapporto noto (Lombardo Radice, 1966, p. 385).

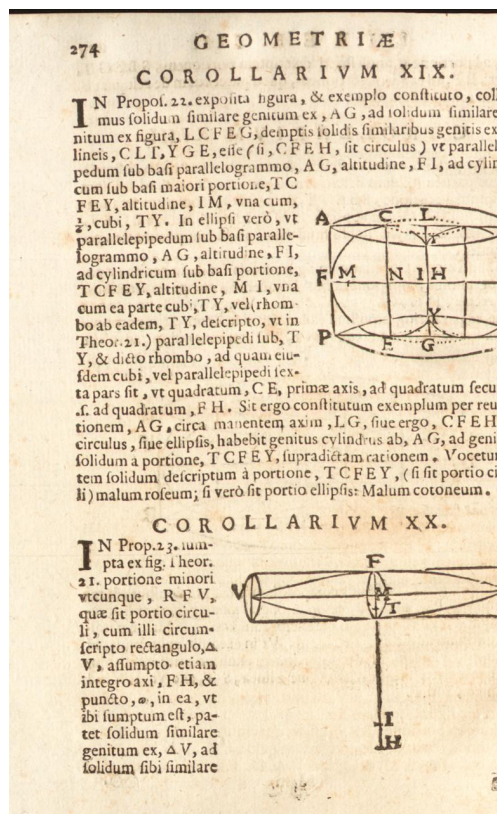
Nei ventinove corollari che seguono la Proposizione XXXIV (Figura 3), Cavalieri propone numerose applicazioni del suo metodo dimostrativo che lui stesso definisce “infinitamente ricco”.¹⁷

¹⁶ Le figure descritte da Kepler si prestano anche per essere visualizzate mediante un software di geometria dinamica come *GeoGebra 3D*. Si veda la risorsa realizzata con *GeoGebra 3D* disponibile al seguente link: <https://www.geogebra.org/classic/br6ddpgu>

¹⁷ [...] *evidentissime apparet hanc demonstrandi methodum, ipsamque demonstrationem,*

Figura 3

Alcuni corollari della proposizione XXXIV tratti da (Cavalieri, 1635, pp. 269 e 274)



Riportiamo a titolo esemplificativo l'enunciato del seguente corollario:

Corollario XIX. Nella prop. XXII, data la figura e costruito l'esempio, abbiamo che un solido simile generato da AG sta ad un solido simile generato dalla figura LCFEG, sottratti i solidi simili generati dai trilinei CLT, YGE, come il parallelepipedo avente per base il parallelogramma AG, per altezza FI, sta al solido cilindrico avente per base la porzione maggiore TCFEY, per altezza IM, insieme con 1/6 del cubo di TY: [e ciò] se CFEH è un circolo. [...]. Sia dunque costruito l'esempio per mezzo della rivoluzione di AG attorno all'asse fisso LG; sia CFEH un circolo, il cilindro generato da AG avrà il rapporto sopra detto al solido generato dalla porzione TCFEY. Si chiami frutto di mela il solido descritto dalla porzione TCFEY se essa è una porzione di circolo. (Lombardo Radice, 1966, pp. 403-404)

Seppur con approcci metodologici differenti, sia Kepler che Cavalieri si fanno

infinite (ut ita dicam) locupletem esse (Cavalieri, 1635, p. 257). A proposito di solidi generati dalla rotazione di cerchi, ellissi o sezioni di essi, Cavalieri descrive l'anello circolare o ellittico chiuso o aperto, il frutto di mela, la mela cotogna o il frutto di cedro. Ci riferiamo in questi casi specifici ai corollari XIII, XIV, XIX, XX di (Cavalieri, 1635, pp. 269 e 274). Per la traduzione italiana si rinvia a (Lombardo Radice, 1966).

portavoce dell’eredità di Archimede. Al tempo stesso le loro opere costituiscono due importanti tasselli nel percorso di avvicinamento ai metodi del calcolo infinitesimale, metodi che sarebbero stati sviluppati nella seconda metà del XVII secolo da Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

4.4. Dalla Teoria alla Pratica

A conclusione di questo primo percorso tematico su Kepler proponiamo un semplice esercizio, che prende spunto dalla seconda parte della *Nova stereometria*, quella dedicata alla geometria delle botti da vino: si tratta di formalizzare e risolvere un problema di massimo. L’attività rappresenta una diretta applicazione dello studio dei solidi di rivoluzione e riguarda il problema pratico di determinare la misura della botte da vino, vista come esempio di solido di rivoluzione. Anche in questo caso per introdurre il tema facciamo ricorso alle parole di Kepler:

Vengo ora al mio proposito e introduco varie cose, minimamente toccate da Archimede, sotto il titolo di *Geometria solida della botte austriaca* e le aggiungo al *Supplemento ad Archimede* trattato in precedenza. Queste cose riguardano corpi parallelepipedi inscritti nella stessa sfera e i loro cilindri e coni, ma che sembrano riguardare solo la natura della botte austriaca. Infatti la forma della botte è un cilindro «bulboso» (“ventricosus”) [si veda (Figura 4)], o per meglio dire, la botte è supposta divisa in due cosiddetti tronchi di cono i cui vertici si estendono in direzioni opposte. Si intendono come troncature delimitate da cerchi di legno del barile; la base comune, che determina la separazione dei coni, è il cerchio massimo che attraversa la parte più ampia (“la pancia”) del barile. [...]

Dunque quello che è vero per cilindri e frusti [tronchi] di cono può essere applicato anche alla forma di una botte perché essa differisce di poco da un cilindro e ancora meno da un frusto di cono quando le doghe sono unite insieme, qui supposte essere la linea retta *CRF* e questa linea è alquanto rigonfia verso l’esterno.

Più precisamente la forma di ogni botte è nel mezzo un tronco, o di un cedro dovuto al segmento di un cerchio, o di una prugna dovuta alla parte verticale di un’ellisse o di un fuso parabolico, ma soprattutto iperbolico dopo che i vertici sono stati tagliati frontalmente su entrambi i lati.¹⁸

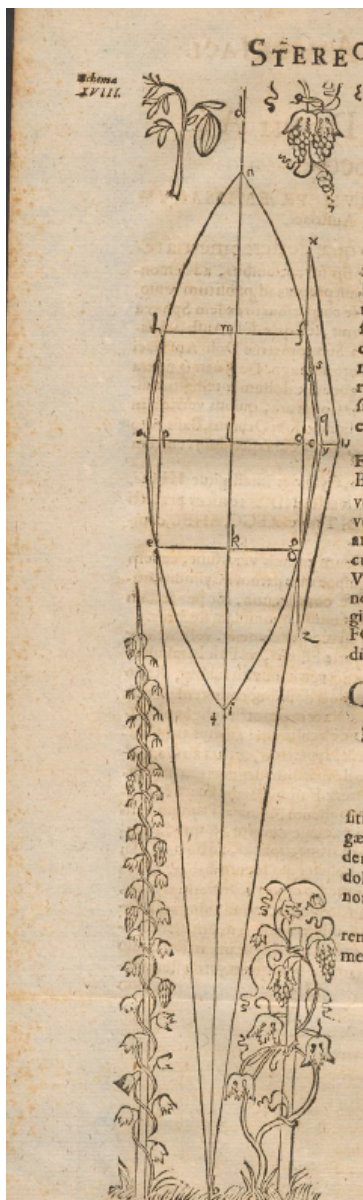
In prima approssimazione Kepler assume che la forma della botte differisca di poco da un cilindro. Il problema è quello della ricerca del barile che, a parità di diagonale, abbia la massima capacità. Considerate le variabili r, l che rappresentano rispettivamente il raggio e l’altezza del cilindro (Figura 4), il volume del cilindro risulta

$$V_{cil} = \pi r^2 l.$$

¹⁸ La traduzione italiana di questo estratto è stata fatta a partire da (Kepler, 1615, cc. 65-66).

Figura 4

Sezione della botte approssimata con quella di un cilindro “bulboso” (Kepler, 1615, c. 66)



Il problema da risolvere è quello di esprimere il volume del cilindro in funzione di μ , la lunghezza misurata dal venditore con l'asta graduata.¹⁹ Gli studenti, guidati dal docente, sono chiamati a formalizzare il problema dal punto di vista

¹⁹ Il venditore misurava il volume della botte inserendo l'asta in diagonale dal foro di cocchiame, posto al centro della pancia, fino al punto più lontano del fondo. Questa misura rappresenta l'ipotenusa μ di un triangolo rettangolo (Figura 5).

matematico. Riportiamo per maggiore chiarezza i passaggi che gli studenti dovrebbero sviluppare per risolvere il quesito richiesto. Per il teorema di Pitagora

$$\mu^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2.$$

Introdotta la variabile ausiliaria

$$s = \frac{l}{d}$$

risulta

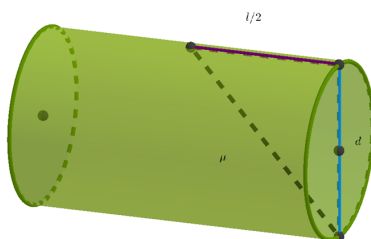
$$\mu^2 = \frac{s^2 d^2}{4} + d^2$$

da cui

$$d = \frac{2\mu}{\sqrt{s^2 + 4}}.$$

Figura 5

Approssimazione della botte con un cilindro



Kepler giunge quindi a determinare il volume V_{cil} in funzione della lunghezza di μ , lunghezza dell'asta graduata,²⁰

$$V_{cil} = 2\pi s\mu^3(s^2 + 4)^{-\frac{3}{2}}.$$

A questo punto si tratta di risolvere un semplice problema di massimo. Si calcola la derivata prima della funzione V_{cil} che risulta

$$V'_{cil} = 2\pi\mu^3 \cdot \frac{(s^2 + 4)^{\frac{1}{2}}(4 - 2s^2)}{(s^2 + 4)^3}.$$

Con semplici passaggi algebrici si trova che la funzione V_{cil} ammette un punto di massimo quando $s = \sqrt{2}$. Andando a sostituire questo valore nell'espressione del volume, si trova infine

²⁰ La formula che è stata ricavata descrive dal punto di vista algebrico il teorema XXVI formulato da Kepler: Nelle botti di forma simile il rapporto delle capacità è il rapporto cubico delle lunghezze che vanno dall'apertura superiore al margine più basso di uno dei fondi di legno (Kepler, 1615, c. 107), ossia $V \propto \mu^3$.

$$V_{cil} = \frac{\pi\mu^3}{3\sqrt{3}}$$

espressione in cui il volume dipende solo da μ .²¹

5. Secondo Approfondimento: La Geometria dei Flocchi di Neve

Lo studio dei flocchi di neve da parte di Kepler può rappresentare, a nostro avviso, un altro spunto interessante per proporre in classe alcune attività laboratoriali – approfittando, ad esempio, di una fredda giornata invernale – che sono articolabili a livello di scuola secondaria sia di primo che di secondo grado. Prima di illustrare alcune implicazioni didattiche, occorre soffermarci brevemente sulle peculiarità del breve trattato *Strena seu de nive sexangula* (1611) che Kepler dedica alla neve. Pur trattandosi di un'opera minore e poco conosciuta, essa racchiude infatti diversi aspetti curiosi e stimolanti anche sotto il profilo didattico. Kepler, che coniuga un'approfondita conoscenza della scienza del suo tempo con un'insaziabile curiosità, resta profondamente colpito dalla forma dei flocchi di neve e si interroga sulla sua causa. A tal proposito, si domanda:

Dato che succede sempre, quando comincia a nevicare, che le prime particelle di neve assumono sempre la forma di piccole stelle a sei punte, ci deve essere una causa particolare; perché, se ciò accadesse per caso, perché mai dovrebbero cadere con sei punte e non con cinque, o sette? (Kepler, 1611, p. 5)²²

Convinto che il mondo sia organizzato secondo precise leggi matematiche, per cercare di svelare il mistero della simmetria esagonale della neve, Kepler elabora un'ipotesi geometrica per descrivere il fenomeno fisico. Indagando il problema con gli strumenti concettuali a sua disposizione, egli, infatti, nel caso dei flocchi di neve ragiona 'come se' essi fossero composti da particelle elementari, cercando di ricavare la loro simmetria esagonale come diretta conseguenza.

Si fa risalire l'idea dello studio della neve da parte di Kepler alla vigilia di Capodanno del 1609 quando, recandosi in visita al suo amico e mecenate

²¹ In seconda approssimazione si può studiare il volume della botte approssimandola con due tronchi di cono uguali, che combaciano lungo la circonferenza maggiore. Anche in questo caso ci si può ricondurre ad un cilindro il cui volume è stato precedentemente espresso in funzione di μ .

²² Le traduzioni in italiano degli estratti della *Strena* qui presentati sono opera delle autrici, a partire dal testo latino (Kepler, 1611) e dalla sua traduzione inglese (Kepler/White, 1996). Come anticipato, occorre tenere presente che una doppia traduzione (latino-inglese-italiano) rischia inevitabilmente di disperdere alcune peculiarità del linguaggio originale dell'autore; tuttavia, tale adattamento si è reso didatticamente necessario poiché gli studenti della scuola secondaria di primo grado spesso non possiedono ancora le competenze per affrontare la lettura in inglese. Per maggiore chiarezza dal punto di vista matematico, i termini "pellet" e "ball" sono stati resi in italiano come "sfera".

Matthäus Wacker von Wackenfels (1550-1619), realizza di non aver con sé alcun dono (o “strenna”, termine che denota appunto un dono consueto nel periodo delle festività). Ma, mentre cammina sul Ponte Carlo di Praga, inizia a nevicare e Kepler è affascinato dalla forma e dalla simmetria della neve che si posa sul suo mantello. Realizza così che alcune riflessioni scientifiche sui fiocchi di neve potrebbero rappresentare il migliore dei doni per von Wackenfels, cui infatti dedicherà l’opera. Per motivare la scelta del tema, Kepler sfrutta la somiglianza fonetica tra i termini *nix* (“neve” in latino) e *nicht* (“niente” in tedesco). Rivolgendosi all’amico, da lui ritenuto un estimatore del “Niente”, dichiara:

In una riflessione così ansiosa, attraversai il ponte, imbarazzato dalla mia scortesia di essermi presentato davanti a te senza un regalo di Capodanno, tranne nella misura in cui insisto incessantemente sullo stesso punto e ripetutamente porto avanti il Niente: infastidito anche dal non trovare ciò che è prossimo al Niente, ma che si presta a essere arguto. Proprio allora, per un felice caso, il vapore acqueo fu condensato dal freddo in neve, e granelli di piuma caddero qua e là sul mio mantello, tutti con sei angoli e raggi piumati. Per la mia parola, qui c’era qualcosa di più piccolo di qualsiasi goccia, ma con un motivo; ecco il regalo di Capodanno ideale per il devoto del Niente, la cosa perfetta da regalare per un matematico, che non ha Niente e non riceve Niente, poiché viene giù dal cielo e sembra una stella. Torniamo al nostro mecenate, finché dura il regalo di Capodanno, per paura che il calore del mio corpo lo sciogla in un niente. E guarda, che presagio nel nome! Che delizia per Wacker, il devoto del Niente! Chiedi a un tedesco cosa significa Nix, e ti risponderà ‘niente’ (se sa il latino). (Kepler, 1611, p. 5)

Questa parte introduttiva della *Strena*, che consigliamo di proporre agli studenti, ha un valore formativo su tre livelli principali. In primo luogo, per quanto riguarda l’immedesimazione: far rivivere l’esperienza di Kepler tramite un approccio narrativo aiuta a comprendere come la curiosità scientifica possa scaturire anche da un’esperienza personale, quasi casualmente, unita a un’osservazione attenta della realtà. Inoltre, l’aspetto linguistico rappresenta un elemento centrale del passo di Kepler: si può allora spostare l’attenzione sul lessico, andando ad analizzare il significato e l’origine del termine “mecenate” – comprendendo così anche il contesto storico del rapporto tra scienziati e benefattori – e a scoprire il gioco di parole *nix-nicht*, che svela l’arguzia di Kepler nel definire il fiocco di neve un dono “prossimo al Niente”, perfetto per il suo amico. Infine, nel suo ragionamento sul Niente, l’astronomo tedesco cita esplicitamente l’atomismo di Epicuro: è, questo, un naturale collegamento interdisciplinare con la filosofia che permette anche di mostrare come il pensiero scientifico del Seicento fosse ancora profondamente legato alle radici della filosofia classica e non fosse un ambito rigidamente separato dalle discipline umanistiche.

Nella prima parte della *Strena*, Kepler indaga la natura dell’agente causale responsabile della forma esagonale dei fiocchi di neve (Kepler, 1611, pp. 6-7, 13-21). Egli si interroga se si tratti di una forza esterna, come il freddo che

avvolge uniformemente le particelle di vapore, oppure di una causa interna, come un calore che si irradia dal centro verso l'esterno. In entrambi i casi, osserva che tale agente deve agire in modo isotropo, ovvero propagandosi uniformemente in ogni direzione. Kepler ipotizza inoltre che la struttura del fiocco di neve possa essere ricondotta a tre diametri che si intersecano in un unico centro, dal quale si origina la forza generatrice. Sebbene consideri un'analogia con le tre direzioni spaziali (alto-basso, destra-sinistra, avanti-dietro) che caratterizzano gli esseri animati, la respinge rapidamente, riconoscendo la natura inanimata del fiocco di neve. Nel corso del trattato, Kepler avanza diverse spiegazioni per la caratteristica simmetria esagonale. Una delle ipotesi principali è che il vapore acqueo, concepito come un aggregato di particelle globulari, si compatti sotto l'azione del freddo. Queste gocce sferiche si aggregerebbero secondo la disposizione più efficiente per occupare uno spazio limitato, dando origine a configurazioni esagonali. Questa disposizione, o 'impacchettamento', rappresenta infatti la soluzione ottimale per massimizzare il numero di entità in un certo spazio definito (Kepler, 1611, pp. 8-10). Formula così quella che oggi è nota come "congettura di Keplero", oggetto di una delle proposte di attività laboratoriale. Un'altra spiegazione è di natura tridimensionale: il fiocco di neve si formerebbe in aria come una struttura a sei punte, disposte come i vertici di un ottaedro, per poi appiattirsi in una figura esagonale una volta depositatosi al suolo. Nell'ultima parte dell'opera, Kepler elenca cinque possibili cause per cui l'esagono è la figura geometrica che caratterizza i fiocchi di neve (Kepler, 1611, p. 22), ricollegandosi ad alcune considerazioni matematiche che aveva anticipato (Kepler, 1611, pp. 11-12). Le prime tre cause sono di natura prettamente matematica e costituiscono ulteriori spunti per il lavoro in classe, come illustreremo nel seguito. Kepler, tuttavia, non è del tutto soddisfatto delle cause individuate e ricorre a un principio di natura mistica: la *facultas formatrix* (Kepler, 1611, pp. 23-24). Egli postula così l'esistenza di una "capacità formativa", una sorta di spirito universale e inanimato che pervade la natura e dà forma alle cose, per spiegare l'ordine e la perfetta simmetria geometrica dei fiocchi di neve. La *Strena* si chiude con alcuni riferimenti ad altre scienze (chimica, metallurgia, ...) e con un'apertura nei confronti del lettore in generale – e di von Wackenfels in particolare – che è invitato, a sua volta, a cercare una valida motivazione della forma esagonale dei fiocchi di neve.

5.1. Spunti Didattici per la Lettura della *Strena* Seu de Nive Sexangula di Kepler

Il trattato sui fiocchi di neve, pur privo di una vera e propria conclusione sulla ragione della loro simmetria esagonale, racchiude diverse riflessioni interessanti sotto il profilo matematico. Kepler, infatti, dà un impulso fortemente innovativo a questo argomento, aprendo anche nuovi orizzonti di indagine. Sotto il profilo didattico può dunque essere significativo proporre questi temi, collegandoli a

un elemento naturale così affascinante come i fiocchi di neve. In particolare, due sono gli spunti della *Strena* che abbiamo preso in considerazione per sviluppare alcune attività laboratoriali:

- *Indagine sulle cause della forma dei fiocchi di neve*, con un'esplorazione delle motivazioni matematiche addotte da Kepler.
- *La congettura di Keplero*. Da Kepler a Maryna Viazovska.

Parte di tali attività è stata sperimentata nell'ambito di un percorso di formazione docenti, altre sono state inserite all'interno di due itinerari didattici proposti a livello di scuola secondaria di primo grado.²³ Obiettivo della prima proposta è esaminare criticamente le cinque ragioni esposte da Kepler circa la simmetria esagonale dei fiocchi di neve, con un focus sugli aspetti matematici introdotti che spaziano dalla tassellazione regolare del piano ai solidi platonici. La seconda attività permette di introdurre in modo storicamente coerente la congettura di Kepler, legata al problema dell'occupazione ottimale dello spazio con le sfere, a partire dall'analisi del testo originale e tramite un'esperienza di tipo manipolativo, ed è volta a mostrare la straordinaria vitalità di questo problema, la cui soluzione in 8 dimensioni è valsa l'attribuzione della Medaglia Fields a Maryna Viazovska (1984-), seconda donna della storia a ottenere questo importantissimo riconoscimento.

Sotto il profilo metodologico, queste proposte si caratterizzano per un'elevata flessibilità progettuale: a discrezione del docente, l'itinerario può essere affrontato nella sua interezza oppure ci si può concentrare esclusivamente su una delle due attività (e persino su un singolo spunto tematico all'interno della prima). Tale modularità rende il percorso facilmente adattabile in termini di impegno orario e declinabile con differenti gradi di profondità e formalismo, risultando così adatto sia per la scuola secondaria di primo grado, sia per quella di secondo grado. L'impianto laboratoriale e culturale della proposta trova inoltre una sua naturale e fruttuosa collocazione all'interno dei percorsi interdisciplinari tipici del Liceo Matematico.²⁴

²³ Il primo itinerario, incentrato su Keplero, ha coinvolto la classe 3[^]L dell'IC "U. Foscolo" di Torino (a.s. 2021/22, prof.ssa D. Favale), portando alla pubblicazione dell'ebook *Giovanni Keplero* (collana "Scienziati nella storia", consultabile su:

<https://sites.google.com/icfoscolo.org/casaeditrice/i-nostri-ebook/scienziati-nella-storia?authuser=0>). Il secondo, sulla geometria della neve, è stato realizzato con la classe 1[^]L della stessa scuola (a.s. 2024/25, proff. D. Favale, E. Sandron) nell'ambito del progetto "Matematica & Realtà" (UniPg); l'elaborato finale, *L'acqua che conta. Ma quanta matematica c'è nell'acqua?*, è disponibile a questo link https://c6a440e2-1a7e-44d9-b965-5974fe310148.filesusr.com/ugd/a216d1_3c066aa9662c4c83b0f617f4bebae85e.pdf (pp. 7-13). A livello di formazione docenti (a.s. 2025/26), il percorso è stato proposto nel laboratorio *L'enigma a sei punte* presso l'Istituto San Lorenzo di Novara (15.10.2025) e nella lezione *Numeri, forme e natura* (8.1.2026) all'interno del corso dell'Accademia delle Scienze di Torino *Il laboratorio di matematica: dalla storia alla classe* (proff. Giacardi, Luciano e Scalambro).

²⁴ Il Liceo Matematico è un progetto nazionale, avviato nel 2015, di collaborazione tra Scuole e Università. Mira a valorizzare la dimensione culturale, storica e interdisciplinare della

Tale impostazione si pone, peraltro, in stretta consonanza con gli obiettivi tracciati dai recenti documenti d'indirizzo ministeriale. Per quanto concerne il primo ciclo, tali attività mirano a scardinare l'errata convinzione che la matematica sia una disciplina "vecchia, arida [...]" e sostanzialmente staccata dalla realtà quotidiana", evidenziando al contrario come la sua storia si intrecci "indissolubilmente con la storia del pensiero umano" (MIM, 2025, p. 66). Attraverso l'analisi della simmetria dei fiocchi di neve, questo percorso valorizza la capacità della disciplina di "svelare la bellezza e l'armonia nascoste nel mondo che ci circonda" e di "stimolare speculazioni e pensare fuori dagli schemi" (MIM, 2025, p. 67). L'approccio adottato invita gli studenti a "concepire modelli, porsi domande, esplorare idee, formulare congetture e giustificare le proprie conclusioni", percependo il valore della matematica anche come "strumento pratico per modellizzare la realtà e interpretare il mondo" (MIM, 2025, p. 67). Analogamente, per il secondo ciclo, le proposte si allineano alla prospettiva che valorizza la matematica "come linguaggio per descrivere e interpretare la realtà" (MIM, 2026, p. 33), con l'obiettivo di condurre lo studente a "riconoscere e apprezzare l'insieme dei valori che caratterizzano la matematica nella sua dimensione culturale e storica" (MIM, 2026, p. 34).

Al fine di agevolare la trasposizione didattica, in Tabella 4 proponiamo una possibile scansione oraria di massima. Le tempistiche e gli approcci possono essere calibrati dall'insegnante in base al grado scolastico e alla risposta della classe.

Tabella 4

Scansione temporale di massima per l'implementazione delle attività in classe

Fase del percorso	Descrizione sintetica dell'attività	Tempistiche e note didattiche
Introduzione	• Presentazione su Kepler e la <i>Strena</i>. • Eventuale lettura e analisi guidata dell'introduzione dell'opera.	• 30 min. • 30 min. (Attività trasversale, con analisi testuale più o meno approfondita a seconda del target).
Indagine sulle cause della forma dei fiocchi di neve	Esplorazione degli aspetti matematici delle motivazioni addotte da Kepler: • I cinque poliedri regolari • La tassellazione del piano • Ricerca di forme naturali a 5 e 6 punte	Esplorazione degli aspetti matematici delle motivazioni addotte da Kepler: • 1 ora • 40 min. • 20 min. (o assegnato come compito per casa).
La congettura di Keplero	Dalla congettura della <i>Strena</i> all'impacchettamento ottimale (con calcoli e validazione geometrica).	2 o 3 ore (+ 1 ora extra opzionale in laboratorio di informatica/CAD, per la scuola secondaria di secondo grado).
Conclusione	Analisi delle conclusioni della <i>Strena</i> e spiegazione moderna della causa della simmetria esagonale dei fiocchi di neve.	1 ora
Sviluppi interdisciplinari	Estensioni del percorso in collaborazione con i docenti delle altre discipline (come arte, scienze, chimica, storia e filosofia).	2-5 ore (monte ore variabile, da concordare in sede di programmazione)

5.2. Indagine sulle Cause della Forma dei Focchi di Neve

Come anticipato, Kepler elenca cinque cause per cui l'esagono caratterizza i fiocchi di neve, la cui lettura rappresenta un ottimo spunto per alcune riflessioni didattiche:

Poi, perché a sei punte? È perché è la prima delle figure regolari a essere essenzialmente piatta, cioè incapace di combinarsi con se stessa per formare un corpo solido? Nel caso di triangolo, quadrato, pentagono, tutti formano corpi. È perché l'esagono ricopre una superficie piana senza lasciare buchi? Ma il triangolo e il quadrato fanno la stessa cosa. O perché l'esagono è quello che si avvicina di più al cerchio tra le figure che ricoprono una superficie piana senza lasciare buchi? O questa è la differenza tra la facoltà di produrre forme sterili, i triangoli e gli esagoni, e la seconda facoltà che costruisce forme fruttuose, i pentagoni? O, infine, la natura di questa facoltà formatrice prende parte all'essere a sei angoli nel più

intimo recesso del suo essere? (Kepler, 1611, p. 22)

In *primis*, Kepler si domanda se la simmetria esagonale dei fiocchi di neve sia dovuta a una sorta di proprietà di ‘piattezza’ di questa figura, legata al fatto che l’esagono è il primo poligono regolare a non essere faccia di un poliedro regolare (o solido platonico). Ricordiamo che un poliedro, per essere regolare, deve soddisfare alcune condizioni: le sue facce sono dei poligoni regolari e sono tutte congruenti tra loro; i suoi diedri (ovvero gli angoli che si formano tra due facce adiacenti) sono uguali, così come i suoi angoloidi (le parti di spazio comprese tra gli angoli delle facce del poliedro che hanno un vertice in comune). Da queste caratteristiche discende il fatto che un poliedro regolare deve essere convesso e la somma degli angoli delle facce che concorrono in uno qualsiasi dei suoi vertici è minore di 360° . Già ai tempi dell’antica Grecia, era stato osservato che, a differenza dei poligoni regolari che sono infiniti, i poliedri regolari sono solo cinque: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro. La dimostrazione rigorosa di questo fatto si trova nell’ultima proposizione (prop. 18) del libro XIII degli *Elementi* di Euclide, rappresentando il punto di arrivo della trattazione geometrica dell’opera.²⁵ In ambito didattico, specialmente a livello liceale, lo studio di questi solidi offre inoltre un eccellente spunto per collegamenti interdisciplinari con la filosofia, in particolare attraverso la visione cosmologica proposta da Platone nel *Timeo* (360 a.C. circa).²⁶

Sotto il profilo didattico, la prima delle questioni sollevate da Kepler può quindi essere utilizzata per introdurre in classe l’argomento dei solidi platonici, qualora gli studenti non li conoscessero, oppure come spunto per giungere alla dimostrazione del fatto che sono soltanto cinque. Opportunamente guidati dal docente in un momento di discussione collettiva oppure utilizzando una scheda predisposta per il lavoro collaborativo a gruppi, si potrà comprendere la ragione

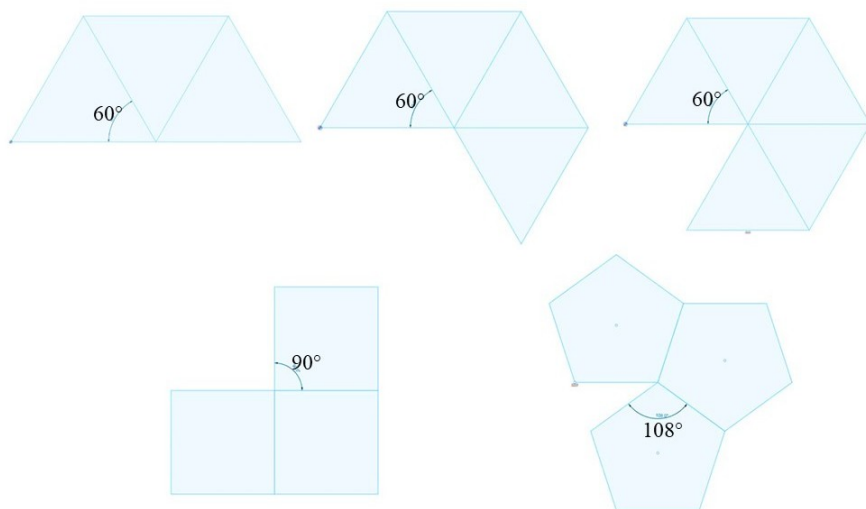
²⁵ Nel tredicesimo e ultimo libro degli *Elementi*, editi in (Frajese & Maccioni, 1970), Euclide si propone di inscrivere ciascun poliedro regolare in una sfera di dato diametro e di determinare il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto e il diametro della sfera circoscritta. In tal modo, le misure degli spigoli dei cinque poliedri regolari vengono espresse mediante uno stesso parametro e rese quindi confrontabili. Dopo averli costruiti, Euclide conclude la trattazione dimostrando che non vi possono essere ulteriori poliedri regolari oltre a quelli già noti. Sfruttando alcune proprietà riguardanti gli angoli solidi convessi (*Elementi*, Libro XI, prop. 20 e 21), egli giunge alla seguente proposizione: “Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette, non può costruirsi nessun’altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali” (*Elementi*, Libro XIII, Prop. 18).

²⁶ Nel *Timeo*, edito in (Ferrari & Petrucci, 2022), Platone riprende la tesi sostenuta da Empedocle secondo cui il mondo trae origine da quattro elementi fondamentali, associando a essi quattro dei cinque poliedri regolari. Precisamente: al fuoco è associato il tetraedro, alla terra il cubo, all’aria l’ottaedro e all’acqua l’icosaedro. Al dodecaedro, che restava senza un elemento fisico corrispondente, Platone attribuisce un ruolo di natura cosmica, descrivendolo come la forma usata dal demiurgo per decorare e racchiudere l’universo (elemento che in seguito verrà spesso associato alla “quintessenza”).

geometrica per cui non esiste un poliedro regolare a facce esagonali, ragionando sull'ampiezza degli angoli delle facce. Per semplicità, si considerino solo le facce che stanno attorno ad un vertice e si immagini di effettuare un taglio lungo uno spigolo del poliedro, in modo da poterle stendere su un piano (Figura 6). Si può chiudere il poliedro solo se la somma degli angoli delle facce che stanno attorno al vertice è minore di 360° e, siccome attorno a un vertice vi sono almeno tre poligoni, questi devono avere angoli interni minori di un terzo di 360° , cioè di 120° . I poligoni regolari con angoli minori di 120° sono tre: il triangolo, il quadrato e il pentagono. Gli angoli dell'esagono regolare misurano 120° , dunque tre esagoni 'riempiono' tutto lo spazio attorno a un vertice e il poliedro non si può chiudere. Prendiamo in esame i poliedri con facce quadrate o pentagonali: intorno a un vertice vi possono essere solo tre facce, perché quattro quadrati 'riempiono' tutto lo spazio attorno al vertice ($4 \times 90^\circ = 360^\circ$) e quattro pentagoni regolari, aventi angoli interni di 108° , superano i 360° ($4 \times 108^\circ = 432^\circ$). Di conseguenza, i poliedri regolari corrispondenti sono due: il cubo e il dodecaedro, che hanno rispettivamente 6 facce quadrate e 12 facce pentagonali. Consideriamo infine i poliedri con facce triangolari. Intorno a un vertice ci possono essere tre, quattro o cinque facce, ma non sei perché 'riempirebbero' tutto lo spazio disponibile ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$). Quindi i poliedri regolari a facce triangolari sono tre: il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro, aventi rispettivamente 4, 8, 20 facce.

Figura 6

Sviluppo piano delle facce dei solidi platonici che convergono in un vertice



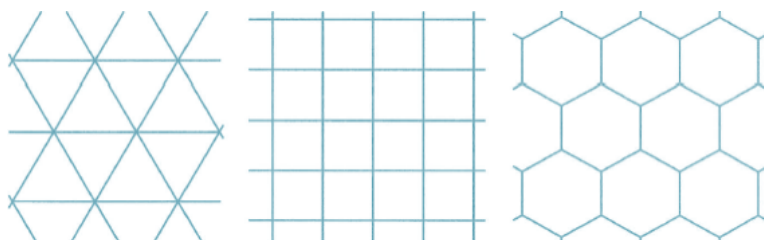
In secondo luogo, Kepler osserva che l'esagono "giace su una superficie piana senza lasciare un buco" (Kepler, 1611, p. 22). Ciò corrisponde, dal punto di vista matematico, alla proprietà di tassellazione del piano. Una tassellazione

piana regolare è infatti un ricoprimento del piano ottenuto con figure congruenti, ripetute all'infinito, senza sovrapposizioni.²⁷ Kepler aveva fatto riferimento a questa questione già all'inizio della *Strena* (Kepler, 1611, pp. 6-7), rifacendosi alla forma esagonale delle celle delle api.²⁸

È quindi consigliato proporre un'attività di scoperta delle tassellazioni piane regolari attraverso un approccio di tipo laboratoriale e manipolativo. Inizialmente, gli studenti tentano concretamente di tassellare il piano utilizzando poligoni regolari congruenti di cartoncino (triangoli, quadrati, pentagoni ed esagoni), osservando empiricamente quali figure permettono tale operazione e quali no. Successivamente, si propone una riflessione sulle cause geometriche di questo fenomeno, suggerendo di focalizzarsi sulla condizione necessaria che la somma degli angoli interni attorno a un vertice sia 360° . L'attività si può allora concludere con la richiesta di motivare perché solo il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare possono generare tassellazioni piane regolari (Figura 7), analizzando anche il caso dei poligoni con più di sei lati. Richiamando la terza causa di Kepler, si può far riflettere gli studenti sul fatto che, tra queste figure, l'esagono è quella che meglio approssima il cerchio, soffermandosi su come quest'ultimo possa essere concepito come un poligono di infiniti lati.

Figura 7

Le uniche possibili tassellazioni piane regolari



Infine, Kepler sostiene che la simmetria esagonale è tipica del mondo inanimato mentre quella pentagonale caratterizza il mondo dei viventi, vegetali e animali. Questa osservazione costituisce uno spunto interessante per andare alla ricerca di forme geometriche in natura (Bartocci, 2004) ma anche per lavorare, in un certo senso, sui ‘controesempi’, individuando forme viventi caratterizzate da una geometria esagonale, come accade ad esempio per alcuni fiori che presentano una simmetria esagonale. Questo aspetto, tra l'altro, può rappresentare un interessante collegamento interdisciplinare con le scienze della

²⁷ Questo concetto corrisponde all'idea intuitiva di pavimentazione con piastrelle identiche tra loro, cioè un ricoprimento di un piano mediante figure piane congruenti che né lascino spazi vuoti né si sovrappongano.

²⁸ “Una superficie piana può essere ricoperta senza spazi vuoti da sole tre forme: il triangolo, il quadrato, l'esagono. Di queste, l'esagono è la più spaziosa, ed è [proprio] per [avere] spazio per conservare il miele che le api se ne provvedono” (Kepler, 1611, p. 11).

natura, permettendo di introdurre una distinzione numerica utilizzata in botanica per facilitare la classificazione delle piante: infatti i fiori a cinque petali sono più frequenti nelle piante eudicotiledoni, mentre quelli a sei petali si trovano più spesso nelle piante monocotiledoni.

Le cause individuate nella *Strena* sono in realtà errate e lo stesso Kepler, con una notevole onestà intellettuale, mette in luce possibili confutazioni. Le motivazioni di natura geometrica possono essere facilmente confutate, in quanto i fiocchi di neve sono di dimensioni differenti. Questo suggerisce che non esiste una sola superficie piatta di vapore che condensa simultaneamente in tutti i fiocchi di neve, ma che ci sono tanti strati di vapore che agiscono separatamente, in tempi diversi. Anche il problema di tassellare il piano non può quindi essere preso in considerazione, in quanto risulterebbe applicabile solo nel caso di esagoni congruenti, ma così non è. Anche la causa di natura biologica va ritrattata, poiché esistono casi di simmetria esagonale anche nel mondo vivente: basti pensare al giglio, un fiore a sei petali “fruttuoso”, cioè non sterile. Come esempio di forme naturali inanimate, Kepler aveva addotto il caso delle forme dei cristalli, provenienti dalle miniere. Tuttavia, come egli stesso riconosce, i minerali si presentano in natura in un’infinità di forme.

Questo episodio di ‘mancata’ comprensione delle cause della simmetria esagonale ha un duplice valore: da un lato, è significativo dal punto di vista didattico perché fa riflettere sul ruolo dell’errore nelle scoperte scientifiche, mostrando che anche grandi scienziati, come Kepler, hanno sbagliato; dall’altro getta un ponte con la chimica, la fisica e le scienze naturali. La vera causa della forma dei fiocchi di neve risiede nella struttura atomica della materia, all’epoca di Kepler del tutto sconosciuta.²⁹ Sono stati necessari oltre 300 anni per scoprire che la simmetria esagonale della neve è una manifestazione macroscopica della disposizione molecolare interna. Soltanto l’avvento della cristallografia a raggi X ha permesso di accertare che le molecole d’acqua, nel formare la fase solida, si organizzano in un reticolo cristallino di forma esagonale. L’origine della forma esagonale dei fiocchi di neve è quindi intrinsecamente legata alla formula chimica della molecola dell’acqua H_2O e alla sua particolare natura. Per incuriosire gli studenti e per dar loro una prospettiva sugli studi più recenti sui fiocchi di neve, suggeriamo di mostrare il diagramma di Nakaya, frutto delle ricerche condotte negli anni Trenta all’Università di Hokkaido, che mette in relazione la forma dei fiocchi di neve con le condizioni ambientali in cui essi si

²⁹ Sebbene la moderna struttura chimico-fisica della materia fosse del tutto ignorata nel Seicento, il concetto speculativo di atomo era ben noto fin dall’antichità grazie alla dottrina atomistica di Leucippo e Democrito, in seguito ripresa da Epicuro. Lo stesso Kepler dimostra di avere ben presente questa tradizione filosofica: proprio nelle pagine introduttive della *Strena*, infatti, vi fa un esplicito riferimento, scrivendo: “Qualunque sia l’oggetto che vi aggradi come evocazione del Niente, bisogna che esso sia di tenue importanza, di piccola misura, di prezzo minimo, e che non sia granché durevole, cioè che sia quasi Niente. Nella natura, queste cose abbondano e una scelta si impone. Forse penserai a uno degli atomi di Epicuro: ma quello è semplicemente Niente” (Kepler, 1611, p. 2).

formano, in particolare temperatura e umidità dell'aria (Nakaya, 1954; Libbrecht, 2005).³⁰

5.3. La Congettura di Keplero

La celebre congettura di Keplero rappresenta il fulcro della seconda proposta di attività ispirata alla *Strena*. Mentre la congettura è, di per sé, ben nota – anche in virtù della sua straordinaria vitalità nel corso dei secoli – pochi sono a conoscenza del fatto che essa viene introdotta proprio in relazione allo studio dei fiocchi di neve, motivo per cui suggeriamo di introdurla in classe attraverso la lettura di alcuni passi originali che verranno presentati nel seguito,³¹ eventualmente preceduta da un'introduzione al problema dell'impacchettamento ottimale da parte del docente.

Kepler, infatti, anticipa la teoria del *close packing* ponendosi il problema di quale sia la disposizione delle sfere che garantisce un'occupazione ottimale dello spazio (Ball, 2011). Egli concepisce le gocce d'acqua come piccole sfere che, nel formare i fiocchi di neve, si 'impacchettano' il più strettamente possibile, dando origine a strutture esagonali. Questo tipo di configurazione rappresenta la disposizione ideale per agglomerare il maggior numero di entità sferiche in uno spazio limitato, proprio come accade per la disposizione della frutta in una cassetta al mercato, in cui ogni frutto è disposto in modo da occupare il minor spazio possibile. Nello specifico, Kepler congettura che la disposizione ottimale di "palline uguali, raccolte in un qualsiasi recipiente" (Kepler, 1611, p. 8) sia quella in cui ogni sfera è tangente ad altre 12, in una struttura che modernamente è nota come 'reticolo cubico a facce centrate'. Per giungere a questa conclusione, egli parte dall'analizzare cosa accade con un singolo strato di sfere:

Se sfere identiche sono libere nello stesso piano orizzontale e le si spinge insieme così strettamente che si toccano, esse si dispongono o secondo una disposizione triangolare o in una quadrangolare. Nel primo caso sei sfere ne circondano una; nel secondo quattro. In ogni caso c'è lo stesso numero di contatti tra tutte le sfere, eccetto che per quelle più esterne. Con una disposizione a cinque lati, non si può mantenere l'uniformità. Una disposizione a sei lati si trasforma in una a tre lati. Dunque, vi sono solo le due configurazioni descritte. (Kepler, 1611, p. 9)

Kepler individua, quindi, due possibilità: la configurazione quadrata (A) e quella

³⁰ Il diagramma di Nakaya illustra lo sviluppo dei cristalli di neve in funzione di temperatura e sovrasaturazione. In sintesi, la temperatura determina la geometria principale del cristallo (passando da lamine a colonne a seconda della temperatura), mentre la sovrasaturazione incide sui dettagli: più l'aria è satura di vapore, più le architetture risultano complesse e ramificate.

³¹ I brani di cui si suggerisce la lettura coincidono con gli estratti della *Strena* analizzati e discussi in questi paragrafi. Si segnala inoltre che tali testi, presentati nella loro interezza e corredati sia dall'originale latino sia dalla traduzione inglese, sono stati strutturati in apposite schede di lavoro, liberamente consultabili e scaricabili al seguente link: <https://dmi.unife.it/it/terza-missione/mathesis/liceo-matematico-1/materiali-seminario-nazionale-licei-matematici-2024>

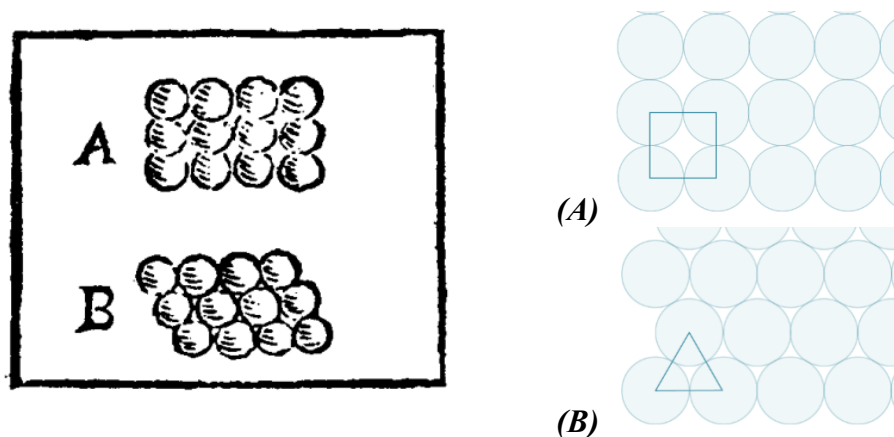
triangolare (B) che, come sottolinea, è equivalente a quella esagonale. Seguendo questa impostazione, anche in classe è consigliabile partire dal caso del singolo strato di palline per far lavorare gli studenti sulla densità delle sfere nello spazio nelle due configurazioni, che suggeriamo di far costruire concretamente utilizzando, ad esempio, delle palline di gomma piuma o da ping-pong.

Con l'ausilio della rappresentazione grafica in (Figura 8) si possono invitare gli studenti a discutere la densità dei due impacchettamenti in oggetto, supponendo per semplicità di porsi nel caso bidimensionale, ovvero quello di cerchi in un piano. Già a un primo sguardo, la configurazione (B) sembra più densa della (A). La validità di questa intuizione visiva può essere verificata mediante il calcolo della densità ρ_2 dei due impacchettamenti, data dal rapporto tra l'area delle porzioni circolari e l'area della figura piana considerata³²: il quadrato per (A), il triangolo equilatero per (B).

Nel caso (A) l'area delle porzioni circolari è pari a quella di un cerchio di raggio r , per cui a numeratore si ha πr^2 ; il quadrato che consideriamo ha lato $2r$, dunque area $4r^2$.

Figura 8

Le configurazioni quadrata e triangolare nel testo originale (Kepler, 1611, p. 9) e in versione moderna



Di conseguenza, la densità della configurazione quadrata bidimensionale è

$$\rho_2 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854 \dots$$

Nella configurazione (B) l'area delle porzioni circolari è quella di tre settori circolari di ampiezza 60° , che corrisponde a un semicerchio di raggio r . L'area occupata è quindi $\frac{\pi r^2}{2}$. Il triangolo equilatero che consideriamo ha lato $2r$,

³² In generale, denotiamo con ρ_n la densità dell'impacchettamento n -dimensionale regolare, data dal rapporto tra il volume occupato dalle porzioni sferiche n -dimensionali e il volume totale della porzione di spazio che si considera.

dunque la sua altezza è pari a $r\sqrt{3}$. Di conseguenza, l'area del triangolo è $r^2\sqrt{3}$, da cui deriva la seguente densità per la configurazione triangolare bidimensionale

$$\rho_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069 \dots$$

Ciò conferma l'impressione visiva che l'impacchettamento (B) è più denso di (A). Tuttavia, anche dal punto di vista didattico, è importante rimarcare che ciò non implica che la seconda configurazione sia, in assoluto, quella ottimale. Il fatto che ogni altro impacchettamento periodico bidimensionale è meno denso di (B) è stato dimostrato dal matematico norvegese Axel Thue (1863-1922) a fine Ottocento.³³ Egli infatti ha mostrato che, dividendo il piano in regioni locali, in tutte le regioni la densità è minore o uguale a $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Per passare al caso tridimensionale, Kepler ragiona 'impilando' gli strati di palline delle due configurazioni introdotte, notando che tale operazione può essere fatta in due modi diversi, a seconda che i centri delle sfere di strati sovrapposti siano o meno allineati verticalmente. Con abuso di linguaggio, per facilitare la visualizzazione intuitiva, indicheremo con "impilamento semplice" la prima situazione e con "impilamento sfalsato" la seconda. Kepler individua così quattro casi, sintetizzati in Tabella 5, prendendo in considerazione, per ciascuno di essi, sia il numero di sfere tangenti a una sfera qualsiasi sia la forma solida che tali configurazioni assumerebbero se sottoposte a pressione. Si ritiene opportuno riportare per intero la descrizione di Kepler di queste quattro possibilità, integrata da alcune nostre aggiunte in corsivo e tra parentesi quadre, utili nel seguito.

Ora, se si procede a impacchettare i corpi solidi nel modo più stretto possibile e si sovrappongono le file che sono disposte sul primo livello, strato su strato, le sfere risulteranno disposte o secondo quadrati (A nel diagramma), o secondo triangoli (B nel diagramma). Nel caso della disposizione quadrata, o ogni singola sfera dello strato superiore poggia su una singola sfera di quello inferiore, oppure ogni singola sfera dello strato superiore si assesta tra quattro sfere di quello inferiore. Nel primo modo [*impilamento cubico semplice, che denoteremo con (α)*], ogni sfera è toccata da quattro vicine sullo stesso piano, da una dello [strato] superiore e da una di quello inferiore, e così via, ognuna è toccata in totale da sei altre sfere. La disposizione sarà cubica e le sfere, se soggette a pressione, diventeranno cubi. Ma questo non sarà l'impacchettamento più compatto. Nel secondo modo [*impilamento cubico a facce centrate, (β)*], ogni sfera non è solo toccata dalle sue quattro vicine dello stesso strato, ma anche da quattro dello strato superiore e da quattro di quello inferiore, cosicché ognuna sarà toccata da dodici [sfere]. Sotto pressione, le sfere diventeranno romboidi.³⁴ Questa disposizione sarà più simile

³³ Una traccia di tale dimostrazione in italiano è reperibile al link:

<https://blog.kleinproject.org/?p=1943&lang=it>

³⁴ L'espressione "soggette a pressione" esula dai concetti di equilibrio stabile o instabile. Kepler si riferisce più intuitivamente a un fenomeno macroscopico: comprimendo sfere leggermente

all’ottaedro e alla piramide. L’impacchettamento sarà il più compatto possibile, tale che in nessun’altra disposizione si potrebbero stipare più sfere nello stesso contenitore. Ancora, se la disposizione delle palline di un livello fosse triangolare, nell’impacchettamento solido o ogni sfera dello strato superiore poggia su una [sfera] di quello inferiore, caso in cui l’impacchettamento è di nuovo lasco; oppure ogni sfera dello strato superiore si assesterà tra tre [sfere] di quello inferiore. Nel primo caso [*impilamento triangolare semplice*, (γ)], ogni sfera è toccata da sei vicine dello stesso strato, da una sopra e da una sotto il suo livello, e quindi in tutto da altre otto. La struttura sarà assimilabile a un prisma e, e, quando viene applicata pressione, al posto delle sfere, si formeranno delle colonne con sei lati quadrangolari e due basi esagonali. Nel secondo caso [*impilamento piramidale*, (δ)], si avrà lo stesso risultato di prima, [quello ottenuto] nella seconda modalità della disposizione quadrata [...] Di nuovo, come prima, una sfera sarà toccata da altre dodici, cioè da sei vicine dello stesso strato, da tre sopra e da tre sotto. (Kepler, 1611, pp. 9-10)

Si può far sperimentare agli studenti cosa accade nelle varie configurazioni, utilizzando delle palline morbide (ad esempio in gommapiuma, facilmente reperibili a costi ridotti).

Tabella 5
Le quattro possibili configurazioni che si ottengono dall’impilamento di strati di sfere

	Tipo di strati	Tipo di impilamento	Numero di sfere tangenti a una sfera	Configurazione solida
(α)	Configurazione (A)	Semplice	6 (4 dello stesso strato, 1 dello strato superiore e 1 dello strato inferiore)	Cubo
(β)	Configurazione (A)	Sfalsato	12 (4 dello stesso strato, 4 dello strato superiore e 4 dello strato inferiore)	Piramide
(γ)	Configurazione (B)	Semplice	8 (6 dello stesso strato, 1 dello strato superiore e 1 dello strato inferiore)	Prisma a base esagonale
(δ)	Configurazione (B)	Sfalsato	12 (6 dello stesso strato, 3 dello strato superiore e 3 dello strato inferiore)	Piramide

In particolare, si consiglia un’attività laboratoriale guidata dal docente o da svolgere in piccoli gruppi (a seconda del materiale a disposizione) per far realizzare il modello tridimensionale di (δ), utilizzando 20 palline (per una piramide di 4 strati) o 35 palline (per una di 5 strati), seguendo la disposizione suggerita da Kepler, con l’ausilio dell’illustrazione da lui proposta (Figura 9):

deformabili in un contenitore per minimizzare gli spazi vuoti, queste si ‘schiacciano’ sfaccettandosi e assumendo la forma di poliedri ‘romboidali’ che meglio saturano lo spazio.

sia B un gruppo di tre palline; su di esso sia posta una, A, come vertice; supponiamo anche un altro gruppo, C, di sei palline; un altro, D, di dieci; e un altro, E, di quindici. Si sovrapponga regolarmente lo strato più stretto a quello più largo per ottenere la forma di una piramide. (Kepler, 1611, p. 10)

Si può allora introdurre la celebre congettura sull'impacchettamento ottimale delle sfere nello spazio, che si verifica nei casi (β) e (δ), ovvero con un impilamento sfalsato di strati a configurazione quadrata o triangolare, situazioni nelle quali si ottiene, in realtà, la medesima configurazione tridimensionale, come rilevato da Kepler. Riferendosi a (δ), nota infatti che

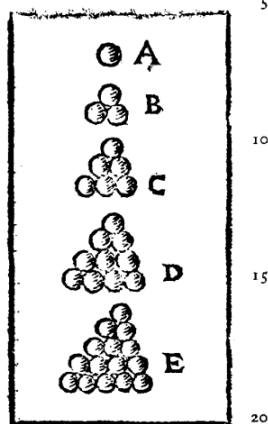
sebbene in questa costruzione ogni sfera di uno strato superiore sia posta tra tre di quelle inferiori, se si gira la figura in modo che non sia il vertice ma un intero lato della piramide ad essere in alto, si troveranno, ogni volta che si toglie una sfera dalla cima, quattro che giacciono sotto di essa in una disposizione quadrata. Di nuovo, come prima, una sfera sarà toccata da altre dodici, cioè da sei vicine sullo stesso piano, da tre sopra e da tre sotto. Così, nell'impacchettamento più compatto in tre dimensioni, la disposizione triangolare non può esistere senza quella quadrata, e viceversa. (Kepler, 1611, p. 10)

L'osservazione di Kepler sulla coesistenza degli impacchettamenti triangolare e quadrato è interessante: collega questa struttura al reticolo cubico a facce centrate, fatto che non è immediatamente evidente. Per visualizzare questa equivalenza, occorre comprendere che gli strati (piani di impilamento) sono solo diversi modi di 'affettare' la medesima struttura tridimensionale.

Figura 9

Estratto da (Kepler, 1611, p. 10) in cui è illustrata la costruzione dell'impilamento (δ)

quadrilateris. Esto enim B copula trium globorum. Ei superpone A unum pro apice; esto et alia copula senum globorum C, et alia denum D et alia quindenum E. Impone semper angustiores lateri, ut fiat figura pyramidis. Elsi igitur per hanc impositionem singuli superiores sederunt inter trinos inferiores: tamen iam versa figura, ut non apex sed integrum latus pyramidis sit loco superiori, quoties unum globulum degluberis e summis, infra stabunt quattuor ordine quadrato. Et rursum tangetur unus globus ut prius, a duodecim aliis, a sex nempe circumstantibus in eodem plano tribus supra et tribus infra. Ita in solida coaptatione arcissima non potest esse ordo triangularis sine quadrangulari, nec vicissim. Patet igitur, acinos punici mali, materiali necessitate concurrente cum rationibus incrementi acinorum, exprimi in figuram rhombici corporis: cum non infestis frontibus pertinaciter nitantur rotundi ex adverso acini, sed cedant expulsi, in spatia inter ternos vel quaternos oppositos interiecta.



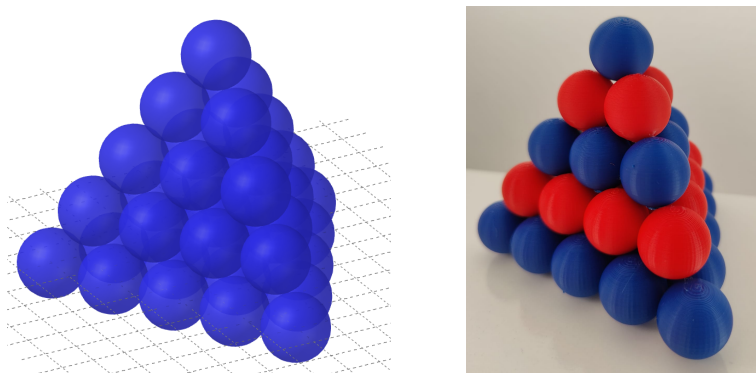
Causa
figurae in
acinis mali
punici.

Come nota Kepler, se si ruota la configurazione piramidale (δ), costruita su strati triangolari, emergono nuovi piani (inclinati rispetto ai primi) che rivelano una disposizione quadrata.

In alternativa o ad integrazione dell'attività manipolativa, l'esplorazione di queste configurazioni può essere supportata dall'uso di software di geometria dinamica (come *GeoGebra 3D*³⁵) o di simulatori online di *sphere packing*,³⁶ che permettono agli studenti di visualizzare e ruotare interattivamente le disposizioni spaziali. Per alcuni indirizzi di istituto tecnico o professionale e per le classi abituate a lavorare con programmi di modellazione, l'attività si presta a un interessante sviluppo interdisciplinare con il docente di disegno tecnico/CAD. Gli studenti possono progettare la disposizione delle sfere (utilizzando software come *Fusion 360*) e procedere alla stampa 3D dei singoli strati di sfere tangenti.³⁷ Questo approccio permette di 'toccare con mano' la congettura di Kepler, assemblando fisicamente i piani prodotti e verificando come la medesima struttura possa essere 'affettata' in modi diversi (Figura 10).

Figura 10

Confronto tra la visualizzazione in *GeoGebra 3D* (a sinistra) e la realizzazione tangibile tramite stampa 3D (a destra) dell'impilamento (δ) descritto da Kepler



³⁵ Per una visualizzazione immediata o come base per un'attività di costruzione digitale, si veda la risorsa realizzata con *GeoGebra 3D* disponibile al seguente link: <https://www.geogebra.org/3d/fcvnk5bk>.

³⁶ Tra le risorse online gratuite che permettono di esplorare interattivamente le disposizioni cubiche ed esagonali discusse da Kepler, si segnalano il portale didattico *Crystals@Otterbein* (<https://crystals.symotter.org/viztools>); il *Wolfram Demonstrations Project* (scheda "Sphere Packing"); il visualizzatore di reticoli cristallini di Jakob Holz (http://www.jakobholz.com/post/crystal_lattice/); e le simulazioni basate su librerie *Three.js* dedicate alla resa dei reticoli compatti.

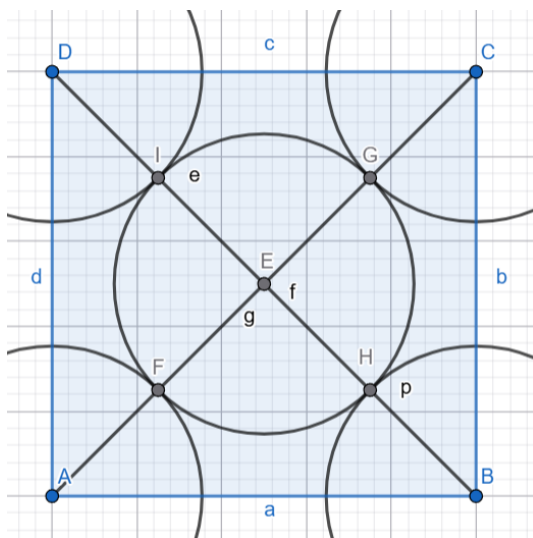
³⁷ Il docente può fornire i file già pronti per la stampa (gestibili tramite i comuni programmi *slicer* ormai diffusi in molte scuole) o guidare gli studenti nella modellazione dei piani. I modelli STL per la stampa 3D degli strati piramidali di Kepler sono disponibili in *open access* al seguente link:

<https://makerworld.com/it/models/2629005-kepler-s-sphere-pyramid-stem#profileId-2902739>.

È quindi ovvio che i loculi della melograna sono compressi nella forma di un solido romboidale: le esigenze della loro materia coincidono con le proporzioni della loro crescita. I loculi globulari opposti non persistono nel premere faccia a faccia, ma si spostano e scivolano nei vuoti lasciati tra tre o quattro altri nel piano opposto. (Kepler, 1611, p. 10)

Affinché il raggio sia massimo e non generi intersezioni tra sfere, esso deve essere pari a $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, come si può dimostrare abbastanza semplicemente utilizzando la (Figura 11). A questo punto, è possibile calcolare la densità ρ_3 – anche detta “fattore di compattazione” – del reticolo cubico a facce centrate come il rapporto tra il volume occupato dalle porzioni di sfere all’interno della cella e il volume totale della cella cubica.

Sezione di una faccia della cella cubica a facce centrate, che illustra le 4 sfere ai vertici e la sfera al centro



Per prima cosa, determiniamo il volume totale occupato dalle sfere. Questo volume è dato dalla somma dei contributi provenienti da due diverse posizioni. La cella cubica ha otto vertici, ma poiché ogni sfera al vertice è condivisa da otto cubi adiacenti, solo $\frac{1}{8}$ di essa si trova all'interno del cubo, contribuendo per un totale di una sfera equivalente. A questo si aggiunge il contributo delle sei facce: la sfera al centro di ogni faccia è divisa a metà con la cella adiacente, portando a un totale di tre sfere equivalenti. In totale, il volume contenuto nel cubo è pari a quello di 4 sfere complete. Dato che il volume di una singola sfera è $\frac{4}{3}\pi r^3$, il volume totale delle porzioni sferiche è $V_s = \frac{16}{3}\pi r^3$. Successivamente, calcoliamo il volume del cubo in funzione del raggio r delle sfere. Dalla relazione geometrica $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, si può ricavare lo spigolo $a = 2\sqrt{2}r$. Il volume del cubo è quindi $V_c = a^3 = 16\sqrt{2}r^3$. Calcoliamo infine la densità come rapporto tra i due volumi

$$\rho_3 = \frac{V_s}{V_c} = \frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{16\sqrt{2}r^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0.7405 \dots$$

Questo risultato, circa il 74,05%, rappresenta la densità dell'occupazione ottimale dello spazio congetturata da Kepler.

Il calcolo di ρ_3 non è complesso, basta conoscere le formule per il calcolo dei volumi nella geometria tridimensionale. Naturalmente ciò non è sufficiente per dimostrare che questa sia davvero la massima densità possibile.

Anche dal punto di vista educativo, è importante sottolineare che la congettura di Kepler è rimasta irrisolta per oltre tre secoli (Szpiro, 2003). Fu inclusa da David Hilbert (1862-1943) nella sua lista di problemi, presentata nel 1900 al Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi. La dimostrazione è arrivata solo nel 1998, grazie al matematico statunitense Thomas C. Hales (1958-) che riuscì a combinare complesse considerazioni matematiche e calcoli computerizzati (Hales, 2000). Si tratta di una *computer-assisted proof*, con oltre 5000 casi da analizzare, per un totale di 3 Gigabyte di codice. La verifica da parte di una commissione di *referee* è stata un processo estremamente lungo e complesso, a causa della difficoltà nel controllare la correttezza di tutto il codice informatico, e si è conclusa solo nel 2003 con la dichiarazione di una certezza al 99% della correttezza della dimostrazione. Una versione ridotta è stata pubblicata due anni più tardi sugli *Annals of Mathematics* e consiste nella decomposizione dello spazio in un numero finito di regioni per calcolare la densità in ciascuna (Hales, 2005). Hales aveva osservato che attorno a una sfera si possono posizionare al massimo 12 sfere tangenti ma resta comunque dello spazio libero. Ha poi mostrato che non è possibile collocare una tredicesima sfera tangente e che, a differenza del caso bidimensionale, esistono diversi modi non equivalenti per disporre le 12 sfere. La comunità matematica ha avviato un lungo processo di validazione che ha portato solo nel 2014 alla verifica formale

e computazionale completa, frutto del progetto di ricerca *FlysPecK* (in cui le lettere *F*, *P* e *K* sono le iniziali delle parole che compongono la frase *Formal Proof of Kepler*).

La questione dell'impacchettamento sferico ottimale, avviata da Kepler a inizio del Seicento, ha goduto di una longevità sorprendente, arrivando non solo a Hales ma anche alla Medaglia Fields del 2022, attribuita a Maryna Viazovska. La matematica ucraina ha infatti risolto il problema dello *sphere packing* nello spazio a 8 dimensioni (Gariboldi, 2023), dove l'impacchettamento ottimale è detto E8. Non è ancora noto, invece, cosa accade in dimensione 4, 5, 6 e 7, anche se si suppone che al crescere delle dimensioni diminuisca la densità dell'impacchettamento ottimale: infatti in due dimensioni essa è circa 0.9, nello spazio tridimensionale è circa 0.74, per passare a 0.25 nel caso di E8.

Illustrare in aula questo scenario e le tappe degli studi sulla congettura di Keplero può permettere di rendere gli studenti partecipi della ricerca attiva, mostrando loro come la matematica sia tutt'altro che un corpus statico, ma un sapere in perenne trasformazione. Inoltre, introdurre la figura della Viazovska, seconda donna a ottenere la Medaglia Fields dopo Maryam Mirzakhani (1977-2017) nel 2014, può essere un'occasione di riflessione nell'ambito del *gender gap* nelle discipline STEM.

6. Conclusioni

Incorporare la dimensione storica nell'insegnamento della matematica è fondamentale per 'umanizzare' la disciplina, restituendole tutta la sua profondità di sapere sviluppatosi nel corso dei secoli. Questo approccio permette di introdurre la dimensione narrativa nell'insegnamento, trasformando l'attività matematica in una "lunga conversazione che si estende nel corso dei millenni" (Mazur, 2013, p. 2). Lo strumento metodologico principe per raggiungere questo obiettivo sono le fonti storiche. Esse diventano il mezzo attraverso cui gli studenti possono entrare in dialogo con il passato e con lo 'spirito' di un'altra epoca. Il lavoro sulle fonti "orienta l'attenzione verso i processi, il che conduce alla genesi dei concetti" (Radford, 2014, p. 99), acquisendo così una rilevanza cruciale sia sul piano storico sia su quello didattico. L'uso di fonti storiche primarie diventa così uno strumento efficace non solo per consolidare specifici argomenti in maniera coinvolgente, ma anche per offrire inedite opportunità di apprendimento rispetto ai manuali standard, svelando agli studenti le regole meta-discorsive della disciplina (Chorlay, Clark & Tzanakis, 2022). In questo contesto, la lettura di un testo originale si configura come una vera e propria attività ermeneutica: gli allievi applicano le loro conoscenze a contesti nuovi per riflettere in modo profondo sulle proprie immagini concettuali (Jahnke, 2014) e sono chiamati a operare 'come storici', stimolando le proprie competenze matematiche e di *problem solving* nel tentativo di dedurre i passaggi intermedi e colmare i vuoti argomentativi degli autori del passato (Jankvist & Kjeldsen, 2011).

Tale prassi si traduce concretamente in un’impostazione laboratoriale che non va intesa come semplice luogo fisico, ma come una metodologia “finalizzata alla costruzione di significati matematici” (UMI-CIIM, 2003, p. 28). In questo quadro, le fonti e gli strumenti storici agiscono come artefatti di mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008): il confronto dialettico tra l’intuizione dell’allievo e il testo originale trasforma l’indagine testuale e manipolativa in un consapevole esercizio di riflessione critica, alimentato dalle interazioni sociali che si sviluppano durante l’attività.

Queste attività, inoltre, aprono in modo del tutto naturale la porta a ulteriori esplorazioni e connessioni con ambiti fondamentali della matematica. Da un lato, il problema di massimizzazione del volume della botte da vino e i ragionamenti legati agli esagoni nella tassellazione del piano e all’impacchettamento delle sfere nello spazio offrono un ottimo spunto per introdurre il concetto di ottimizzazione. Quest’ultimo, infatti, permette di formalizzare e generalizzare la ricerca della configurazione più efficiente o compatta; la letteratura in didattica della matematica conferma che presentare tale tematica a partire da problemi pratici o geometrici tangibili sia una strategia estremamente efficace per potenziare le capacità di risoluzione di problemi e di modellizzazione degli studenti (Gholami, Abdullah & Hamdani, 2023). Dall’altro lato, l’esame della morfologia dei cristalli di neve offre un eccellente spunto per introdurre la geometria frattale. La natura stessa del fiocco di neve è intimamente legata al concetto di autosimilarità, un aspetto che trova la sua più celebre espressione nella curva introdotta dal matematico svedese Helge von Koch (1870-1924) nel 1904. L’esplorazione di questa curva frattale, generata tramite una iterazione ricorsiva a partire da un triangolo equilatero, permette agli studenti di visualizzare in modo accessibile un concetto complesso e, al contempo, estremamente affascinante: quello di una figura geometrica dotata di perimetro infinito che racchiude, però, un’area finita (Barton, 1999).

Inoltre, la prospettiva storica favorisce la creazione di percorsi interdisciplinari. Il caso dei fiocchi di neve è emblematico: oltre ai già citati collegamenti con la chimica e le scienze naturali, si può esplorare, ad esempio, l’evoluzione della rappresentazione della neve nell’arte. Prima del XIX secolo, la neve era raffigurata raramente e spesso in modo grossolano: infatti nelle opere di inizio Quattrocento, come nel celebre “Febbraio” dalle *Très Riches Heures du Duc de Berry* (uno dei più famosi manoscritti del gotico internazionale, opera dei fratelli Limbourg), assomiglia a farina. È stato necessario attendere un nuovo approccio all’osservazione della luce e delle sue variazioni – curato in particolar modo da C. Monet e dagli impressionisti – per vedere rappresentata la vera natura della neve, che non è bianca ma riflette i colori circostanti. Questo raccordo con le arti visive risulta particolarmente versatile e si presta a essere declinato con successo sia nella scuola secondaria di primo grado, sia in quella di secondo grado, trovando il suo sbocco d’elezione nei licei artistici o negli indirizzi che prevedono l’insegnamento curricolare della storia dell’arte. A

questa spinta estetica si affianca la profonda fascinazione di Kepler per le morfologie del mondo naturale. Un interesse che si manifesta non solo nell'analisi dei cristalli di neve, ma che innerva l'intera sua produzione, come testimonia la *Nova stereometria*, dove lo scienziato non calcola solo il volume delle botti austriache ma anche quello di un cedro e di una mela (Teoremi XX e XXI).

In ambito liceale, in modo particolare se si considerano gli snodi concettuali tipici del secondo biennio, il testo della *Strena* apre a stimolanti collaborazioni anche con i docenti di storia e filosofia. Sul fronte filosofico, il ricorso di Kepler all'azione di una "facoltà formatrice" permette di rintracciare un suggestivo legame con il concetto di "causa formale" sviluppato da Aristotele (MIM, 2026, p. 30) nel libro III della *Metafisica* e nel libro II della *Fisica*. Discutere tale nesso in aula offre un'occasione privilegiata per analizzare la delicata transizione dalla magia alla scienza che caratterizza il periodo che va dal Rinascimento al Seicento, facendo comprendere agli allievi come le prime grandi innovazioni della scienza moderna non si siano separate in modo netto e immediato da orientamenti di matrice mistico-metafisica.³⁸ Infine, da un punto di vista strettamente storico, risulta significativo contestualizzare l'opera di Kepler nel rigido quadro climatico dell'epoca. Il periodo a cavallo tra il Cinquecento e l'inizio del Seicento fu infatti segnato dalla cosiddetta "Grande glaciazione" (o "Piccola era glaciale"); può perciò essere interessante per gli studenti osservare come l'indagine di Kepler prenda spunto dalla sua esperienza quotidiana, trasformando la semplice osservazione di un inverno molto rigido in un oggetto di indagine scientifica.

Le risorse proposte in questo contributo, che coniugano un approccio laboratoriale a un'opportuna contestualizzazione dal punto di vista storico, possono infine contribuire a sensibilizzare gli studenti stessi verso le fonti storiche primarie, che restituiscono tutta la ricchezza e la vivacità della matematica, disciplina viva e in continua evoluzione.

Note sull'attività di ricerca

Le autrici sono membri del gruppo GNSAGA dell'INdAM. L'attività di ricerca descritta in questo articolo è stata in parte svolta all'interno del Progetto EDVANCE – *Digital Education Hub for Advanced Digital Culture*, finanziato dall'Unione Europea-NextGenerationEU, Componente 1, Investimento 3.4 "Didattica e competenze universitarie avanzate".

³⁸ Si tratta della "trasformazione dell'idea di scienza nel pensiero rinascimentale e moderno" (MIM, 2026, p. 30) cui viene fatto esplicito riferimento nelle *Indicazioni Nazionali 2026*.

Riferimenti

- Ball, P. (2011). In retrospect: On the Six-Cornered Snowflake. *Nature*, 480, 455.
- Bartocci, C. (2004). *Il mondo è matematico?*, In AA.VV. (Ed.), *La matematica della natura* (pp. 17–38). Erga Edizioni.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). Routledge.
- Barton, P. (1999). Fractals in high school: Exploring a new geometry. *Mathematics Teacher*, 92(3), 260–264. <https://doi.org/10.5951/MT.92.3.0260>
- Brigaglia, A. (2016). *Tassellazioni, solidi archimedei, poligoni stellati nell'Harmonices Mundi di Keplero*. In F. Ferrara, L. Giacardi & S. Mosca (Eds.), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2015-2016* (pp. 91–119). Kim Williams Books.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Mathematics Education Library, Vol. 19. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Capone, R., Casolaro, F., & Tortoriello, F. S. (2020). Il Liceo Matematico: un ponte tra scuola e università. In N. Casagli et al. (Eds.), *Matematica e cultura* (pp. 53–64). Springer.
- Caspar, M. (1962). *Kepler* (C. Doris Hellman, Trans. & Ed.). Collier Books. (Original work published 1959).
- Cavalieri, B. (1635). *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Typis Clementis Ferronij.
- Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM–Mathematics Education*, 54(7), 1407–1420. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>
- Commandino, F. (1558). *Archimedis Opera non nulla à Federico Commandino Vrbinate nuper in Latinum conuersa, et commentariis illustrata*. Apud Paulum Manutium.
- De Marchi, S. (2019). *Nova stereometria doliorum vinariorum. Nuovi metodi infinitesimali per il calcolo dei volumi nell'opera di Johannes Kepler*. Tesi di laurea magistrale in matematica. Università di Bologna. https://amslaurea.unibo.it/id/eprint/18788/1/De_Marchi_Sara_TesiMagistrale.pdf
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Kluwer Academic Publishers.
- Ferrari, F., Petrucci, F. M. (Eds.). (2022). *Platone. Timeo*, Mondadori.
- Frajese, A., Maccioni, L. (Eds.). (1970). *Gli Elementi di Euclide*, UTET.
- Frajese, A. (Ed.). (1974). *Opere di Archimede*. UTET.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 131–143.
- Gariboldi, B. (2023). Maryna Viazovska e l'impacchettamento di sfere. *Emmeciquadro*, 83, 522–526. https://emmeciquadro.euresis.org/mc2/83/mc2-83_gariboldi_medaglia-fields-2022.pdf

- Geschauff, T. (Ed.). (1544). *Archimedis Syracusani philosophi ac geometrae excellentissimi opera, quae quidem extant omnia, latinitate iam olim donata, nuncque primum in lucem edita*. Per Ioannem Hervagium.
<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2596075>
- Gholami, H., Abdullah, N. A., & Hamdani, A. (2023). Teaching the mathematical optimization concept to first-year engineering students using a practical problem. *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(4), 203–228.
<https://eric.ed.gov/?id=EJ1409241>
- Giusti, E. (1980). *Bonaventura Cavalieri and the theory of indivisibles*. Cremonese.
- Giusti, E. (2007). *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*. Istituti editoriali e poligrafici internazionali.
- Hales, T.C. (2000). Cannonballs and honeycombs. *Notices of the American Mathematical Society*, 47, 440–449.
- Hales, T.C. (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics*, 162, 1065–1185.
<https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf>
- Jahnke, H. N. (2014). History in mathematics education. A hermeneutic approach. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp. 75–88). Springer.
- Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2011). New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & Education*, 20(9), 831–862. <https://doi.org/10.1007/s11191-010-9315-2>
- Katz, V., Tzanakis, C. (Eds.). (2011). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. Mathematical Association of America.
<https://maa.org/wp-content/uploads/2024/10/NTE78.pdf>
- Kepler, J. (1596). *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum, de admirabili proportione orbium coelestium, deque causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonstratum, per quinque regularia corpora geometrica*. Excudebat Georgius Gruppenbachius. <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/123207>
- Kepler, J. (1611). *Strena, seu de nive sexangula*. G. Tampach.
<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1001432>
- Kepler, J. (1615). *Nova stereometria doliorum vinariorum, in primis Austriaci, figurae omnium aptissimae; et usus in eo virgae cubicae compendiosissimus & plane singularis*. Joannes Planchus. <https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/3298821>
- Kepler, J. (1996). *The six-cornered snowflake* (L. White, Trans.). Claredon Press. (Original work published 1611).
http://www.joostwitte.nl/M_Galilei/Johannes_kepler_snowflake.pdf
- Kepler, J. (2018). *Nova stereometria doliorum vinariorum: accessit Stereometriae Archimedae supplementum. New solid geometry of wine barrels: a supplement to the Archimedean solid geometry has been added* (E. Knobloch, Trans. & Ed.). Les Belles Lettres. (Original work published 1615).
- Libbrecht, K. G. (2005). The physics of snow crystals. *Reports on Progress in Physics*, 68(4), 855–895. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/4/R03>
- Lombardi, A.M. (2008). *Keplero. Una biografia scientifica*. Codice edizioni.
- Lombardo Radice, L. (Ed.) (1966). *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*. UTET.

- Lugaresi, M.G., Scalambro, E. (2025). Botti di vino e fiocchi di neve. Un percorso storico didattico attraverso la matematica di Johannes Kepler. In A. Gambini & L. Tomasi (Eds.), *Il laboratorio matematico oltre i confini disciplinari. Atti del Seminario Nazionale dei Licei Matematici – Settembre 2024* (pp. 175–178). Rogiosi editore.
- Mazur, B. (2013, 17 febbraio). *History of Mathematics as a tool* [seminar]. <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.harvard.edu/dist/a/189/files/2023/01/History-of-Mathematics-as-a-tool.pdf>
- MIUR. (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i percorsi liceali*. D.M. 211, 7 ottobre 2010.
- MIM. (2025). *Indicazioni Nazionali per il curriculum della Scuola dell'infanzia e del Primo ciclo di istruzione*. D.M. 221, 9 dicembre 2025.
- MIM. (2026). *Nuove Indicazioni Nazionali per i licei*. Testo pubblicato il 22 aprile 2026.
- Nakaya, U. (1954). *Snow Crystals: Natural and Artificial*, Harvard University Press.
- Radford, L. (2014). Reflections on History of Mathematics. In M. Fried & T. Dreyfus (Eds.) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education* (pp. 89–109). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_7
- Szpiro, G. C. (2003). *Kepler's conjecture: How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World*. John Wiley & Sons.
- Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers & curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37–42.
- Tall, D., & Thomas, M. (1991). Cognitive roots and cognitive obstacles in the development of algebraic thinking. In A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 125–155). Kluwer Academic Publishers.
- Tournès, D. (2022). What history training for future mathematics teachers? Personal experiences and reflections. In *9th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 26–47). Publmath ADIREM-APMEP.
- UMI-CIIM. (2003). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica*.
<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf>
- Williams, S. M. (1992). Putting case-based learning into context: Examples from mathematical problem solving. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(4), 367–427.

Counting Squares or Measuring Length? Mathematics Teachers' Hermeneutical Competence

Contare i Quadretti o Misurare la Lunghezza? La Competenza Ermeneutica degli Insegnanti di Matematica

¿Contar Cuadritos o Medir la Longitud? La Competencia Hermenéutica de los Docentes de Matemática

Valentina Bernabè¹, Maria Chiara Cibien²,
Federica Ferretti² and Serena Monica²

¹Department of Physics, Computer Science and Mathematics,
University of Modena and Reggio Emilia, Italy

²Department of Mathematics and Computer Science, University of Ferrara, Italy

Abstract. *This study explores the processes through which primary school teachers identify and interpret Grade 5 students' errors in relation to the INVALSI swordfish item. In the responses to this item, which was administered in an open-ended format to a sample of 100 students, a misconception confounding one-dimensional and two-dimensional quantities (length and area) appears recurrent. Representative student protocols of this error type were subsequently used as prompts during semi-structured interviews conducted individually with two primary school teachers; their responses were analyzed through the new theoretical lens of hermeneutical competence. The findings highlight different modes of expression of this competence and reveal how teachers' professional backgrounds can influence their processes of error identification and interpretation. Furthermore, the study shows how the guided analysis of student protocols and large-scale assessment data constitutes a promising formative tool to foster the development of teachers' hermeneutical competence.*

Keywords: hermeneutical competence, teacher education, misconceptions, large scale assessment.

Sunto. *Il presente studio esplora i processi attraverso cui gli insegnanti di scuola primaria identificano e interpretano gli errori degli studenti di Grado 5 in relazione all'item INVALSI del pescespada. Nelle risposte a tale quesito, somministrato in forma aperta a un campione di 100 studenti, appare ricorrente la misconcezione legata alla confusione tra grandezze unidimensionali e bidimensionali (lunghezza e area). I protocolli più rappresentativi di tale errore sono stati successivamente utilizzati come stimolo durante interviste semi-strutturate condotte individualmente con due insegnanti di scuola primaria; le trascrizioni sono state analizzate attraverso la nuova lente teorica della competenza ermeneutica. I risultati evidenziano differenti modalità*

di espressione di tale competenza e mettono in luce come il background professionale dei docenti possa influenzare i processi di identificazione e interpretazione dell'errore. Al contempo, lo studio mostra come l'analisi guidata dei protocolli e dei dati su larga scala costituisca un promettente strumento formativo per promuovere lo sviluppo della competenza ermeneutica degli insegnanti.

Parole chiave: competenza ermeneutica, formazione insegnanti, misconcezioni, valutazione su larga scala.

Resumen. *El presente estudio explora los procesos mediante los cuales los docentes de educación primaria identifican e interpretan los errores de los estudiantes de Grado 5 en relación con el ítem INVALSI del pez espada. En las respuestas a dicha tarea, administrada de forma abierta a una muestra de 100 estudiantes, aparece como recurrente la idea errónea (misconcepción) vinculada a la confusión entre magnitudes unidimensionales y bidimensionales (longitud y área). Los protocolos más representativos de este tipo de error se utilizaron posteriormente como estímulo durante entrevistas semiestructuradas realizadas individualmente a dos docentes de educación primaria; las transcripciones se analizaron a través de la nueva lente teórica de la competencia hermenéutica. Los resultados evidencian diferentes modalidades de expresión de dicha competencia y muestran cómo la trayectoria profesional de los docentes puede influir en los procesos de identificación e interpretación del error. Al mismo tiempo, el estudio señala cómo el análisis guiado de los protocolos y de los datos a gran escala constituye una prometedora herramienta formativa para promover el desarrollo de la competencia hermenéutica de los docentes.*

Palabras clave: competencia hermenéutica, formación docente, concepciones erróneas, evaluación a gran escala.

1. Introduction

A crucial component of teachers' professional competence is based on the knowledge mobilized in making sense of students' mathematical reasoning, particularly when encountering non-standard responses or errors (Peng & Luo, 2009). This interpretative competence is essential not only for evaluating the correctness of a response but also for uncovering underlying cognitive processes and related misconceptions. Within this framework, large-scale assessments (LSA) can serve as powerful tools for research and teacher education (Bolondi & Ferretti, 2021), providing a rich context to investigate how teachers read and interpret students' mathematical productions (Cibien et al., 2025).

In continuity with this perspective, the present study is embedded within the broader national project *Mathematics standardized assessment as a tool for teachers' professional development* (MaSt—<https://mast.unife.it/>). The project's core objective is to develop theoretical and operative tools that adopt Italian LSA INVALSI results to support teachers' growth and promote a formative use of these materials at both institutional and classroom levels (Bolondi et al.,

2025). Traditionally, the impact of LSA follows a top-down trajectory, where results influence public opinion and policymakers before finally reaching local teacher action (Looney, 2011). The innovative focus of the *MaSt* project is to reverse this dynamic through a bottom-up approach, providing tools that allow teachers to use LSA frameworks and results immediately to implement formative assessment and individualized instruction in their classroom. This approach aligns with the idea that assessment is a key component of a teacher's identity and practice (Ferretti & Santi, 2023); therefore, teachers must perceive a clear connection between assessment and the curriculum. As a preliminary step toward operationalizing this approach into a concrete professional development model for pre- and in-service teachers, the initial aim was to gather information on their beliefs and knowledge, in order to identify the educational needs to be addressed during the professional development program. To collect this information, an anonymous Google Forms questionnaire was administered to 473 mathematics teachers (both pre-service and in-service). The questionnaire investigated several aspects: how teachers perceive specific INVALSI items in terms of assessment, students' perceived difficulty, and consistency with national guidelines; whether and how they explain students' potential errors and their causes; and which factors, including items' formulation, might influence their difficulty. The survey results provide crucial insights, revealing that regardless of school level or experience, teachers often struggle to correctly interpret common students' errors (Cibien, 2025). Furthermore, an inconsistency exists between teachers' perception of an item's coherence with ministerial guidelines and their actual teaching practices. An example of this distance can be observed when items featuring problems perceived as non-standard, are viewed as detached from classroom routines due to their divergence from daily instructional practices; this highlights a discontinuity between the assessment framework and everyday teaching. These results served as the starting point for designing the professional development model (Bolondi et al., 2026).

Based on these premises, the study presented in this contribution was conducted with the objective of observing how mathematics primary teachers reflect on a specific INVALSI item that reveals a potential national-level macro-phenomenon (Ferretti & Bolondi, 2019). Specifically, the item under consideration (aimed at Grade 5 students) highlights a widespread confusion between the concept of measurement understood as length (the side of a square) and surface area (the area represented by the square itself). This phenomenon, already documented in the literature (Martini & Sbaragli, 2005), remains under-researched from the perspective of teacher analysis. The need to study teachers' awareness in this specific context arises because, when confronted with errors rooted in this length-area confusion, teachers may easily notice that an answer is wrong but struggle to explain the exact conceptual reason behind it. In this regard, Livy and colleagues found that many pre-service primary school

teachers tend to rely on purely procedural descriptions (such as “length times width”) without explicitly referring to the mathematical quantity involved or the underlying conceptual structures (Livy et al., 2012). Therefore, this paper focuses precisely on how teachers analyze this specific geometrical difficulty, using it as a key lens to explore their broader ability to interpret student errors.

Building on these insights, the present study focuses on understanding how teachers identify and interpret students’ errors in a context where graphical representation, measurement, and proportionality interact, specifically within the context of an open-ended INVALSI item for primary school students. Indeed, this study aims to explore which potential errors primary school teachers identify when incorrect procedures or strategies are not pre-defined, in order to observe what types of errors teachers focus on and how they initiate a process of *coming to know* their underlying rationales. To analyze this specific interaction, teachers’ responses are examined through the new lens of *hermeneutical competence* (Cibien, 2026). This construct allows for moving beyond the distinction between procedure and concept, offering a lens to observe different identificatory and interpretative abilities when teachers engage with authentic protocols that manifest the misconception between the side and the area of a square.

2. Theoretical framework

2.1. Misconceptions

The construction of mathematical knowledge is not a linear accumulation of information, but rather a complex process involving the continuous refinement of mental models (Tall & Vinner, 1981). According to Fischbein and colleagues (Fischbein et al., 1985), students enter the learning environment with alternative conceptions, internally coherent and often highly resilient ideas that may conflict with formal mathematical structures. A misconception emerges when a student’s initial and stable mental image of a concept fails to accommodate new and more complex information, thereby generating internal cognitive conflict (Sbaragli, 2005). Rather than being understood merely as isolated errors, misconceptions can be viewed as relatively stable and locally coherent ways of thinking that reveal how students organize and extend their prior knowledge. From this perspective, they may become productive starting points for instructional intervention, error analysis, and conceptual restructuring when explicitly addressed in teaching (Ndemo & Ndemo, 2023; Skemp, 1976). In this perspective, many students’ errors should not be interpreted as isolated failures, but rather as the expression of general intuitive rules that are spontaneously activated across different mathematical and scientific contexts (Stavy & Tirosh, 1996). Because these rules are initially functional and cognitively compelling, they may support the early construction of locally coherent interpretations which, if not progressively restructured, can stabilize into persistent

misconceptions. This perspective is consistent with what Fischbein (1999) describes as the “coercive character” of intuitive models. Within this perspective, students’ errors cannot be interpreted as isolated failures or simple inaccuracies, but rather as the consequence of intuitive models that have been constructed too early and subsequently stabilized through instruction (D’Amore et al., 2008). In many cases, these models are not formed independently by learners alone, but are also shaped, reinforced, or even inadvertently produced by the teacher’s language, examples, and representational choices (Girit et al., 2023). When certain expressions are repeatedly used in a simplified or ambiguous way, students may attribute to them a meaning that is locally functional but conceptually inappropriate (Fandiño Pinilla & D’Amore, 2007). For instance, this linguistic and representational ambiguity is particularly frequent in the Italian educational context due to the pervasive use of squared notebooks. In daily classroom practice, teachers and students routinely refer to the individual grid units simply as “squares,” blurredly using the same term to denote both the two-dimensional area of the grid square and the linear length of its side. Consequently, when asked to draw a figure with a side length of four units, it is common colloquial practice to say “a side of four squares” rather than specifying “four grid-square sides.” This shortcut leads students to confuse linear and two-dimensional measures, thereby fostering a partial and misleading representation of the underlying concept. Once an intuitive model of this nature, such as the one exemplified above, has become stable, it tends to guide interpretation and problem solving with considerable persistence, generating recurrent errors that are resistant to correction. In this sense, misconceptions can be understood as the result of a premature stabilization of intuitive meaning, when a representation that is initially useful in a limited context becomes overgeneralized and continues to operate beyond its domain of validity (Fischbein et al., 1985).

In this regard, D’Amore (2022) highlights the crucial role of semiotic awareness in teaching, namely, the need for educators to recognize that students may interpret the same signifier, whether a graph, a symbol, or a technical term, in ways that differ radically from the teacher’s intention. For example, a teacher may use ellipsis points to suggest the continuation of an infinite irrational sequence, while a student may instead perceive them as indicating a predictable or eventually terminating pattern. When instrumental reasoning and conceptual reasoning are aligned, learning tends to proceed smoothly (Sbaragli, 2005; Skemp, 1976). However, when the two levels diverge, the teacher’s role is not simply to correct an “error,” but rather to be aware of the situation and to help deconstruct the stable yet partial mental image the student has formed. By varying contexts and explicitly challenging intuitive rules, teachers can support the transformation of a misconception, or of a prematurely formed intuitive model, into a more sophisticated and enduring conceptual model.

2.2. *Hermeneutical Competence*

The concept of hermeneutical competence (Cibien, 2026) provides a framework for understanding teachers' processes of error identification and interpretation. This construct was recently introduced out of the need to describe the expertise required by mathematics teachers to identify a students' error and, simultaneously, interpret it in a manner coherent with the context—both global and local—in which the error occurred (e.g. type of task, the purpose for which it was designed, the mathematical topic considered, and the way it was assigned). The conceptualization of this construct is rooted in a framework for connecting theoretical perspectives, according to the approach proposed by Prediger and colleagues (Prediger et al., 2008), whereby connecting different theoretical lenses enriches the analysis of complex educational processes. In particular, a *coordinating* approach was adopted, thereby integrating different elements from existing, well-known theories in order to coordinate the two considered theoretical perspectives to enrich the analysis of these two complex and, at the same time, fundamental processes of professional teaching. Specifically, hermeneutical competence integrates components from the existing constructs of *diagnostic competence in error situations* (Heinrichs & Kaiser, 2018) and *interpretative knowledge* (Ribeiro et al., 2013).

Diagnostic competence in error situations (Heinrichs & Kaiser, 2018) refers to the specific component of teachers' diagnostic competence (Schrader, 2011) concerning the ability to “diagnose” student errors. In this context, the teacher's goal is not to implement diagnostic processes oriented toward subsequent corrective action, but rather to infer through informal or semi-formal methods (such as the analysis of written work or short questions), the reasoning that may have led to the error (Larrain & Kaiser, 2022).

Interpretative knowledge (Ribeiro et al., 2013), on the other hand, concerns the knowledge activated by mathematics teachers when making sense of students' reasoning; it extends beyond the analysis of explicit errors to include ambiguous, incomplete, or alternative solution approaches, regardless of the correctness of the final answer. This form of knowledge is observable when teachers analyze the variety of approaches taken by students, influencing both the interpretation of reasoning and the planning of subsequent instructional didactic actions (Ribeiro et al., 2016). A specific kind of such knowledge is the Semiotic Interpretative Knowledge (Asenova et al., 2023), which focuses on how teachers make sense of the semiotic complexities inherent in students' mathematical productions.

The construct of hermeneutical competence was therefore introduced to respond to the need for an integrative theoretical lens, aiming to deepen the processes of identifying and interpreting students' errors by mathematics teachers through a more hermeneutical approach. Indeed, the two existing constructs do not embrace this broader, hermeneutical view of both processes simultaneously. Interpretative knowledge is a specific lens for studying how

teachers interpret students' reasoning, but it presents limitations for the objective proposed here: it does not focus specifically on the initial identification of the error and is considered within broader contexts where teachers deal with a wide range of responses, including correct ones, rather than concentrating solely on erroneous procedures. Furthermore, its nature as mere knowledge does not take into account crucial aspects, such as issues related to beliefs and experience; consequently, it was necessary to also integrate elements of diagnostic competence in error situations, which precisely goes beyond mere knowledge to embrace broader dimensions of competence and places greater emphasis on error identification. However, even within this theoretical framework, the hermeneutical process through which a true understanding of the error and its underlying rationale is reached by means of the diagnostic activities involved in these processes is not fully explored.

Therefore, by integrating these two aspects into a more hermeneutical perspective, the new construct of hermeneutical competence was introduced, still framed as a competence, following the conceptualization of Blömeke et al. (2020): hermeneutical competence is understood as a dynamic and situated continuum, within which teachers' professional dispositions—such as knowledge, beliefs, and motivation—are concretely activated in the specific processes of error identification and hermeneutical interpretation. It is defined as the practice-related competence required by a mathematics teacher to coherently identify and interpret mathematical errors based on the analysis of student-produced texts (Cibien, 2026). Here, “texts” are understood in a broad sense, encompassing productions that are not only written but also, for example, graphical or verbal. Furthermore, the concept of coherence entails that, when putting these processes into practice, teachers must integrate a global perspective (represented, in this context, by LSA and the foundations of mathematics education) with a local one (more closely linked to the classroom context and the student's reasoning models). Thus, the inherently hermeneutical nature of this competence emerges: the teacher does not merely detect the error but explains its profound underlying motivation in perfect harmony with both the reference context and the analyzed hermeneutical object, mobilizing knowledge, beliefs, and experiences with the ultimate goal of reaching a holistic understanding of the considered error. To clearly circumscribe these hermeneutical objects and avoid confusing the interpretative process with what is being interpreted (Figal, 2022), items from the INVALSI tests were selected as a starting point to activate these processes. Designed in line with the National Curriculum Guidelines (MIM, 2025), these items—both open-ended and multiple-choice—are structured so that the possible incorrect responses are not random, but systematically reflect specific conceptual nodes widely documented by research in mathematics education (Ferretti et al., 2023; Garuti et al., 2017). This rigorous methodological architecture allows not only for the mapping of macro-phenomena on a national scale (Bolondi & Ferretti, 2021),

but also provides a reliable statistical measure of student competences.

Within this theoretical framework, a well-developed hermeneutical competence allows for an in-depth analysis of an item and the corresponding student production. An expert hermeneutical analysis indeed requires the teacher to be able to “read through” the structure of the item to anticipate the errors most likely to occur on a national scale, thereby reflecting a clear awareness of recurring difficulties within real classroom practices. Ultimately, it is precisely through this hermeneutical work—aimed at coming to know, understood as the holistic attainment of the comprehension of the error and its motivations—that the practice-related and intrinsically dynamic nature of this competence comes to light. In identifying and interpreting the reasoning that generate the error, teachers do not focus on isolated cases, but consider the multiplicity of situations that may arise, handling the complex interaction between the subjective relationship (of the students) with the hermeneutical objects and the (objective) mathematical content of the objects themselves.

Starting from this perspective, the aim of the present investigation is to examine how this competence concretely manifests in the approaches of primary school teachers during the analysis of students’ written protocols in relation to an open-ended INVALSI item.

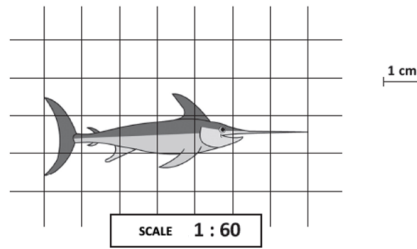
3. The Study

The present study is exploratory in nature; it utilizes an open-ended item designed to shed light on how teachers’ hermeneutical competence manifests, allowing them to express their interpretive reasoning and the ways in which they make sense of students’ responses to open-ended tasks. Since it is a case-study, it adopts a qualitative design and a descriptive focus aimed at investigating few examples about how primary school teachers interpret students’ written responses to a LSA item. Specifically, the research focuses on the INVALSI *swordfish item* (D21), administered to fifth-grade students in Italy in 2017. The item was purposefully selected because it aligns with a validated assessment model, providing a reliable and standardized scenario to draw out teachers’ mathematical knowledge for teaching (Cibien et al., 2025). The item, shown in Figure 1, requires calculating the real length of a swordfish using a provided reduction scale (1:60) and its drawing on squared paper.

Figure 1

Item 21, INVALSI 2017 – Grade 5 (translation by the authors), available from Gestinv database www.gestinv.it

D21. The students in a class are drawing the animals they studied in science class. They are scaling down the actual sizes of the animals they studied. Paolo drew the picture shown here.



How long is the fish in real life?

Answer: centimetres

Although the requested calculation may at first glance appear to require only a simple multiplication, the mathematical activity involved is conceptually layered. Students must accurately read a graphical representation, identify the relevant unit of length on the grid, and interpret the multiplicative meaning of the scale factor before producing a numerical answer. Before applying the scale factor, students must first decide what exactly has to be measured in the drawing. The presence of squared paper introduces a significant interpretative uncertainty: the square may be considered as a discrete visual object, as a unit of area, or – through its side – as a linear unit. In this sense, the item requires a fundamental interpretative decision that precedes proportional reasoning itself. This type of difficulty has been widely documented in research on teaching and learning processes related to mathematical measurement. For instance, Kamii and Kysh (2006) showed that even when students work in apparently simple grid-based contexts, many do not spontaneously identify the square as a meaningful measurement unit. In their study, only a minority of younger students counted squares correctly, while many counted pegs, marks, or isolated visible elements instead, suggesting that graphical supports do not automatically generate a conceptual understanding of units. Their results also show that difficulties with area are closely linked to more general difficulties in understanding length units: many children counted visible markers on rulers rather than intervals, revealing uncertainty about what constitutes a measurable quantity. This point is particularly relevant for the swordfish item because students must interpret the grid not as an area structure, but as a support for linear measurement. The mathematical object to be considered is not the square itself, but the side of each square as a unit of length. It is explicitly noted that many students treat squares as rigid discrete objects rather than as units embedded in continuous measurement processes. Such findings help explain

why a scale item may generate profound conceptual errors even when multiplication is available as an acquired procedural skill (Kamii & Kysh, 2006).

The choice of this specific item is also motivated by its performance at the national level, which highlights significant and widespread difficulties among students, although these topics are extensively covered in school curricula and align with the National Curriculum Guidelines (MIUR, 2012). Data from the Gestinv database (www.gestinv.it) show that the item had a low percentage of correct answers nationwide: only 29.3% of students answered correctly, 64.2% incorrectly, and 6.5% left it blank. The discrepancy between the apparent computational simplicity of the item and the high percentage of incorrect responses nationwide makes it an exceptionally rich item for investigating how teachers interpret and make sense of students' underlying mathematical difficulties.

The data collection was structured in two distinct, sequential steps. Initially, the selected protocols were collected by administering the item to a sample of 100 fifth-grade primary school students. This administration differed significantly from the standard INVALSI procedure: to make the cognitive processes visible, students were explicitly asked to explain their reasoning in writing (following the prompt “Write down your procedure” after giving the answer to the item). In addition, no time limit was imposed, and students were encouraged to use the entire area of the sheet to solve the item. The students' written protocols were collected and analysed, distinguishing between correct and incorrect protocols, which were further classified according to the strategies employed. The selected protocols are representative of the processes carried out by the participating students and can be framed within the theoretical framework of misconceptions, as will be analyzed in the next section. The chosen protocols were then implemented during the teacher interviews to investigate their reflections regarding them.

Accordingly, semi-structured individual interviews (Cohen et al., 2002) were conducted with two primary school teachers, during which they analysed the selected protocols “live”. The two teachers were selected due to their contrasting educational backgrounds and varying years of teaching experience. Specifically, T1 is a primary unexperienced teacher who has just concluded his formal teacher education path, whereas T2 is an experienced primary in-service teacher with 23 years of service but no formal training in mathematics education. The distinct backgrounds of the interviewed teachers provided contrasting perspectives, thereby facilitating a comprehensive analysis of hermeneutical competence across different professional profiles. The interviews' dynamic setting allowed teachers to comment on the correctness of the responses, reconstruct the students' possible reasoning strategies, and identify the true nature of the observed errors. To ensure consistency while allowing for open-ended exploration, the semi-structured interviews were

guided by the following questions:

- Q1. *Which knowledge and competencies do you think are necessary to answer the item?*
- Q2. *What do you think is the most frequent correct solving strategy?*
- Q3. *What do you think is the most frequent error? Why?*
- Q4. *Analyzing the students' protocols, we ask you to interpret their resolutions, telling us if they are expected or not.*
- Q5. *How would you assess the students' correct protocols?*
- Q6. *What do you think was the percentage of correct and incorrect responses to this item at the national level?*
- Q7. *After seeing the national results, what are your impressions or reactions?*

Questions Q1 and Q2 serve as the baseline for the subsequent analysis of responses through the lens of hermeneutical competence. These initial queries investigate the teachers' immediate reflections regarding the selected item, specifically focusing on the knowledge and competencies students must deploy to solve it successfully, as well as the solving strategies teachers anticipate being the most frequent or standard. By doing so, it is possible to establish an understanding of the teachers' initial perception of the item's resolution. This baseline could then be contrasted with the insights emerging from subsequent answers, particularly those concerning student errors. This allows us to assess whether there is consistency between what teachers consider necessary for a correct resolution and what they identify within student errors. For instance, if a teacher posits that the required knowledge entails distinguishing between area and length, and subsequently interprets student protocols through this specific lens, a clear coherence emerges across his or her responses, thereby characterizing an active hermeneutical process. The question Q3 is explicitly designed to reveal how teachers identify and interpret potential student errors, making it a cornerstone for exploring the emergence of hermeneutical competence. Through this prompt, teachers' knowledge, perceptions, and beliefs about the most frequent errors (the process of error identification) and their underlying causes (the process of error interpretation) are brought to light. Similarly, Q4 delves deeper into the process by which teachers interpret the provided student protocols, moving beyond the errors they might have purely hypothesized in the previous phase. This query allows us to investigate the mechanism through which teachers attempt to comprehend actual student misconceptions. Concurrently, analysing the protocols may prompt a shift in the teachers' perspectives regarding potential student errors, leading to variations in how they consider and interpret them. Question Q5 was specifically included because a preliminary analysis of the students' protocols revealed a frequent and critical discrepancy between solving procedures and final resolution:

indeed, some students provided the correct final answer despite having followed an incorrect, illogical, or purely heuristic procedure. Conversely, other students applied a perfectly sound mathematical procedure but reported a wrong result. Asking teachers to evaluate these specific protocols allows researchers to observe what they prioritize in their assessment: the formal correctness of the final outcome or the mathematical validity of the underlying reasoning. While this assessment process is not inherently bound to hermeneutical competence *per se*, it was included to examine whether the coherence observed in the identification and interpretation of student errors carries over into this dimension, which constitutes a core component of teachers' diagnostic activities. With Q6, the objective is to further investigate the extent to which teachers can globally gauge student errors. By asking them to estimate the percentages of correct and incorrect responses at a national level, we can observe the “weight” they attribute to specific errors, namely how frequent and plausible they believe these errors to be on a macro-scale. Finally, Q7 explores how teachers reconcile their previous reflections with actual national data. Responses to this final question allow us to observe the degree of coherence with which teachers integrate all the information at their disposal, while simultaneously assessing whether confronting the national results induces a shift or modification in their initial perspective.

The selection of the interview format was guided by the goal of eliciting teachers' interpretative reasoning rather than simply their ability to judge answers as correct or incorrect. This approach aligns with previous research demonstrating that analysing authentic student work is particularly effective for making teachers' mathematical knowledge and competencies for teaching explicit. As Livy and colleagues (Livy et al., 2012) showed, teachers' interactions with student work can reveal whether they rely mainly on procedural recognition or whether they mobilize deeper conceptual explanations connected to student reasoning. By structuring the interviews in this way, teachers were able to articulate which aspects of the students' productions they considered central, providing direct access to the interpretative dimensions and conceptual structures underlying their interpretations, insights that would remain largely implicit in purely written assessments.

4. Data Analysis

4.1. Analysis of Students' Written Protocols

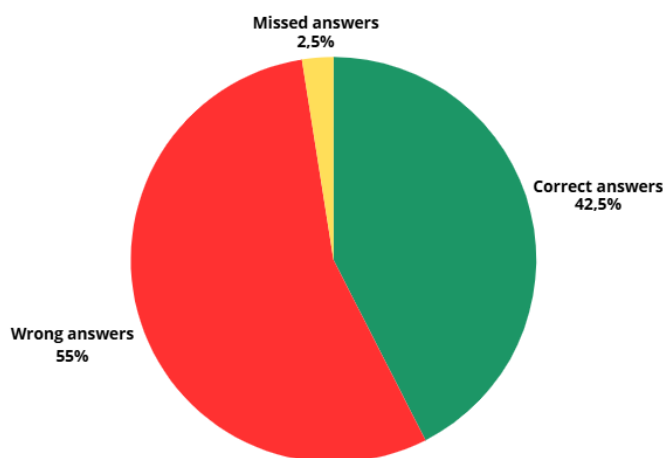
The analysis was conducted based on the swordfish item in Figure 1, utilizing an initial categorization of the responses into correct and incorrect cohorts. This was followed by a qualitative examination of individual protocols to identify specific solving processes and potential errors. Taking into account the broader framework of misconceptions, the specific objective was to identify instances where students confused “squares” with “squares' length” (sides of the squares).

The examination of specific protocols benefited from the integration of other theoretical lenses within mathematics education pertaining to both teaching and learning processes, such as the didactic contract (Brousseau, 1986), as it will be discussed in the next section.

Within the sample of 100 analyzed protocols, incorrect responses constituted the majority at 55%, while 42.5% were correct; a marginal 2.5% were classified as missing data or unjustified incorrect answers (Figure 2).

Figure 2

Percentage distribution of answers within the analyzed protocols



Regarding the incorrect responses, the study identified three primary macro-categories of error: the improper application of the conversion scale; the discrete counting of grid squares occupied by the figure in both length and height; and the calculation of the area of the rectangle bounding the subject. These findings are particularly significant as they highlight potential cognitive obstacles in isolating the one-dimensional attribute of length within two-dimensional spatial representations (Figures 3 and 4). Consequently, this article focuses specifically on the protocols manifesting such difficulties in the conceptualization of length, moving beyond mechanical errors related to numerical scales to explore the deeper semiotic and geometric challenges students encounter in grid-based environments.

Figure 5

Protocol 3 (Translation by the authors: “ $7(1:60) \times 60 = 420$ cm equal to 4.20”)

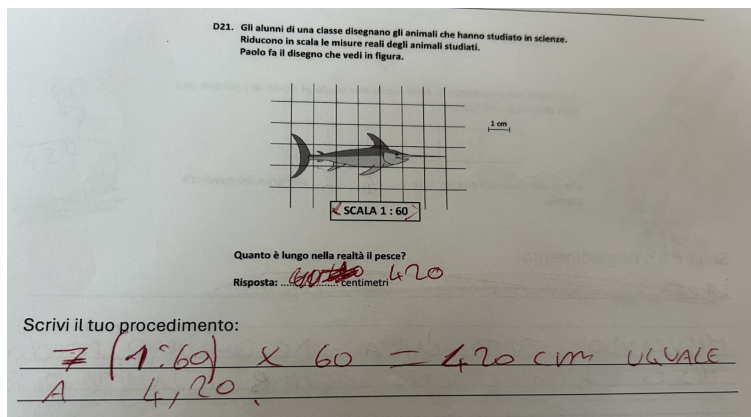
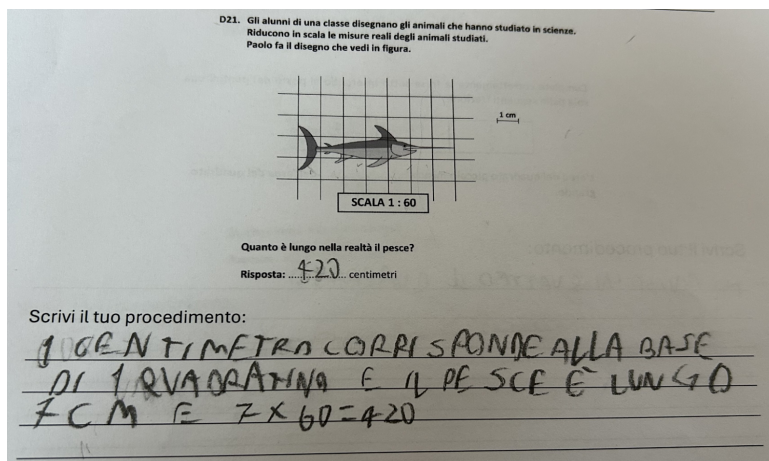


Figure 6

Protocol 4 (Translation by the authors: “1 centimeter corresponds to the base of one square and the fish is 7cm long and $7 \times 60 = 420$ ”)



The qualitative analysis of students' protocols highlights the challenges outlined above.

Protocol 1 (Figure 3) and Protocol 2 (Figure 4) exemplify a significant potential cognitive obstacle, namely, the confusion between area and length. In the first case, the student calculates the area of the rectangular region enclosing the figure (7 cm by 3 cm), thereby substituting a surface measurement for a linear one. The reliance on repeated addition rather than multiplication may also suggest a difficulty in the transition from additive to multiplicative reasoning.

Protocol 2, despite correctly applying the conversion scale, reveals a similar underlying strategy based on counting and summing all the grid squares touched

by the figure. This approach is clearly evidenced by the student's pencil marks, which indicate that each individual square was physically marked in order to keep track of the total count. This kind of behaviour is often reinforced by a lack of semiotic awareness in classroom practice. The ambiguous use of the term "square," instead of "side of the square", may create a linguistic overlap that contributes to the consolidation of distorted mental models. In these cases, students abandon the use of the scale and proportional reasoning, relying instead on the discrete presence of grid units as an inappropriate tool for determining a linear measure. From the theoretical perspective of misconceptions and intuitive models (Fischbein, 1999; Sbaragli, 2005), this interpretative focus becomes particularly relevant, as it shows how the repeated use of the same term in classroom discourse, often employed as if it were synonymous with a different concept, may gradually lead students to construct an erroneous representation. What appears linguistically economical from the teacher's perspective may therefore become cognitively misleading for the learner, fostering the premature stabilization of an intuitive but mathematically inappropriate model.

Furthermore, the analysis of the correct protocols reveals a spectrum of reasoning ranging from instrumental understanding to relational understanding (Skemp, 1976). Protocol 3 (Figure 5), for example, presents a correct numerical result achieved through a formally flawed procedure, in which the conversion scale appears primarily as a symbolic artifact. This behaviour can be framed, for instance, through the lens of the didactic contract (Brousseau, 1986), as the student appears to respond to what is perceived as the teacher's expectation by "reconstructing" the external form of a formally acceptable procedure, a practice typically emphasized in Grade 5. By explicitly including the scale, the student signals that the calculation is justified, even though the underlying proportional reasoning does not appear to be fully internalized.

By contrast, Protocol 4 (Figure 6) demonstrates a solid understanding of the concept of length and a sophisticated use of the grid. In this case, the student explicitly distinguishes the side of the square from the square itself, indicating that the early-stage misconception between linear and surface dimensions has been successfully overcome. Interestingly, the use of the term "base" in this protocol could suggest the persistence of residual positional misconceptions. However, interview data confirm that the student's functional understanding is secure. When asked for clarification, the student pointed to the specific segment on which the figure rests, suggesting the possible persistence of a positional misconception, namely, a failure to recognize the equivalence of any side of the square as a valid linear unit.

Ultimately, the progression from Protocol 1 to Protocol 4 illustrates the shift from a fragile, intuition-driven representation to a stable mathematical construct. These findings underscore the need for teachers to move beyond purely mechanical correction. By recognizing the strength of intuitive rules and demonstrating awareness of the factors that may influence the procedures

evidenced in students' protocols, including semiotic factors related to the relationship between mathematical signs, language, and meaning (Duval, 2006), teachers can facilitate the deconstruction of any partial mental representations and support the development of a coherent and scientifically grounded mathematical perspective. Consequently, the theoretical conceptualization of the obtained protocols established the groundwork for the interviews, functioning as an effective tool for investigating the teachers' hermeneutical competence.

4.2. Analysis of Teachers' Interviews

The interviews conducted with the two teachers revealed points of convergence in the interpretation of the analysed errors, as well as significant divergences regarding the two processes under consideration (identification and interpretation). In this section are presented the emerged reflections, identifying the interviewed teachers as T1 and T2 as mentioned above. It is specified that, although the interviews were administered individually, for reasons of expository fluidity, the responses will be presented and compared by thematic nuclei (question by question) rather than by individual subjects. All the response excerpts reported were translated from the original language by the authors.

Regarding the first question (Q1), both teachers explicitly referred to both students' knowledge and competencies. Specifically, T1 outlined a framework of knowledge linked to the concept of scale and the ratios between quantities, while T2 focused exclusively on the aspect of scale. It is noteworthy that both interviewees emphasized that this conceptual node is primarily introduced in the primary school curriculum within the subject of geography, only later to be formalized and structured in a mathematical context. Concerning competencies, T2 explicitly recalls the "spirit of observation": students should be able to perceive that, although the anatomical components of the animal do not mirror known geometric figures, they must be considered in their entirety, even where the figure does not coincide exactly with a full square (referring to the "deception of the round tail", where the tips might be neglected because they occupy only a fraction of the grid unit). T1, instead, introduces the concept of the "three-dimensionality of the image", hypothesizing that it might lead students to erroneously consider the space occupied by the square rather than the measurement of the sides necessary for linear calculation. In this response, one can detect a reference, albeit implicit, to the misconception found in the students' protocols (which had not yet been shown to the teacher at this stage), despite the use of technically improper terminology: the figure indeed represents a three-dimensional object projected in a two-dimensional form. As will be observed subsequently, T1 will interpret numerous protocols through this constant reference to the aforementioned misconception, unlike T2. This preliminary discrepancy shows that the two teachers' hermeneutical competence manifests through different modalities.

Continuing the analysis, in responding to Q2 both teachers indicated the only expected correct strategy to be the product of the length detected on the grid (7 units) and the scale factor (60), without envisioning alternative solution approaches. Regarding Q3, despite the request to indicate a single type of error, both teachers proposed multiple options. T1 lists several possibilities: an “incorrect reading of the image” (omission of parts of the fish or, conversely, counting all the squares affected by the extension of the figure – a term that here replaces the previous “three-dimensionality”) or confusion regarding the 1:60 ratio. In the latter case, T1 makes an explicit reference to the didactic contract (Brousseau, 1986): the presence of the division symbol in the scale notation could induce students to divide the correct number of measured units (7) by the scale value (60). Nevertheless, T1 considers an error in counting the units more probable, confirming a focus on the square rather than the side. This further statement underscores the consistency with which T1 remains anchored to his initial framing of the item. Moreover, another noteworthy element emerges from his interpretations that may underlie his hermeneutical competence: he appears to possess knowledge of certain well-established constructs in the literature. This factor undoubtedly influences his hermeneutical competence, as it allows him to interpret student errors not solely based on personal inclinations or beliefs, but by referring to robust constructs. T2 does not seem to display the same awareness; however, the interpretations proposed by T1 regarding an incorrect square count or a lack of understanding of the scale were in line with what was expressed by T2 in response to the same question: in fact, she stated “Either they didn’t consider the front part of the animal, the elongated nose, or someone was misled by the tail: they didn’t consider the fins. Then, probably someone didn’t fully understand the relationship in the scale of reduction. This could also be a plausible error for children.”. Therefore, both teachers appear to adopt a hermeneutical approach to the situation: even attempting to hypothesize multiple incorrect response strategies, they seek to provide a rationale for such behaviors by referring to various aspects, including those related to the choice of the proposed figure and the mathematical content of the item.

The analysis of the students’ protocols highlights a further heterogeneity in the reflections of the two teachers. T1, consistently with his preliminary analysis, explicitly interprets the error as a misconception between “length and area” (i.e., between the side and the surface of the square), arguing that the student reasons in terms of the “positioning” of the fish on the grid rather than linear length. A particularly significant observation made by T1 concerns the students’ tendency to revert to a “standard” situation, circumscribing the image within a known geometric figure (in this case, a 7×3 rectangle); according to the teacher, such a strategy stems from the inability to manage the analysis of a non-standardized real figure. Similarly, T2 notes that the student considers portions external to the figure yet interprets this reasoning exclusively as a gap in the concept of length. Unlike T1, T2 also focuses attention on the “limited

knowledge of operations”, referring to the use of repeated addition instead of multiplication. This aspect, although indicative of a hermeneutical approach aimed at holistically understanding the causes of error, highlights a shift from what was initially discussed by T2 in response to question Q1, a stage in which no considerations regarding operations had emerged. This discrepancy suggests that T1's point of view reshapes itself dynamically upon contact with the protocols, embracing possibilities not anticipated a priori. While on the one hand this manifests the situated and evolving nature of hermeneutical competence, on the other hand it highlights a discontinuity between the different phases of the interview. Since the focus on operations was not anticipated in the a priori analysis and is not further addressed in the subsequent stages, this reflection seems to take the form of an extemporaneous intuition, stimulated by the evidence of the specific protocol rather than by a predefined interpretative framework.

In relation to Protocol 3, T2 expresses greater perplexity than T1, stating difficulty in decoding a reasoning expressed in this incorrect mixed mode (verbal and symbolic): “The initial part of the protocol leaves me a bit perplexed, that 7 (1:60), even though the final result is correct.”. Conversely, T1 interprets this formulation as the student's attempt to use “*matematichese*” (an informal term used to refer to formal symbolic mathematical language, intended as “Math-talk”), recalling formalisms and notations typical of school practice: “It's a bit as if they had transposed their logical process written in Math-talk. Yes, that is what I would say. And they didn't have anything else, meaning they didn't want to write it out in words, they wanted to write it like this.”. In this case as well, the different ways in which the two teachers approach the protocol highlight varying degrees of hermeneutical depth. Indeed, the essence of this competence lies in the interpretative effort oriented toward *coming to know*—that is, toward unveiling the underlying rationale behind the student's thinking, regardless of the error situation presented. While T1 nevertheless proposes an interpretative hypothesis, T2's reaction highlights an area of potential development for the construct: an evolution aimed at consolidating the ability to cope with unexpected interpretative contexts, supporting the teacher in the attempt to give meaning to responses that, at first glance, are more difficult to “decipher”. In any case, both teachers evaluate the resolution as correct (T1) or partially correct (T2).

Finally, the analysis of the last protocol – proposed to verify whether the student's explicit reference to the side of the square (defined as the “base”) would stimulate a discussion by the teachers regarding the misconception under study – produced diametrically opposed reflections. T1 links back to the previously hypothesized confusion between square and side, focusing on the student's lexical choice (“The base tells me! Interesting: he counts under the fish and not above the fish. It's right, but it would have been better to say ‘side’.”). T2, by contrast, does not delve into these aspects, limiting herself to

validating the student's statement ("Very true when he says the base! Totally correct."). This passage highlights even more clearly the coherence maintained by T1 throughout the entire interview, within the interconnected processes of identifying and interpreting errors. Conversely, T2's approach appears more focused on individual responses, seeming to lack a unified conceptual lens that would orient it toward the expected interpretative line.

In the final instance, regarding the national percentages, both teachers underestimated the difficulty of the item (in terms of the percentages of correct/incorrect answers), assuming a correct response rate slightly below 50%. Faced with the actual data, the reactions were divergent: T1 justified the observed complexity by noting that, in the national sample (where the item was open-ended but without a request for justification), all responses resulting from mere calculation errors are classified as incorrect, even if the underlying procedure might have been correct. However, T1 expressed marginal interest in the statistical data itself, prioritizing its professional impact: "The only interest is that I discover many got it wrong and therefore it can be worked on" (translation by the authors), highlighting the importance of LSA results as tools for conscious pedagogical practice. T2 did not provide analytical comments on the quantitative data, recognizing the students' protocols as a more effective tool for stimulating the professional reflections that emerged during the interview.

5. Discussion

The interviews proved to be an extremely effective tool for delineating various aspects of the hermeneutical competence of the teachers involved, as previously observed in other studies conducted within the same project (Cibien, 2026). Beyond confirming prior findings, the present study allows for a more fine-grained characterization of how such competence is enacted in situ, particularly in relation to the dynamic interplay between error identification, interpretation, and coherence across interpretative phases. Consistent with the findings discussed above, it can be stated that the two teachers manifest different facets of this competence. The primary distinction lies in the fact that T1, throughout the entire process of reflecting on items, protocols, and national data, exhibits greater consistency with his initial hypotheses, both in the identification and interpretative phases of the errors. In particular, his analyses appear strictly aligned with the examination of the question conducted through the theoretical lens of the "side-versus-area of the square" misconception, which served as the general framework. This coherence suggests not only the presence of relevant mathematical and didactical knowledge, but also the ability to mobilize it in a stable and context-sensitive way, a key feature of professional competence as described by Blömeke et al. (2020). Therefore, it can be argued that the coherence displayed by T1 throughout every phase of the interview, together

with the hermeneutical approach implemented in the analysis of the various student productions, appears to reflect a solid and well-structured manifestation of his hermeneutical competence.

Conversely, teacher T2 appears less anchored to this prevailing interpretation, manifesting a plurality of perspectives during the identification and analysis of the protocols that do not always appear interconnected. Unlike T1, T2 does not proceed from a core idea to develop it consistently across the different stages of the interview. Notably, even when the reference to the issue of the side of the square becomes explicit (as in Protocol 4), the teacher does not produce structured reflections on the matter, limiting herself to confirming the correctness of the student's reasoning. This behavior suggests a more episodic activation of interpretative resources, in which relevant insights emerge locally but are not integrated into a coherent explanatory framework.

From this perspective, the comparison between T1 and T2 highlights a crucial dimension of hermeneutical competence: not merely the ability to produce plausible interpretations, but the capacity to maintain interpretative coherence across different moments of analysis. Such coherence appears to function as an organizing principle that allows teachers to connect individual observations to broader conceptual structures, thereby transforming isolated insights into professionally meaningful interpretations.

It is interesting to observe how, especially in the case of T2, elements not previously articulated emerge during the interpretation of the protocols yet are deemed relevant for the required solution. For example, the teacher highlights a critical issue in Protocol 1 related to the student's (lack of) awareness regarding the operation employed. However, this aspect had not been identified as relevant in response to question Q1. This discrepancy suggests that certain components of teachers' competence may remain implicit until activated by concrete artefacts such as students' productions. At the same time, it reveals a potential fragility in the structuring of such competence, which may not yet be fully integrated into a stable interpretative schema.

Furthermore, the analysis reveals how teachers' interpretations may sometimes be influenced by general pedagogical beliefs that are not entirely aligned with the specific mathematical situation. In the case of T2, the emphasis on the use of repeated addition instead of multiplication is interpreted as a lack of operational competence, whereas, in the context of the protocol, it may instead represent a faithful trace of the student's counting strategy. This misalignment underscores the importance of situating interpretations within the specific semiotic and conceptual features of the task, rather than relying on generalized expectations about students' performance. This element is of particular interest as it reflects the complex articulation of the components structuring the construct of competence adopted in the present work. Indeed, hermeneutical competence, as such, is shaped by the interaction among teachers' knowledge, beliefs, and dispositions; in the specific scenario

described, a clear prevalence of the teacher's beliefs regarding the reasons underlying the student's solution choice can be observed. This seems to hinder the consideration of alternative interpretations and inhibit the activation of other forms of knowledge, such as Semiotic Interpretative Knowledge (Asenova et al., 2023), which would have allowed for a more in-depth hermeneutical analysis. The centrality of the affective and evaluative dimension, linked to beliefs and presumably to experiential factors, emerges transversally across multiple points in the interviews.

In several passages, in fact, a certain perplexity emerges regarding the protocols presented (particularly with respect to Protocol 3), perceived as unexpected lines of reasoning or difficult to contextualize within daily classroom practice. It is hypothesized that such "amazement" may derive from a strong anchoring to preconceived solution models or to limited exposure to non-standard student responses, if not indeed from a reliance on their own professional experiences. In the specific case of T2, who had expressed significant perplexity regarding that protocol, it can be assumed that her extensive teaching experience may have influenced her perspective, as it might represent an error, she never had the opportunity to encounter directly during her classroom practice. Although not formally explicit by the teacher, such an influence of prior experience constitutes a plausible hypothesis that is widely documented in the literature, which highlights how field practice shapes and sometimes constraints teachers' expectations when faced with unusual strategies (Superfine, 2009). Consequently, this finding reinforces the importance of incorporating authentic and varied student productions into teacher education programs, as they can challenge implicit assumptions and broaden teachers' interpretative repertoires.

More generally, it can be observed how the different backgrounds of the interviewed teachers may have influenced their respective reflections: on the one hand, T1, having completed their studies more recently, presumably mobilized knowledge and skills acquired during their training path; on the other hand, T2 appeared to be more closely anchored to beliefs and knowledge stemming from her own teaching experience. This highlights how all these components contribute fundamentally to shaping mathematics teachers' hermeneutical competence, confirming its nature as a dynamic competence that is strictly practice-related.

Furthermore, the use of protocols and resources derived from LSAs in training contexts thus appears particularly valuable. In this study, such tools proved effective not only for observing the manifestation of hermeneutical competence but also for fostering its potential development. By engaging with concrete student responses, teachers are prompted to make explicit their interpretative criteria, confront alternative reasoning paths, and refine their understanding of underlying misconceptions.

Finally, it is noteworthy that reflections on national percentages were

perceived as less impactful compared to the analysis of individual protocols. While LSA data provide a valuable overview of students' performance, they appear less effective in supporting the interpretation of cognitive processes. This suggests that, within professional development models, quantitative data should be complemented with qualitative materials that allow teachers to access the reasoning behind errors. In this sense, the integration of LSA results with authentic student work emerges as a key condition for promoting a deeper and more functional development of hermeneutical competence.

6. Conclusion

The investigation conducted in this contribution suggests that hermeneutical competence represents a central resource for teaching professionalism, particularly in relation to the interpretation of students' mathematical thinking. More specifically, the study highlights that such competence cannot be reduced to the correct identification of errors, but involves the ability to construct coherent and context-sensitive interpretations that connect students' productions to underlying conceptual structures.

Within this perspective, the findings reinforce the importance of designing professional development pathways that explicitly target the hermeneutical dimension of teaching. The initial steps taken within the professional development model of which this study is a part (Bolondi et al., 2026) move in this direction, aiming to structure activities that encourage the emergence and refinement of hermeneutical competence through the combined use of student protocols and LSA data. The results of this study suggest that particular emphasis should be placed on supporting teachers in developing coherence across interpretative phases, as well as in integrating different sources of information into a unified analytical framework.

Although these are preliminary data, the results reveal different ways in which hermeneutical competence manifested, emphasizing the need to consciously support the processes through which teachers identify and interpret students' errors. In particular, the comparison between the two case studies shows that even when teachers are able to produce locally plausible interpretations, the absence of a stable interpretative structure may limit the depth and effectiveness of their analyses. This finding points to the necessity of fostering not only knowledge acquisition, but also the organization and mobilization of such knowledge in practice.

A further aspect of particular interest concerns the emergence of new training needs. The interviews highlight teachers' interest in exploring alternative task configurations and instructional scenarios starting from authentic student responses. For instance, the proposal advanced by T1 to modify the swordfish item (e.g., changing the orientation of the figure or using more standardized representations) reflects a productive shift from analysis to instructional design. This suggests that the development of hermeneutical

competence may also support teachers in anticipating students' difficulties and in designing tasks that make specific conceptual aspects more visible.

From a broader perspective, the study contributes to the ongoing discussion on the formative use of LSA. While LSA data are often used primarily for evaluative or accountability purposes, the findings suggest that their integration with qualitative analyses of student work can significantly enhance their educational value. In particular, such integration allows for bridging the gap between macro-level data and classroom-level practices, supporting a more reflective and informed use of assessment.

Finally, the study is subject to some limitations. The small sample size, limited to two case studies, does not allow for generalization of the findings. However, the depth of the qualitative analysis provides valuable insights into the processes underlying teachers' interpretations. Future research will aim to expand the sample and to further investigate how hermeneutical competence develops over time, particularly within structured professional development programs. Additionally, it would be valuable to explore how this competence interacts with other dimensions of teachers' professional knowledge, such as pedagogical content knowledge and beliefs about teaching and learning.

In conclusion, this study highlights the relevance of focusing on teachers' interpretative practices as a key lever for improving mathematics education. Supporting the development of hermeneutical competence appears to be a promising direction for fostering more meaningful engagement with students' thinking, ultimately contributing to more effective and responsive teaching practices.

References

- Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023). Unfolding teachers' interpretative knowledge into semiotic interpretative knowledge to understand and improve mathematical learning in an inclusive perspective. *Education Sciences*, 13(1), Article 65. <https://doi.org/10.3390/educsci13010065>
- Bolondi, G., & Ferretti, F. (2021). Quantifying solid findings in mathematics education: loss of meaning for algebraic symbols. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 29(1), 1–15. <https://doi.org/10.30722/IJISME.29.01.001>
- Bolondi, G., Cibien, M. C., Ferretti, F., Gambini, A., & Martignone, F. (2025). Teachers' knowledge and beliefs about assessment in mathematics: initial evidence from a national survey of teachers' formative needs. In M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)* (pp. 3523–3524). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- Bolondi, G., Cibien, M. C., & Spagnolo, C. (2026). How teacher professional development based on Large-Scale Assessment resources can act on teachers'

- beliefs affecting their teaching practice. *LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 11(2), Article 11.
- Blömeke, S., Kaiser, G., König, J., & Jentsch, A. (2020). Profiles of mathematics teachers' competence and their relation to instructional quality. *ZDM–Mathematics Education*, 52(2), 329–342. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01128-y>
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Cibien, M. C. (2025). Pre-service teachers' professional development and mathematics large-scale assessment. In M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)* (pp. 3377–3384). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- Cibien, M. C., Ferretti, F., Monica, S., & Viola, G. (2025). Le prove INVALSI e la didattica della matematica. *Archimede*, 2, 89–97.
- Cibien, M. C., Ferretti, F., & Spagnolo, C. (2026). The database Gestinv as a tool to develop mathematics teachers' hermeneutical competence. In A. Clark-Wilson and C. Bokhove (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, (pp. 59–66). University College London Institute of Education. <https://doi.org/10.14324/000.bk.10223410>
- Cibien, M. C. (2026). Teachers' engagement with students' errors in mathematics: Introducing hermeneutical competence. In *Proceedings of the Nineteenth ERME Topic Conference. ETC19. HAL Id: hal-05463964*, 412.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Routledge.
- D'Amore, B. (2022). Riflessioni su alcune problematiche relative al processo di insegnamento-apprendimento: dagli “errori” degli studenti alle convinzioni dei docenti. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 14(24), 6–25.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani I., & Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Erickson.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103–131.
- Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2007). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Erickson.
- Ferretti, F., & Bolondi, G. (2019). This cannot be the result! The didactic phenomenon “the Age of the Earth”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 52(2), 194–207. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1670366>
- Ferretti, F. & Santi, G. (2023). Teachers' subjectification as a dialogue with standardized assessment. *For the Learning of Mathematics*, 43(2), 19–21.
- Ferretti, F., Bolondi, G., Gambini, A., Giberti, C., Lemmo, A., Martignone, F., & Spagnolo, C. (2023). Valutazioni su larga scala e ricerche in didattica della matematica: esempi di studi condotti in Italia [Large-scale assessments and research in mathematics education: examples of studies conducted in Italy]. In *Atti del XXXIX Seminario Nazionale in Didattica della Matematica (AIRDm)*.
- Figal, G. (2022). The Task of Hermeneutics. *Critical Hermeneutics*, 6(2), 17–33.
- Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational studies in mathematics*, 38(1), 11–50.

- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 16(1), 3–17.
- Garuti, R., Lasorsa, C., & Pozio, S. (2017). The Italian national education assessment system: Building mathematics items. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 3500–3507). DCU Institute of Education & ERME.
- Girit Yildiz, D., Osmanoglu, A. & Gundogdu Alayli, F. (2023). Providing a video-case-based professional development environment for prospective mathematics teachers to notice students' misconceptions in measurement. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26, 179–209. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09525-0>
- Heinrichs, H., & Kaiser, G. (2018). Diagnostic competence for dealing with students' errors: Fostering diagnostic competence in error situations. In T. Leuders, K. Philipp, & J. Leuders (Eds.), *Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice* (Vol. 11, pp. 79–94). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66327-2_4
- Kamii, C., & Kysh, J. (2006). The difficulty of “length $\times$ width”: Is a square the unit of measurement?. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 105–115. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001>
- Larrain, M., & Kaiser, G. (2022) Interpretation of Students' Errors as Part of the Diagnostic Competence of Pre-Service Primary School Teachers. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43(1), 39–66. <https://doi.org/10.1007/s13138-022-00198-7>
- Livy, S., Muir, T., & Maher, N. (2012). How do they measure up? Primary pre-service teachers' mathematical knowledge of area and perimeter. *Mathematics Teacher Education and Development*, 14(2), 91–112.
- Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). Insegnare e apprendere la matematica. *I Laboratori*, 11–43.
- Looney, J. W. (2011). Integrating Formative and Summative Assessment: Progress Toward a Seamless System?, OECD Education Working Papers (No. 58). OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/5kghx3kbl734-en>
- MIM. (2025). *Indicazioni Nazionali per il curriculum Scuola dell'infanzia e Scuole del Primo ciclo di istruzione* [National Curricular Guidelines for Pre-primary Schools and the First Cycle of Education]. <https://www.mim.gov.it/documents/20182/8952594/Indicazioni+nazionali+2025.pdf/593dfc49-bcdc-ffbb-747a-5c368b4bac01?version=1.0&t=1749622399405>
- MIUR. (2012). *Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* [National Curricular Guidelines for Pre-primary Schools and the First Cycle of Education]. https://www.miur.gov.it/documents/2012/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf
- Ndemo, Z., & Ndemo, O. (2023). Mitigating errors and misconceptions among Grade 11 learners in algebra through error analysis. *African Journal of Teacher Education and Development*, 2(1), Article 11. <https://doi.org/10.4102/ajoted.v2i1.11>
- Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the learning of mathematics*, 29(3), 22–25.

- Prediger, S., Bikner-Ahsbahr, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM*, 40(2), 165–178.
- Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89–96). PME.
- Ribeiro, M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpreting students' non-standard reasoning: insights for mathematics teacher education. *For the Learning of Mathematics*, 36(2), 8–13.
- Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni inevitabili e misconcezioni evitabili [Inevitable misconceptions and avoidable misconceptions], *La matematica e la sua didattica*, 24(1), 57–71.
- Schrader, F. W. (2011). Lehrer als Diagnostiker [Teachers as diagnosticians]. In E. Terhart, H. Bennewitz, & M. Rothland (Eds.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (pp. 683–698). Waxmann.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20–26.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: the case of 'more of A -- more of B.' *International Journal of Science Education*, 18(6), 653–667. <https://doi.org/10.1080/0950069960180602>
- Superfine, A. C. (2009). The “problem” of experience in mathematics teaching. *School Science and Mathematics*, 109(1), 7–19.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

The Philosophy and Ethics of Ethnomathematics: Rejecting the High versus Low Valuations

La Filosofia e l'Etica dell'Etnomatemática: Oltre la Distinzione tra Cultura Alta e Cultura Bassa

La Filosofía y la Ética de la Etnomatemática: Más allá de la Distinción entre Alta y Baja Cultura

Paul Ernest

School of Education, University of Exeter, United Kingdom

Abstract. *This paper examines the ethical dimensions of ethnomathematics—the mathematical practices embedded in cultures, often informal, oral, and non-institutionalised. It argues that the marginalisation of ethnomathematics relative to formal, academic mathematics is not merely an epistemological issue but an ethical one, involving questions of social justice, class distinction, and cultural hierarchy. Drawing on Alan Bishop's framework of six universal activities, the paper shows how mathematics emerges from culturally situated practices. It explores the relationship between critical mathematics education and ethnomathematics, engaging with the work of Ole Skovsmose, Paola Valero, and Gelsa Knijnik to articulate the ethical-political nature of the field. The paper then examines the diverse philosophical and ontological frameworks embedded in Indigenous mathematical traditions, demonstrating that ethnomathematics embodies distinct worldviews. Drawing parallels with other domains of cultural production—history, art, music, language—it shows how the distinction between "high" and "low" culture serves to maintain social hierarchies. It argues that recognising the value of ethnomathematical practices is an ethical imperative connected to broader struggles for cultural recognition and social justice.*

Keywords: ethnomathematics, critical mathematics education, social justice, indigenous knowledge, epistemic justice, cultural hierarchy, philosophy of mathematics, Ubuntu, decoloniality.

Sunto. *Questo articolo esamina le dimensioni etiche dell'etnomatemática, intesa come l'insieme delle pratiche matematiche radicate nelle culture, spesso informali, orali e non istituzionalizzate. Si sostiene che la marginalizzazione dell'etnomatemática rispetto alla matematica formale e accademica non costituisca soltanto una questione epistemologica, ma anche una questione etica, che coinvolge temi di giustizia sociale, distinzione di classe e gerarchie culturali. Facendo riferimento al modello delle sei attività universali di Alan Bishop, l'articolo mostra come la matematica emerga da pratiche culturalmente situate. Viene inoltre esplorata la relazione tra educazione*

matematica critica ed etnomatematica attraverso il confronto con i contributi di Ole Skovsmose, Paola Valero e Gelsa Knijnik, al fine di evidenziare la natura etico-politica del campo. Successivamente, il lavoro analizza i diversi quadri filosofici e ontologici presenti nelle tradizioni matematiche indigene, mostrando come l'etnomatematica incorpori visioni del mondo differenti. Attraverso un confronto con altri ambiti della produzione culturale – storia, arte, musica e linguaggio – si evidenzia come la distinzione tra cultura “alta” e cultura “bassa” contribuisca al mantenimento delle gerarchie sociali. Si sostiene infine che il riconoscimento del valore delle pratiche etnomatematiche costituisca un imperativo etico connesso a più ampie rivendicazioni di riconoscimento culturale e giustizia sociale.

Parole chiave: etnomatematica, educazione matematica critica, giustizia sociale, saperi indigeni, giustizia epistemica, gerarchia culturale, filosofia della matematica, Ubuntu, decolonialità.

Resumen. *El presente estudio explora los procesos mediante los cuales los docentes de educación primaria identifican e interpretan los errores de los estudiantes de Grado 5 en relación con el ítem INVALSI del pez espada. En las respuestas a dicha tarea, administrada de forma abierta a una muestra de 100 estudiantes, aparece como recurrente la idea errónea (misconcepción) vinculada a la confusión entre magnitudes unidimensionales y bidimensionales (longitud y área). Los protocolos más representativos de este tipo de error se utilizaron posteriormente como estímulo durante entrevistas semiestructuradas realizadas individualmente a dos docentes de educación primaria; las transcripciones se analizaron a través de la nueva lente teórica de la competencia hermenéutica. Los resultados evidencian diferentes modalidades de expresión de dicha competencia y muestran cómo la trayectoria profesional de los docentes puede influir en los procesos de identificación e interpretación del error. Al mismo tiempo, el estudio señala cómo el análisis guiado de los protocolos y de los datos a gran escala constituye una prometedora herramienta formativa para promover el desarrollo de la competencia hermenéutica de los docentes.*

Palabras clave: etnomatematica, educación matemática crítica, justicia social, conocimientos indígenas, justicia epistémica, jerarquía cultural, filosofía de las matemáticas, Ubuntu, decolonialidad.

1. Introduction: Mathematics High and Low

Mathematics is typically understood as the formal, institutionalised discipline taught in universities and schools, published in journals, and practiced by professional mathematicians. However, mathematics in a broader sense encompasses far more. Almost every human society has developed ways of counting, measuring, locating, designing, playing, and explaining that involve mathematical thinking. These practices—embedded in culture, often oral and informal, passed down through generations—constitute what has come to be called ethnomathematics.

The term “ethnomathematics” was in use from at least the early 1970s; Wilbur Mellema claimed to have coined it in a 1971 speech, defining it as «the study of pre-Western and non-Western Mathematics and Logic.» The Brazilian mathematician and educator Ubiratan D’Ambrosio encountered the term in the late 1960s or early 1970s while seeking a way to describe mathematical practices embedded within cultural contexts. Rather than coining the term, D’Ambrosio’s foundational contribution was to formalise the field, broadening its definition to encompass the mathematics of *any* culturally identified group—not solely non-literate or non-Western societies. As D’Ambrosio defined it:

Ethnomathematics is the mathematics practiced by cultural groups, such as urban and rural communities, groups of workers, professional classes, children in a given age group, indigenous societies, and so many other groups that are identified by the objectives and traditions common to these groups. (D’Ambrosio, 1985, p. 45)

A more recent formulation, drawing on the work of the World Intellectual Property Organization, defines traditional knowledge as “knowledge, know-how, skills and practices that are developed, sustained and passed on from generation to generation within a community, often forming part of its cultural or spiritual identity” (WIPO, n.d., para. 1). This understanding recognises that what makes knowledge “traditional” is not its antiquity but its living, dynamic character: “much Traditional Knowledge is not ancient or inert, but is a vital, dynamic part of the contemporary lives of many communities today” (Indigenising University Mathematics project, n.d., “What is Traditional Knowledge?” section).

Ethnomathematics recognises that mathematical thinking is a universal human activity, but that its forms and expressions vary enormously across cultures and contexts. The mathematical practices of street vendors in Brazil, of Indigenous peoples in the Amazon, of craftspeople in India, of farmers in Africa, of workers in urban communities—all these are mathematics, even if they do not look like the mathematics taught in schools. As Marcelo Borba has argued:

When the solution of this problem involves a mathematical treatment, the solution contributes to the development of ethnomathematics in this culture. Over time, this ethnomathematics is probably going to be more efficient than the models stored in textbooks and written in codes not always accessible to a given cultural group, because it is connected to the culture where the problem was generated. (Borba, n.d., cited in Indigenising University Mathematics project, “Ethnomathematics and Education” section)

The relationship between formal mathematics and ethnomathematics is not merely one of difference but of hierarchy. Formal mathematics occupies a position of prestige and power; ethnomathematics is marginalised, devalued, often invisible. This hierarchy is not epistemologically justified—it does not rest on the superior truth or utility of formal mathematics—but is socially

constructed. It reflects and reinforces class distinctions, cultural hierarchies, and relations of power.

This paper examines the ethical dimensions of this hierarchy. It argues that the marginalisation of ethnomathematics is not just a scholarly oversight but an injustice—one connected to broader patterns of cultural domination and class distinction.

The specific contribution of this paper is to reframe that marginalisation as an ethical rather than a merely epistemological problem, and to argue the case through a sustained parallel with other cultural hierarchies. Its central thesis is that the hierarchy dividing formal from ethnomathematical practice is a socially constructed “high”-versus-“low” distinction of the same kind that separates fine art from craft, standard languages from dialects, or elite from popular history, and that, once this is recognised, the devaluing of ethnomathematics stands exposed as an injustice demanding redress. The paper advances this claim in three steps: it establishes the philosophical priority of everyday over formal mathematics; it shows, through African, First Nations, and Amazonian examples, that ethnomathematical traditions embody whole worldviews rather than mere techniques; and it draws the cross-cultural parallels that reveal the high–low distinction as a mechanism of social power. Recognising the value of ethnomathematics thus emerges not as an act of scholarly courtesy but as an ethical imperative bound up with wider struggles for cultural recognition and social justice.

2. The Philosophical Priority of Everyday Mathematics

Before examining the specific claims of ethnomathematics, it is necessary to address a fundamental philosophical issue: the claim that formal, academic mathematics is the sole legitimate form of mathematical knowledge. This claim inverts the actual relationship between formal and informal mathematics. Historically and ontologically, everyday mathematical practices come first. Long before there were professional mathematicians, there were merchants counting goods, builders measuring materials, farmers tracking seasons, and craftspeople designing patterns. The regularity and reliability of these practices—the fact that two goats plus two goats always makes four goats—is what sustains the sense of certainty and truth that we associate with mathematics. As the philosopher of mathematics Reuben Hersh argued: “The real foundation of mathematics is not in formal systems or Platonic heavens but in human practice. Mathematics is a human activity, a social phenomenon, part of human culture” (Hersh, 1997, p. 22).

The claim that formal proof is what legitimates mathematics is a professional ideology, not a description of how mathematics actually functions in human life. Most mathematical knowledge that people use every day has never been formally proved. As the mathematician and philosopher Imre Lakatos observed:

“The informal, quasi-empirical, mathematics has not been superseded by formal, axiomatic mathematics. On the contrary, formal mathematics is an abstraction from informal mathematics, and its validity depends on its relationship to the informal practices from which it is derived” (Lakatos, 1976, p. 3).

This philosophical point has profound ethical implications. If formal mathematics is derivative from, and dependent on, everyday mathematical practices, then the hierarchy that privileges formal over informal mathematics is not epistemologically justified. It is a social hierarchy, not a logical one. The marginalisation of ethnomathematics is therefore not just a scholarly oversight but an act of epistemic injustice—a failure to recognise the knowledge of ordinary people as genuine knowledge.

3. Alternative Epistemic Practices: Intuitionism and Dialectical Materialism

The claim that formal, academic mathematics is not the only valid form of mathematical knowledge is reinforced by the existence of alternative epistemic practices within mathematics itself and beyond.

3.1. Intuitionism and Mathematical Constructivism

Intuitionism, developed by L.E.J. Brouwer and his followers, rejects the classical law of excluded middle (that every statement is either true or false) and insists that mathematical objects must be constructed by the mind. As Brouwer wrote: “There are no non-experienced truths. The only possible foundation of mathematics must be sought in the construction of mental mathematical objects, which are based on the intuition of time” (Brouwer, 1912, p. 128).

For intuitionists, a mathematical statement is true only if there is a constructive proof of it. This leads to a rejection of many classical results that rely on non-constructive arguments. Intuitionism survives as a minority tradition within academic mathematics, but its existence demonstrates that even within the academy, there is not universal agreement on the nature of mathematical truth. This has parallels with ethnomathematics: different cultural traditions may have different conceptions of what counts as mathematical knowledge.

3.2. Dialectical Materialism and the Logic of Contradiction

An even more striking alternative epistemic practice is found in the tradition of dialectical materialism, developed by Marx, Engels, and their successors. Dialectical materialism rejects the classical law of non-contradiction (that a statement cannot be both true and false) in favour of a logic that embraces contradiction as a motor of development. As Friedrich Engels wrote in

Dialectics of Nature: “Dialectics, so-called objective dialectics, prevails throughout nature, and so-called subjective dialectics, dialectical thought, is only the reflection of the motion through opposites which asserts itself everywhere in nature” (Engels, 1940, p. 206).

This tradition holds that contradiction is not a sign of error but a feature of reality. The Soviet philosopher Evald Ilyenkov explained: “Contradiction is the principle of motion, of change, of development. To think dialectically is to think in contradictions, to grasp things in their development, in their transition from one state to another” (Ilyenkov, 1977, p. 240).

This logic of contradiction has been enormously influential outside the Western academic mainstream. Yet from the perspective of classical logic, dialectical materialism is incoherent. The significance for ethnomathematics is profound: if a major intellectual tradition operates with a logic incompatible with classical mathematics, then the claim that classical mathematics is the universal foundation of all rational thought becomes untenable. Different cultures have developed different standards of evidence and conceptions of truth. Recognising this is not cultural relativism but intellectual honesty.

4. Bishop’s Universal Activities: The Cultural Foundations of Mathematics

Alan Bishop’s foundational work in *Mathematical Enculturation* (Bishop, 1988) provides a crucial framework for understanding the cultural origins of mathematics. Bishop argued that mathematics, as cultural knowledge, derives from humans engaging in six universal activities in a sustained and conscious manner. These six activities—counting, locating, measuring, designing, playing, and explaining—represent the fundamental ways in which human societies develop mathematical understanding.

Counting is the activity of quantifying and enumerating. *Locating* involves finding one’s way in space, navigating, and representing spatial relationships. *Measuring* is the activity of quantifying qualities—length, area, volume, weight, time. *Designing* involves creating shapes, patterns, and structures. *Playing* includes games, puzzles, and other activities that involve rule-based behaviour and strategic thinking. *Explaining* is the activity of making sense of the world, finding patterns, and developing theories.

Bishop’s framework is significant because it shows that mathematics is not a European invention but a universal human activity. As Bishop himself wrote: “Mathematics is a form of cultural knowledge which all cultures generate but which need not necessarily look the same from one cultural group to another” (Bishop, 1988, p. 180).

Crucially, Bishop’s framework also shows how formal, academic mathematics has appropriated these activities. As D’Ambrosio argued, these universal human activities have been “expropriated by the scholarly

establishment, formalized, codified and incorporated into academic mathematics” (D’Ambrosio, 2001, p. 31). But they also “remain alive in culturally identified groups and constitute routine in their practices” (D’Ambrosio, 2001, p. 31). The relationship between formal mathematics and ethnomathematics is one of expropriation and marginalisation—the “high” form has taken what was once common and claimed it as its own.

5. Critical Mathematics Education and Ethnomathematics

Ole Skovsmose, whose critical philosophy of mathematics (Skovsmose, 2024a) has been central to this field, has written extensively on the relationship between critical mathematics education (Skovsmose, 2024b) and ethnomathematics. Skovsmose characterises critical mathematics education by its many concerns, identifying four interconnected themes:

Critical mathematics education can be characterized by its many concerns. I refer here to four of them connected to social justice and politics, power and mathematics, students’ future possibilities, and the socio-political structuring of education, all of which are interrelated and integrated. (Skovsmose, 2022, p. 2)

Skovsmose argues that much work in ethnomathematics shares these concerns, but adds a crucial qualification: the relationship between ethnomathematics and critical concerns is not automatic but must be examined in each case.

However, to what extent an ethnomathematical study turns critical must be discussed in every case. I see the concerns of critical mathematics education as an important challenge to ethnomathematics. (Skovsmose, 2022, p. 4)

This formulation is significant. Skovsmose is not dismissing ethnomathematics but insisting that it must be evaluated critically. Ethnomathematical studies can be descriptive, simply documenting practices without engaging with questions of power or justice. The challenge from critical mathematics education is to move beyond description to critique—to ask how ethnomathematical practices relate to structures of power, how they might contribute to social justice, and how they might open new possibilities for students.

In his recent *Critical Philosophy of Mathematics* (2024a), Skovsmose develops these themes further, interpreting mathematics as being “indefinite”—always part of ongoing human constructions—and outlining “a performative interpretation of mathematics, portraying mathematics as intrinsically connected to actions” (Skovsmose, 2024a, p. 87). As he argues: “Any kind of action, including mathematics-based actions, calls for ethical considerations and this leads to any mathematical practice, either in research, application, or education, to face ethical challenges” (Skovsmose, 2024a, p. 93).

Ethnomathematical practices, like all mathematical practices, are actions in the world, embedded in particular social, cultural, and political contexts.

Recognising ethnomathematics therefore requires attending to these ethical dimensions.

6. The Ethical-Political Dimensions of Ethnomathematics

The work of Paola Valero and Gelsa Knijnik has been central to articulating the ethical-political dimensions of ethnomathematics and mathematics education. Valero's research examines how mathematics education participates in the fabrication of subjects and the structuring of societies. As she writes: "Mathematics education is not merely about the transmission of mathematical knowledge; it is about the formation of human subjects and the constitution of social order" (Adrade Molina & Valero, 2019, p. 8).

Gelsa Knijnik has been a leading voice in ethnomathematics for over three decades. Her work, grounded in the social realities of rural Brazil, has consistently emphasised the connections between ethnomathematics and struggles for social justice. In a 1993 article, Knijnik:

Presents two practices used by rural Brazilians to estimate area of land and volumes of tree trunks. Using an ethnomathematical approach, develops educational ideas involving the interrelations between academic and popular mathematical knowledge in the context of the struggle for land. (Knijnik, 1993, p. 3)

The reference to "the struggle for land" is significant. Knijnik's work is rooted in concrete struggles for justice. The mathematical practices of rural Brazilians are not just interesting cultural artifacts but resources in their struggle for land, dignity, and recognition.

The 2024 edited volume *Ethnomathematics and Mathematics Education*, co-edited by Knijnik and Cynthia Nicol, brings together international perspectives on ethnomathematics. The editors emphasise how ethnomathematics supports "transformation of educational systems toward regaining cultural reclamation and self-confidence, challenges colonial logics for decolonizing and Indigenizing mathematics education, and engages with actions for critical and social justice issues" (Nicol et al., 2024, p. 3).

7. The Program of Ethnomathematics: Social Justice and the Six Dimensions

The 2016 ICME-13 Topical Survey *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program*, authored by Milton Rosa, Ubiratan D'Ambrosio, and colleagues, provides a comprehensive overview of the field. The survey emphasises that ethnomathematics is not merely a descriptive enterprise but a program with normative commitments:

The theoretical basis of ethnomathematics offers a valid alternative to traditional studies of history, philosophy, cognition, and pedagogical aspects of mathematics. The current agenda for ethnomathematics is to continue an ongoing, progressive

trajectory that contributes to the achievement of social justice, peace, and dignity for all. (Rosa et al., 2016, p. v)

The survey identifies six dimensions of ethnomathematics that structure the field: the conceptual, historical, cognitive, pedagogical, epistemological, and political dimensions (Rosa et al., 2016, p. 3). These six dimensions demonstrate the breadth of ethnomathematics as a program. It is not simply about studying other cultures' mathematics but about rethinking the very foundations of mathematics education, challenging dominant epistemologies, and engaging with questions of power and justice.

8. Indigenous Philosophies of Mathematics: Community, Relationality, and Ontology

The philosophical foundations of ethnomathematics are evident in Indigenous traditions of thought, which offer profound alternatives to Western individualistic and objectivist conceptions of mathematics. These traditions emphasise community, interconnectedness, and the social embeddedness of all knowledge.

8.1. African Philosophies: Ubuntu, Ayatutu, and Community

The philosophy of *Ubuntu*, with its foundational principle that “a person is a person through persons” (umuntu ngumuntu ngabantu), has been increasingly recognised as a framework for mathematics education. As Terungwa James Age argues, African approaches to education must move beyond the wholesale adoption of external methods, proposing an alternative pedagogy rooted in communal responsibility and mutual assistance. Age develops this through the concept of “Ayatutu,” a communal philosophy from Nigeria’s Tiv people (an agrarian people of the Benue valley in central Nigeria, among the country’s larger ethnic groups) that embodies “collective responsibility and mutual assistance” (Age, 2025). This framework demonstrates that mathematical learning is not an individual achievement but a communal endeavour.

The work of Paulus Gerdes has been foundational in documenting and recovering African mathematical heritage. Gerdes (1994) argues that “in African thought, mathematics is considered a social activity. It is regarded as an activity that involves the whole community” (Gerdes, 1994, p. 2). Similarly, Ron Eglash’s groundbreaking work on fractals in African architecture and design demonstrates that sophisticated mathematical concepts can be embedded in cultural practices without being formalised in the Western sense. As Eglash argues, “African mathematics is not simply a tool for problem-solving, it is a way of thinking and reasoning about the world” (Eglash, 1999, p. 159).

8.2. *First Nations Perspectives: Relationality and Ontology*

The Dakota/Lakota Math Connections project represents a pioneering effort to develop an epistemological framework that honours Indigenous ways of knowing. (The Dakota and Lakota are closely related peoples of the Oceti Šakowin, the Seven Council Fires, known in English as the Great Sioux Nation, whose homelands lie in the Northern Plains of what is now the north-central United States; the project is based at Sitting Bull College on the Standing Rock Reservation in North and South Dakota.) The framework explicitly challenges the Western assumption of mathematics as universal and objective:

This assumption describes that D/Lakota math existed before colonization. It passed down from one generation to the next and needed no justification from colonial powers or reinforcement with colonial knowledge. Just like the D/Lakota language does not need the English language to justify its credibility, use, or power, D/Lakota math does not need Western math to justify its credibility, use, or power. Each circle can stand on its own. (Frontiers in Education, 2023, p. 7)

The work of Rik Pinxten, particularly his studies of Navajo and Hopi geometry, demonstrates that Indigenous mathematical thinking operates with fundamentally different ontological assumptions. Pinxten's research reveals that Navajo conceptions of space reflect a different understanding of what space is—not an empty container but a field of relationships and processes.

Lisa Lunney Borden's work with Mi'kmaw communities has developed what she calls “verbing mathematics”—an approach that shifts from noun-based Western conceptions to verb-based Indigenous conceptions. This shift reflects a worldview in which mathematics is not a set of objects to be manipulated but a way of acting in and with the world.

8.3. *Amazonian Mathematics: Kinship as Algebra*

One of the most remarkable developments is the recognition that kinship systems in Amazonian societies embody sophisticated mathematical structures. As Vandendriessche and Pinxten's volume includes a chapter on “Indigenous mathematics in the Amazon: kinship as algebra and geometry among the Cashinahua” (Vandendriessche & Pinxten, 2022) (the Cashinahua, or Huni Kuin, an Indigenous people of the western Amazon along the Peru–Brazil border). This research demonstrates that what Westerners might classify as “social organisation” is simultaneously mathematical—a system of relations that can be mapped and manipulated according to rules. For the Cashinahua, mathematical thinking is not separate from kinship; it is kinship.

Mariana Kawall Leal Ferreira's work on Indigenous peoples in Brazil (Ferreira, 2015) provides rich documentation of mathematical thinking embedded in different ontological frameworks. Her book *Mapping Time, Space and the Body* brings together studies of the Xavante, Suyá, and other peoples (Indigenous nations of Brazil—the Xavante of the central Cerrado savanna and

the Suyá, or Kĩsêdjê, of the Xingu river basin), showing how they use mathematical thinking to understand and protect their territories. Particularly striking is Ferreira's chapter title "WHEN $1 + 1 \neq 2$," which signals that even basic arithmetic operations may not hold in Indigenous mathematical frameworks, reflecting different ontological assumptions about identity, relation, and time.

9. Beyond Contemplative Admiration: A Performative and Relational Ethnomathematics

Aldo Parra (2024) offers a powerful reconceptualisation of ethnomathematics that addresses the limitations of what he calls "contemplative admiration." He argues that much ethnomathematical research has been content to document and admire Indigenous mathematical practices without engaging with them as living, dynamic knowledge systems. Parra identifies two types of studies that have dominated the field: archaeological studies that reveal knowledge of the past, and non-participant observation studies that report on current practices. Both share the assumption that "the knowledge and practices investigated pre-exist the specific research" (Parra, 2024, p. 6).

This contemplative stance, Parra argues, positions the ethnomathematician as a spectator rather than a participant. Parra proposes instead a performative and relational ethnomathematics that recognises knowledge as something created through interaction, not merely discovered:

I contend that rather than look for a modernist answer, Ethnomathematics can forge a decolonial answer. Decolonial studies meet Ethnomathematics in their concern for the assemblages of knowledge and power. Within this chapter, I formulate a particular understanding of the Ethnomathematics program as a decolonising program, that vindicates performativity, interaction, and non-essentialism as values to be promoted in the quest for new insights on mathematics as a manifold of culture-based practices that change over time. (Parra, 2024, p. 5)

This reconceptualisation means that ethnomathematicians are not simply observers but participants in the ongoing creation of mathematical knowledge. The goal is not to extract and preserve Indigenous mathematics but to engage with it as a living practice, in genuine reciprocity with communities.

10. High Culture and Low Culture: Parallels Across Domains

The distinction between formal mathematics and ethnomathematics is one instance of a broader pattern: the distinction between "high" and "low" culture that pervades modern societies. This pattern appears across multiple domains, each illuminating the dynamics at work in mathematics.

10.1. History

As E. P. Thompson showed in *The Making of the English Working Class* (Thompson, 1963), traditional history focused on the doings of elites. Social history, by contrast, recovered the experience of ordinary people. Thompson wrote of: “rescuing the poor stockinger, the Luddite cropper, the ‘obsolete’ hand-loom weaver, the ‘utopian’ artisan, and even the deluded follower of Joanna Southcott, from the enormous condescension of posterity” (Thompson, 1963, p. 12).

This was not merely a shift in subject matter but a political and ethical project about whose stories are told and whose agency is recognised.

10.2. Art, Craft, and the Outsider

The Western art canon has traditionally privileged certain forms—oil painting, sculpture, architecture—while marginalising folk art, craft, and the work of anonymous artisans. The distinction between “fine art” and “craft” tracks social hierarchies: art made by and for elites is “high”; art made by and for ordinary people is “low.”

A rich spectrum of artistic production exists outside the official art world, each category illuminating different aspects of how “low” culture is positioned. *Art Brut* (Raw Art), a term coined by Jean Dubuffet in the 1940s, describes works created outside official culture—by psychiatric patients, prisoners, isolated individuals—that Dubuffet saw as pure because they were “uncooked” by culture. *Outsider Art*, introduced by Roger Cardinal in 1972 as an English equivalent, has come to encompass a broader range of creators, including “any artist who is untrained or with disabilities or suffering social exclusion” (Maizels, 2009, p. 7). *Naïve Art* refers to untrained artists who depict realistic scenes, often aspiring to artistic status. *Folk Art* encompasses practical objects embodying traditional forms and community values. *Visionary Art* and *Intuitive Art* are umbrella terms preferred by *Raw Vision* magazine to encompass “art produced by those who do not know its name” (Maizels, 2009, p. 7).

What unites these diverse categories is that all exist outside the official art world’s institutions of training, validation, and recognition. Their creators work without credentials, without academic training, without the sanction of galleries or museums—yet they produce work of power and sophistication. As John Maizels, founder of *Raw Vision*, describes:

When I came across Outsider art I was just so amazed by it, it was so powerful and it had such strong personal meaning... people are revealing themselves, their demons, their own aspirations, their own inner feelings... They don’t go to exhibitions or private views, they just work. They’ve got an inner compulsion. (Maizels, cited in *Raw Vision*, n.d.)

The contemporary British artist Grayson Perry has made a career of challenging these hierarchies. His work explicitly celebrates craft traditions marginalised by

the fine art establishment—pottery, tapestry, embroidery—and elevates them through virtuoso skill and conceptual sophistication. In his 2011 exhibition “The Tomb of the Unknown Craftsman,” Perry created a monumental work honouring anonymous artisans “whose names are lost to history” (Perry, 2011). Perry also celebrates ordinary people through his fictional alter ego Julie, a working-class woman from Essex, challenging the assumption that such perspectives are unworthy of artistic attention. In his Reith Lectures, he argued that the art world’s values and hierarchies are not natural but constructed—maintained by networks of power, money, and social capital (Perry, 2013).

10.3. *Music, Fashion, Food, and Language*

Classical music occupies a position of cultural prestige; folk music, popular music, and jazz are often devalued. Haute couture is distinguished from everyday clothing; haute cuisine from everyday cooking. Standard languages, associated with education and prestige, are distinguished from dialects, vernaculars, and creoles—yet linguists recognise that all varieties are equally rule-governed and valid. In each domain, the distinction between “high” and “low” serves to maintain social hierarchies, marking who belongs to the elite and who does not.

The relevance to ethnomathematics is clear. Just as the art world has historically dismissed Art Brut and Folk Art as not really art, so the mathematical establishment has dismissed ethnomathematics as not really mathematics. In both cases, the judgment reflects institutional power rather than intrinsic merit. The recovery and recognition of these marginalised practices is not just scholarly work but ethical work—an act of reparation, a challenge to hierarchies that exclude and devalue.

11. The Hierarchy of Mathematical Knowledges

The parallels across domains reveal that the marginalisation of ethnomathematics is part of a broader pattern of cultural hierarchy. Formal, academic mathematics is “high;” ethnomathematics is “low.” The former is associated with elites—professors, researchers, institutions; the latter with ordinary people—workers, traders, craftspeople, farmers. The former is presented as universal and timeless; the latter as particular and local. This hierarchy is maintained through several mechanisms:

- *Institutional exclusion:* Ethnomathematical practices are excluded from schools and universities, reinforcing the message that only formal mathematics counts as “real” mathematics.
- *Epistemic marginalisation:* Ethnomathematical knowledge is dismissed as “folk knowledge” or “practical know-how,” terms that carry the implication of inferiority.

- *Historical erasure*: The history of mathematics, as conventionally told, erases the contributions of non-European and non-elite peoples.
- *Ideological legitimization*: The ideology of purism values mathematics for its detachment from worldly concerns, devaluing ethnomathematics as deeply embedded in practical activity.

As with other domains, the boundaries are porous. Formal mathematics has repeatedly drawn on folk practices. The “high” is built on the “low”—but this debt is forgotten in the telling. The recognition of ethnomathematics challenges this forgetting.

12. The Ethical Imperative: Recognising Ethnomathematics

The recognition of ethnomathematics is not merely a scholarly matter but an ethical imperative. It involves several interconnected dimensions:

- *Epistemic justice*: Recognising that multiple forms of mathematical knowledge exist, and that Western academic mathematics is not the only valid mathematics, is a matter of epistemic justice. As one study puts it, the recovery of Indigenous ways of knowing leads to “epistemic freedom and cognitive justice—an essential component of social justice—that redresses the loss of Indigenous knowledges” (Osibodu, 2020, p. 5).
- *Cultural recognition*: Valuing the mathematical practices of diverse cultures as part of their cultural heritage is a matter of cultural recognition. The Dakota/Lakota Math Connections framework insists that Indigenous mathematics can stand on its own, needing no justification from Western mathematics (Luecke & Sanders, 2023, p. 7).
- *Educational equity*: Making mathematics education more inclusive by connecting it to students’ own cultural practices is a matter of educational equity. As Borba argues, ethnomathematics developed within a culture is more efficient than textbook models “because it is connected to the culture where the problem was generated” (Borba, n.d.).
- *Social justice*: Recognising that the marginalisation of ethnomathematics is connected to broader patterns of social inequality, and that working for its recognition is part of working for a more just world, is a matter of social justice. As the ICME-13 survey states, the agenda of ethnomathematics is “to contribute to the achievement of social justice, peace, and dignity for all” (Rosa et al., 2016, p. v).

As D’Ambrosio wrote:

The recognition of ethnomathematics is part of a broader movement toward a more just and peaceful world. It is about recognising the dignity and creativity of all peoples, and about building a world in which all forms of knowledge are valued and respected. (D’Ambrosio, 2001, p. 8)

This ethical imperative connects the study of ethnomathematics to central themes in the philosophy of mathematics. If mathematics is never neutral, then the choice of which mathematics to teach, which to study, which to value, is always an ethical choice. The marginalisation of ethnomathematics is not an accident but a product of social hierarchies and power relations. Recognising and valuing it is an act of ethical and political responsibility.

13. Conclusion

The distinction between formal mathematics and ethnomathematics mirrors distinctions in other domains—history, art, music, fashion, food, language—between “high” and “low” culture. In each case, the distinction serves to mark and maintain social hierarchies, to legitimise the cultural preferences of elites, and to delegitimise those of ordinary people.

The philosophical priority of everyday mathematics challenges the claim that formal proof is what legitimates mathematical knowledge. Historically and ontologically, everyday mathematical practices come first, and formal systems are derivative. The existence of alternative epistemic practices—intuitionism within the academy, dialectical materialism outside it—further demonstrates that mathematical knowledge is not monolithic.

Bishop’s framework of six universal activities shows that mathematics is a universal human activity, not a European invention. The diverse philosophical frameworks of African, First Nations, and Amazonian mathematics demonstrate that ethnomathematics embodies entire worldviews with distinct ethical and ontological commitments. The Ubuntu philosophy of mutual responsibility, the Dakota/Lakota assertion that mathematics existed before colonisation, the Cashinahua understanding of kinship as algebra—all challenge the Western assumption that mathematics is a universal, value-neutral domain.

The rich tradition of art outside the academy—Art Brut, Outsider Art, Folk Art, Naïve Art—provides powerful parallels to ethnomathematics. These categories demonstrate that creative expression of the highest order can exist entirely outside institutional frameworks. The recovery and recognition of these art forms is an ongoing ethical project, one that ethnomathematics shares.

Skovsmose’s critical mathematics education provides a framework for evaluating ethnomathematics, challenging it to move beyond description to critique. Valero and Knijnik have articulated the ethical-political dimensions of the field, showing that it is about understanding how mathematical practices are situated within structures of power and inequality.

Recognising ethnomathematics is an ethical imperative. It means acknowledging the creativity and agency of ordinary people, challenging cultural hierarchies, and working for social justice. It means understanding that mathematics, like history, art, music, and language, belongs to everyone—not just to elites.

The contribution of this paper has been to draw these strands together into a single ethical argument. Where much of the literature treats ethnomathematics as an epistemological corrective, a reminder that other mathematics exist, this paper has argued that the deeper issue is ethical: the hierarchy of “high” and “low” mathematics is an instance of the same socially constructed distinction that operates across history, art, music, and language, and it functions, as those distinctions do, to preserve the standing of elites and to diminish the knowledge of ordinary people. To see the marginalisation of ethnomathematics in this light is to see that it cannot be remedied by inclusion alone; it calls for recognition, and recognition is a matter of justice. That is the thesis this paper has sought to establish, and it is why the recovery of ethnomathematical practice belongs not only to the philosophy of mathematics but to the ethics of mathematics as well.

As Thompson rescued the poor stockinger from the condescension of posterity, and as Grayson Perry honours the unknown craftsman, and as the champions of Art Brut celebrate those who create without knowing they are artists, so ethnomathematics rescues the mathematical practices of ordinary people from the condescension of academic mathematics. This is not just scholarship; it is reparation. It is part of the larger project of building a world in which all forms of knowledge, all ways of knowing, are valued and respected.

References

- Age, T. J. (2025). Ayatutu as a framework for mathematics education: Integrating Indigenous philosophy with cooperative learning approaches. *Knowledge*, 5(2), 11. <https://doi.org/10.3390/knowledge5020011>
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Brouwer, L. E. J. (1912). Intuitionism and formalism. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20(2), 81–96.
- D’Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44–48.
- D’Ambrosio, U. (2001). *Ethnomathematics: Link between traditions and modernity*. Brill | Sense.
- Eglash, R. (1999). African influences in cybernetics. *Kybernetes*, 28(7), 808–823.
- Engels, F. (1940). *Dialectics of nature*. International Publishers.
- Ferreira, M. K. L. (2015). *Mapping time, space and the body: Indigenous knowledge and mathematical thinking in Brazil*. Brill | Sense.
- Gerdes, P. (1994). Reflections on the teaching and learning of mathematics in Africa. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 32–34.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford University Press.
- Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic: Essays in its history and theory*. Progress Publishers.
- Indigenising University Mathematics project. (n.d.). *Traditional knowledge*. Retrieved from <https://carmamaths.org/meetings/ium/themes/traditional-knowledge.html>

- Knijnik, G. (1993). Two practices used by rural Brazilians to estimate area of land and volumes of tree trunks. *For the Learning of Mathematics*, 13(3), 3–8.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.
- Luecke, D., & Sanders, D. (2023). Dakota/Lakota math connections: An epistemological framework for teaching and learning mathematics with Indigenous communities and students. *Frontiers in Education*, 8, 1151376. <https://doi.org/10.3389/educ.2023.1151376>
- Maizels, J. (Ed.). (2009). *Outsider art sourcebook: Art brut, folk art, outsider art* (2nd ed.). Raw Vision.
- Nicol, C., Knijnik, G., Peng, A., Cherinda, M., & Bose, A. (Eds.). (2024). *Ethnomathematics and mathematics education: International perspectives in times of local and global change*. Springer.
- Osibodu, O. O. (2020). *Embodying Ubuntu, invoking Sankofa, and disrupting with Fela: A co-exploration of social issues and critical mathematics education with Sub-Saharan African youth* (Publication No. 27962619) [Doctoral dissertation, Michigan State University]. ProQuest Dissertations Publishing.
- Parra, A. (2024). A performative and relational ethnomathematics. In B. Greer, D. Kolloche, & O. Skovsmose (Eds.), *Breaking images: Iconoclastic analyses of mathematics and its education*. Open Book Publishers.
- Perry, G. (2011). *The Tomb of the Unknown Craftsman*. British Museum exhibition catalogue.
- Perry, G. (2013). *Playing to the gallery*. Penguin Books.
- Rosa, M., D'Ambrosio, U., Orey, D. C., Shirley, L., Alangu, W. V., Palhares, P., & Gavarrete, M. E. (2016). *Current and future perspectives of ethnomathematics as a program*. ICME-13 Topical Surveys. Springer Open.
- Skovsmose, O. (2022). Concerns of critical mathematics education – and of ethnomathematics. *For the Learning of Mathematics*, 42(2), 2–6.
- Skovsmose, O. (2024a). *Critical philosophy of mathematics*. Springer.
- Skovsmose, O. (2024b). *Critical mathematics education*. Springer.
- Thompson, E. P. (1963). *The making of the English working class*. Victor Gollancz.
- Andrade Molina, M., & Valero, P. (2019). Lo ético-político en la educación matemática: Conceptos y retos para la práctica. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 84, 7–14.
- Vandendriessche, E., & Pinxten, R. (Eds.). (2022). *Indigenous knowledge and ethnomathematics*. Springer.
- World Intellectual Property Organization. (n.d.). Intellectual property and traditional knowledge. Retrieved from <https://www.wipo.int/tk/en/>

Editoriale

Miglina Asenova, Maura Iori, Andrea Maffia e George Santi

pp. 7–8

La Storia della Matematica in Classe: Una Proposta Didattica Ispirata a Johannes Kepler

History of Mathematics in the Classroom: A Didactic Proposal Inspired by Johannes Kepler

La Historia de las Matemáticas en el Aula: Una Propuesta Didáctica Inspirada en Johannes Kepler

Maria Giulia Lugaresi ed Elena Scalambro

pp. 9–54

Counting Squares or Measuring Length? Mathematics Teachers' Hermeneutical Competence

Contare i Quadretti o Misurare la Lunghezza? La Competenza Ermeneutica degli Insegnanti di Matematica

¿Contar Cuadritos o Medir la Longitud? La Competencia Hermenéutica de los Docentes de Matemática

Valentina Bernabè, Maria Chiara Cibien, Federica Ferretti e Serena Monica

pp. 55–81

The Philosophy and Ethics of Ethnomathematics: Rejecting the High versus Low Valuations

La Filosofia e l'Etica dell'Etnomatematica: Oltre la Distinzione tra Cultura Alta e Cultura Bassa

La Filosofía y la Ética de la Etnomatemática: Más allá de la Distinción entre Alta y Baja Cultura

Paul Ernest

pp. 83–99
